

Logique, ensembles et applications

Corrigé de l'exercice 1 : Négation de propositions quantifiées

1. La phrase s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$. C'est la négation qui est vraie : pour $x = -1$, on a $y^2 \geq 0 > -1$ pour tout réel y . **La phrase de départ est donc fausse.**

2. « f est bornée » s'écrit $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$. **Sa négation est** $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$.

3. « f est croissante » s'écrit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. La négation d'une implication $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$. **La négation est donc** $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \text{ et } f(x) > f(y)$. Attention : ce n'est pas « f est décroissante ».

4. La convergence vers 0 s'écrit $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$. **Sa négation est** $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n| > \varepsilon$.

5. « f est périodique » s'écrit $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. **Sa négation est** $\forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x+T) \neq f(x)$.

Remarquez que la condition $T > 0$ reste inchangée : seul le quantificateur change.

Point de méthode : les ensembles qui suivent un quantificateur ($\varepsilon > 0$, $n \geq N$) ne se nient jamais ; on ne nie que la propriété finale.

Corrigé de l'exercice 2 : Ordre des quantificateurs

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $y = -x$ vérifie $x + y = 0$. P_1 est vraie.
2. Supposons qu'un réel y convienne pour tout x . Avec $x = 0$, on obtient $y = 0$. Avec $x = 1$, on obtient $y = -1$. C'est contradictoire. P_2 est fausse, et sa négation est
 $\forall y \in \mathbb{R},$
 $\exists x \in \mathbb{R},$
 $x + y \neq 0$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'entier $m = n + 1$ vérifie $m > n$. P_3 est vraie.
4. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour $n = m$, l'inégalité $m > n$ est fausse. Ainsi, aucun m ne convient.
 $\forall m \in \mathbb{N},$
 P_4 est fausse, et sa négation est $\exists n \in \mathbb{N},$
 $m \leq n$
5. Le réel $x = 1$ vérifie $1 \times y = y$ pour tout y . P_5 est vraie.
6. Pour $y = 0$, on a $xy = 0 \neq 1$ quel que soit x . P_6 est fausse, et sa négation est
 $\exists y \in \mathbb{R},$
 $\forall x \in \mathbb{R},$
 $xy \neq 1$

Les couples (P_1, P_2) et (P_3, P_4) montrent qu'échanger un $\forall$ et un $\exists$ change le sens. En effet, dans P_1 , le réel y dépend de x ; dans P_2 , il devrait convenir pour tous les x à la fois.

Corrigé de l'exercice 3 : Implication, réciproque et contraposée

1. On dresse la table en notant V pour vrai et F pour faux. Si P et Q sont vraies, les deux énoncés sont vrais. Si P est vraie et Q fausse, $P \Rightarrow Q$ est fausse, et $\neg P \vee Q$ aussi. Si P est fausse, les deux énoncés sont vrais, quelle que soit la valeur de Q . Les tables coïncident, donc $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. D'après les lois de De Morgan, la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$.

2. La réciproque est « $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ ». Elle est fausse : $x = -3$ vérifie $x^2 = 9 > 4$ mais pas $x > 2$. La contraposée est « $x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$ ». Or l'implication de départ est vraie : si $x > 2$, alors $x > 0$, et en multipliant $x > 2$ par x puis par 2, on obtient $x^2 > 2x > 4$. Par conséquent, **l'implication et sa contraposée sont vraies, la réciproque est fausse.**

3. La contraposée s'énonce ainsi : si n est impair, alors 4 divise $n^2 - 1$. Supposons $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$, qui est un multiple de 4. La contraposée est vraie, donc **si 4 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair.**

4. Prouvons la contraposée : si $x^2 - 2x = y^2 - 2y$, alors $x = y$. D'abord, on factorise :

$$x^2 - 2x - (y^2 - 2y) = (x - y)(x + y) - 2(x - y) = (x - y)(x + y - 2).$$

Ce produit est nul. Or $x > 1$ et $y > 1$, donc $x + y - 2 > 0$. Par conséquent, $x - y = 0$. **La contraposée est établie, donc $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$.**

Corrigé de l'exercice 4 : Raisonnements par l'absurde

1. Si 3 ne divise pas p , le reste de p dans la division par 3 vaut 1 ou 2. Si $p = 3k + 1$, alors $p^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$. Si $p = 3k + 2$, alors $p^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dans les deux cas, p^2 a pour reste 1. **Donc 3 ne divise pas p^2 .** Par contraposition, si 3 divise p^2 , alors 3 divise p .

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, la fraction étant irréductible. En élevant au carré, $p^2 = 3q^2$. Ainsi, 3 divise p^2 , donc 3 divise p d'après la question 1. On écrit $p = 3p'$: alors $9p'^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3p'^2$. De même, 3 divise q . Ainsi, 3 divise p et q , ce qui contredit l'irréductibilité. **Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.**

3. Supposons par l'absurde $x \neq 0$. Alors $\epsilon = \frac{|x|}{2}$ est strictement positif. L'hypothèse donne $|x| \leq \frac{|x|}{2}$, donc $\frac{|x|}{2} \leq 0$. C'est impossible puisque $|x| > 0$. **Par conséquent, $x = 0$.**

4. Supposons par l'absurde que $m = \sqrt{n^2 + 1}$ soit un entier. D'une part, $n^2 < n^2 + 1$. D'autre part, $n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, car $n \geq 1$. Ainsi $n^2 < m^2 < (n+1)^2$, puis $n < m < n + 1$, car la fonction racine carrée est strictement croissante. Or aucun entier n'est strictement compris entre deux entiers consécutifs. **Donc $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.**

Point de méthode : dans un raisonnement par l'absurde, annoncez dès la première ligne l'hypothèse faite, puis signalez clairement la contradiction obtenue.

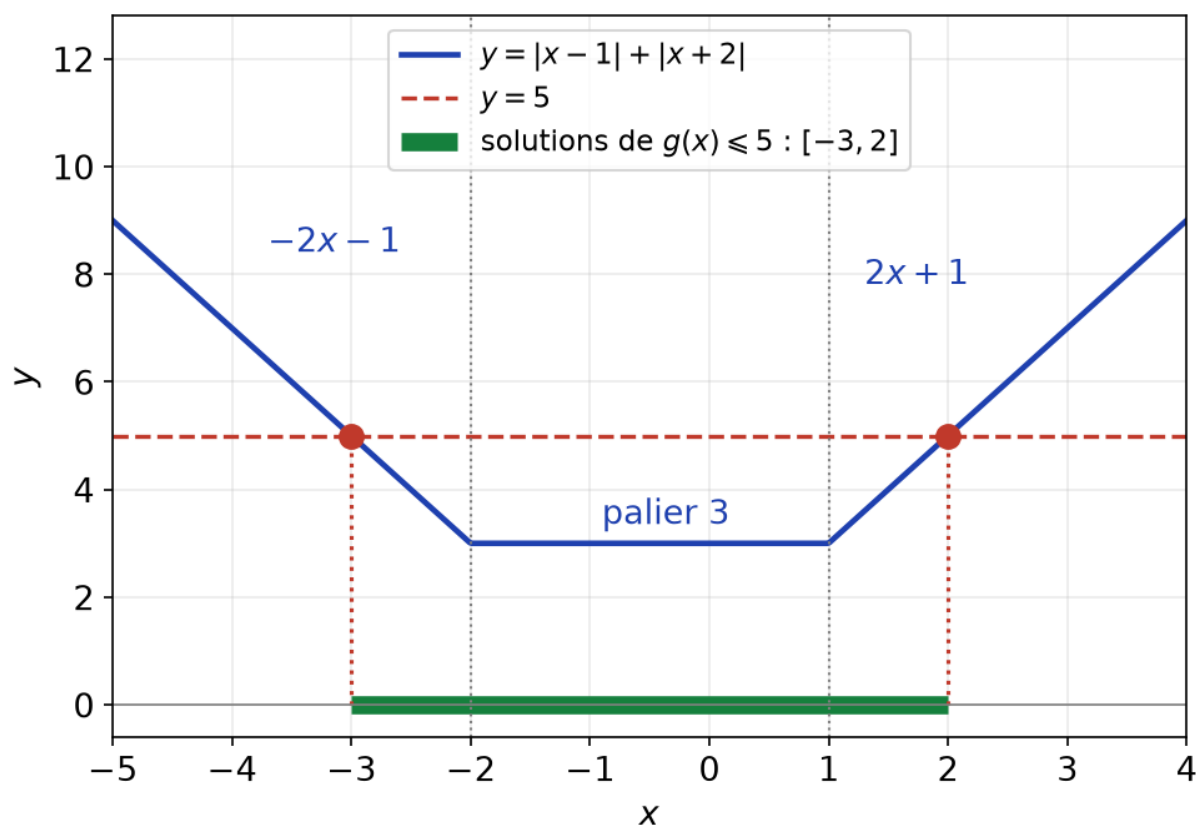
Corrigé de l'exercice 5 : Disjonction des cas

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Si k est pair, $k = 2j$ et $k(k+1) = 2j(k+1)$ est pair. Si k est impair, $k+1$ est pair et le produit l'est aussi. Ensuite, soit n impair : $n = 2k+1$. Alors $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Comme $k(k+1) = 2j$ pour un entier j , on obtient $n^2 - 1 = 8j$. **Ainsi, 8 divise $n^2 - 1$ pour tout entier impair n .**
2. On étudie le signe de $x - 1$ et de $x + 2$.
 - Si $x \leq -2$, les deux quantités sont négatives :
 $g(x) = (1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$.
 - Si $-2 \leq x \leq 1$, on a $x - 1 \leq 0 \leq x + 2$: $g(x) = (1 - x) + (x + 2) = 3$.
 - Si $x \geq 1$, les deux quantités sont positives : $g(x) = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$.

Ainsi, $g(x) = -2x - 1$ sur $]-\infty, -2]$, $g(x) = 3$ sur $[-2, 1]$ et $g(x) = 2x + 1$ sur $[1, +\infty[$.

3. Résolvons $g(x) = 5$ cas par cas. Sur $]-\infty, -2]$, l'équation $-2x - 1 = 5$ donne $x = -3$, qui appartient bien à l'intervalle. Sur $[-2, 1]$, l'équation $3 = 5$ n'a pas de solution. Sur $[1, +\infty[$, l'équation $2x + 1 = 5$ donne $x = 2$, qui convient. **L'ensemble des solutions de $g(x) = 5$ est $\{-3, 2\}$.** De même, pour l'inéquation : sur $]-\infty, -2]$, $-2x - 1 \leq 5$ équivaut à $x \geq -3$, d'où $[-3, -2]$. Sur $[-2, 1]$, l'inégalité $3 \leq 5$ est toujours vraie. Enfin, sur $[1, +\infty[$, $2x + 1 \leq 5$ équivaut à $x \leq 2$, d'où $[1, 2]$. **L'ensemble des solutions de $g(x) \leq 5$ est $[-3, 2]$.**

La figure ci-dessous confirme ces résultats : la courbe de g coupe la droite $y = 5$ aux abscisses -3 et 2 , et reste en dessous entre ces deux valeurs.



Corrigé de l'exercice 6 : Analyse-synthèse et équation fonctionnelle

1. Analyse. Soit f une solution et $x \in \mathbb{R}$. La relation appliquée en $-x$ donne $f(-x) + 2f(x) = x^2 - x$. On pose $a = f(x)$ et $b = f(-x)$. On obtient le système :

$$\begin{cases} a + 2b = x^2 + x \\ 2a + b = x^2 - x \end{cases}$$

On multiplie la seconde ligne par 2 et on retranche la première :

$3a = 2x^2 - 2x - x^2 - x = x^2 - 3x$. **Nécessairement**, $f(x) = \frac{x^2}{3} - x$ pour tout réel x .

2. Synthèse. Posons $f(x) = \frac{x^2}{3} - x$. Alors $f(-x) = \frac{x^2}{3} + x$, et

$$f(x) + 2f(-x) = \frac{x^2}{3} - x + \frac{2x^2}{3} + 2x = x^2 + x.$$

Cette fonction convient. **Il existe donc une unique solution :** $x \rightarrow \frac{x^2}{3} - x$.

Corrigé de l'exercice 7 : Fonctions paires et impaires par analyse-synthèse

1. Soit f paire et impaire, et $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $2f(x) = 0$.
Ainsi, f est la fonction nulle.

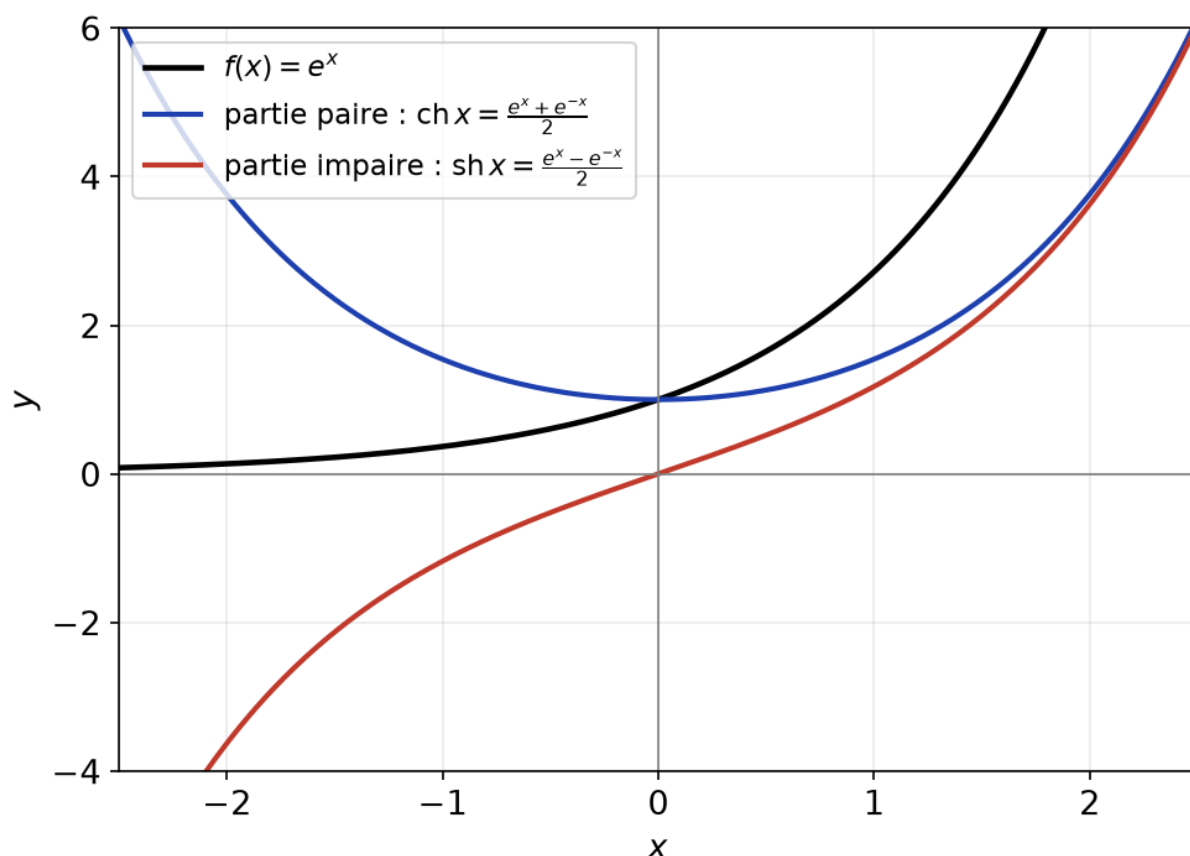
2. Analyse. Supposons $f = p + i$ avec p paire et i impaire. Pour tout réel x , on a $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$. En additionnant puis en soustrayant, on obtient

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Le couple (p, i) est donc unique. Synthèse. Définissons p et i par ces formules. D'abord, $p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$, donc p est paire. Ensuite, $i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$, donc i est impaire. Enfin, $p(x) + i(x) = f(x)$. **La décomposition existe et elle est unique.**

3. Pour $f(x) = e^x$, on obtient $p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ et $i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.
Pour $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, on a $f(-x) = x^2 - 2x + 1$. Par conséquent, $p(x) = x^2 + 1$ **et** $i(x) = 2x$ **dans le second cas, et** $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ **dans le premier.**

La figure ci-dessous montre la décomposition de l'exponentielle : la courbe de ch est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle de sh par rapport à l'origine.



Corrigé de l'exercice 8 : Récurrences simples

1. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ». Initialisation : pour $n = 1$, les deux membres valent 1. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. **Par récurrence, la formule vaut pour tout $n \geq 1$.**

2. Notons $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geq n^2$ », pour $n \geq 4$. Initialisation : $2^4 = 16 = 4^2$. Hérédité : soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} \geq 2n^2$. De plus,

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 9 - 2 > 0,$$

car $n-1 \geq 3$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. **La propriété vaut pour tout $n \geq 4$, mais elle est fausse pour $n = 3$, car $2^3 = 8 < 9$.**

3. L'argument de chevauchement exige que les deux groupes de n crayons aient au moins un crayon commun. Or, pour $n = 1$, le groupe compte deux crayons : en retirant le premier, il reste le second, et en retirant le dernier, il reste le premier. Les deux groupes sont disjoints. **L'hérédité est fausse de $n = 1$ à $n = 2$** , et toute la chaîne s'effondre. Une hérédité doit être valable pour tout n à partir du rang initial.

Corrigé de l'exercice 9 : Récurrence double

1. Notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n + 1$ ». Initialisation : $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2^1 + 1$. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Alors
- $$u_{n+2} = 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+2} + 1.$$

Par récurrence double, $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Initialisation : $F_1 = 1 \leq 2^0$ et $F_2 = F_1 + F_0 = 1 \leq 2^1$. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $F_n \leq 2^{n-1}$ et $F_{n+1} \leq 2^n$. Alors

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \leq 2^n + 2^{n-1} \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Par récurrence double, $F_n \leq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

3. Initialisation : $F_1 = 1 \geq \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ et $F_2 = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que les inégalités sont vraies aux rangs n et $n+1$. Alors

$$F_{n+2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times \frac{5}{2}.$$

Or $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \geq \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Donc $F_{n+2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$. **Ainsi, $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ pour tout $n \geq 1$.**

Point de méthode : dans une récurrence double, l'hérédité utilise deux rangs ; il faut donc vérifier deux valeurs initiales, sinon la preuve ne démarre pas.

Corrigé de l'exercice 10 : Récurrence forte

1. On a $u_1 = u_0 = 1$, puis $u_2 = u_0 + u_1 = 2$, et $u_3 = 1 + 1 + 2 = 4$. Notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^{n-1}$ », pour $n \geq 1$. Initialisation : $u_1 = 1 = 2^0$. Hérédité forte : soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. Alors, grâce à la somme des termes d'une suite géométrique,

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + (2^n - 1) = 2^n.$$

Par récurrence forte, $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Notons $\mathcal{P}(n)$: « n est une somme de puissances de 2 deux à deux distinctes ». Initialisation : $1 = 2^0$. Hérédité forte : soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies.
- Si $n + 1$ est pair, on écrit $n + 1 = 2m$ avec $1 \leq m \leq n$. Par hypothèse, $m = 2^{j_1} + \dots + 2^{j_r}$ avec des exposants distincts. Alors $n + 1 = 2^{j_1+1} + \dots + 2^{j_r+1}$, et les exposants restent distincts.
 - Si $n + 1$ est impair, alors $n + 1 \geq 3$ et $n + 1 = 2m + 1$ avec $1 \leq m \leq n$. On décompose $2m$ comme ci-dessus : tous ses exposants sont au moins égaux à 1. On ajoute 2^0 , qui est donc distinct des autres termes.

Par récurrence forte, tout entier $n \geq 1$ est une somme de puissances de 2 distinctes.

3. On suit la démarche : $45 = 1 + 2 \times 22$, puis $22 = 2 \times 11$, $11 = 1 + 2 \times 5$, $5 = 1 + 2 \times 2$ et $2 = 2^1$. En remontant : $5 = 2^0 + 2^2$, $11 = 2^0 + 2^1 + 2^3$, $22 = 2^1 + 2^2 + 2^4$. **Finalement, $45 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^5 = 1 + 4 + 8 + 32$.**

Corrigé de l'exercice 11 : Égalités et inclusions d'ensembles

1. Soit $x \in E$. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).
 \end{aligned}$$

La première ligne utilise la loi de De Morgan : $x \notin B \cup C$ équivaut à $x \notin B$ et $x \notin C$. **Les deux ensembles sont donc égaux.**

2. Soit $x \in E$. Raisonnons par disjonction des cas. Si $x \in A$, alors x appartient aux deux membres. Si $x \notin A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$ équivaut à $x \in B$ et $x \in C$. De même, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ équivaut alors à $x \in B$ et $x \in C$. **Dans tous les cas, les appartenances coïncident : l'égalité est démontrée.**
3. Si $A = B$, alors $A \cap B = A = A \cup B$. Réciproquement, supposons $A \cap B = A \cup B$. Alors $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$. De même, $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$. **Par double inclusion, $A = B$.**
4. Soit $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in C$. Sinon, $x \in A \cup B \subset A \cup C$ et $x \notin A$, donc $x \in C$. **Dans les deux cas, $x \in C$: ainsi, $B \subset C$.**

Remarquez qu'aucune des deux hypothèses de la question 4 ne suffit seule. Par exemple, avec $A = E$, la première est toujours vraie, quel que soit B .

Corrigé de l'exercice 12 : Ensemble des parties

1. On range les parties selon leur nombre d'éléments : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. **L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ compte 8 éléments.**
2. Supposons $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. Comme $A \subset A$, on a $A \in \mathcal{P}(A)$, donc $A \in \mathcal{P}(B)$, c'est-à-dire $A \subset B$. Réciproquement, supposons $A \subset B$, et soit $X \in \mathcal{P}(A)$. Alors $X \subset A \subset B$, donc $X \in \mathcal{P}(B)$. **L'équivalence est démontrée.**
3. Soit X un ensemble. Alors $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ équivaut à $X \subset A \cap B$. Cela équivaut à $X \subset A$ et $X \subset B$, donc à $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. **Ainsi, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.**
4. Si $X \subset A$ ou $X \subset B$, alors $X \subset A \cup B$. D'où l'inclusion. Prenons ensuite $A = \{1\}$

et $B = \{2\}$. La partie $\{1, 2\}$ appartient à $\mathcal{P}(A \cup B)$, mais ni à $\mathcal{P}(A)$ ni à $\mathcal{P}(B)$.
L'inclusion est donc stricte dans cet exemple.

Corrigé de l'exercice 13 : Produit cartésien

1. Soit $(x, y) \in E \times F$. On a $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ si et seulement si $x \in A$, $y \in B$, $x \in C$ et $y \in D$. Autrement dit, $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. **Ainsi,**
 $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
2. Soit $(x, y) \in A \times B$. Alors $x \in A \subset A \cup C$ et $y \in B \subset B \cup D$. Le cas $(x, y) \in C \times D$ est identique. **L'inclusion est démontrée.**
3. Le couple $(0, 2)$ vérifie $0 \in A \cup C$ et $2 \in B \cup D$. Cependant, $(0, 2) \notin A \times B$ car $2 \notin B$, et $(0, 2) \notin C \times D$ car $0 \notin C$. **L'inclusion est donc stricte.** Sur la figure de l'énoncé, $(A \cup C) \times (B \cup D)$ contient aussi les deux carrés « croisés » $[0, 1] \times [2, 3]$ et $[2, 3] \times [0, 1]$.
4. Soit $(x, y) \in E \times F$. On a $(x, y) \notin A \times B$ si et seulement si $\neg(x \in A \text{ et } y \in B)$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $y \notin B$. Cela équivaut à $(x, y) \in \bar{A} \times F$ ou $(x, y) \in E \times \bar{B}$.
Le complémentaire de $A \times B$ est donc $(\bar{A} \times F) \cup (E \times \bar{B})$.

Corrigé de l'exercice 14 : Fonctions indicatrices et différence symétrique

1. Les parties $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ et $B \setminus A$ sont disjointes. Pour deux parties disjointes X et Y , on a $1_X 1_Y = 1_{X \cap Y} = 0$, donc $1_{X \cup Y} = 1_X + 1_Y$. Par ailleurs,
 $1_{A \cap \bar{B}} = 1_A (1 - 1_B)$. Ainsi,
 $1_{A \Delta B} = 1_A - 1_A 1_B + 1_B - 1_A 1_B = 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B$.

De plus, une indicatrice ne prend que les valeurs 0 et 1, donc $1_A^2 = 1_A$. En développant,
 $(1_A - 1_B)^2 = 1_A - 2 1_A 1_B + 1_B$. **Les deux formules sont démontrées.**

2. On a $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $1_A \Delta B$ est nulle. D'après la question 1, cela équivaut à $(1_A(x) - 1_B(x))^2 = 0$ pour tout x , donc à $1_A = 1_B$. **Ainsi,**
 $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
3. Soit $x \in E$, $a = 1_A(x)$ et $b = 1_B(x)$. On examine les quatre cas. Si $(a, b) = (0, 0)$, alors $a + b - 2ab = 0$. Si $(a, b) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$, on trouve 1. Si $(a, b) = (1, 1)$, on trouve 0. Or les restes de $a + b$ modulo 2 valent respectivement 0, 1, 1 et 0. **Donc**
 $1_{A \Delta B}(x)$ **est le reste de** $1_A(x) + 1_B(x)$ **modulo 2.**
4. Soit $x \in E$, et a, b, c les valeurs en x des indicatrices de A, B, C . D'après la question 3, $1_{A \Delta B}(x) \equiv a + b \pmod{2}$. En appliquant encore la question 3, puis la compatibilité des congruences avec l'addition, $1_{(A \Delta B) \Delta C}(x) \equiv a + b + c \pmod{2}$. De même,
 $1_A \Delta (B \Delta C)(x) \equiv a + b + c \pmod{2}$. Or ces deux nombres valent 0 ou 1 : congrus modulo 2, ils sont égaux. Les indicatrices coïncident. **Par conséquent,**
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Point de méthode : pour une égalité impliquant beaucoup d'opérations ensemblistes, passer aux indicatrices transforme la preuve en calcul sur 0 et 1.

Corrigé de l'exercice 15 : Recouvrements disjoints et partitions

1. (a) L'élément 2 appartient à $\{1, 2\}$ et à $\{2, 3\}$: les parties ne sont pas disjointes. Ce n'est pas une partition. (b) Les trois parties sont non vides, deux à deux disjointes, et leur réunion vaut E : c'est une partition. (c) C'est un recouvrement disjoint, mais il contient $\emptyset$. **Seule la famille (b) est une partition de E .**
2. Chaque intervalle $[k, k+1[$ contient k , il est donc non vide. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, $k = \lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $k \leq x < k + 1$. Ainsi, x appartient à exactement un intervalle de la famille. **La famille est une partition de $\mathbb{R}$.**
3. Soit $x \in E$. Quatre cas s'excluent mutuellement. Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ seulement. Si $x \in A$ et $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$ seulement. Si $x \notin A$ et $x \in B$, alors $x \in B \setminus A$ seulement. Enfin, si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $x \in \overline{A \cup B}$ seulement. Tout élément de E appartient donc à exactement une des quatre parties : c'est un recouvrement disjoint. **Ce n'est pas toujours une partition** : si $A \subset B$, la partie $A \setminus B$ est

vide.

Corrigé de l'exercice 16 : Image directe et image réciproque

1. Si $x \in [-1, 2]$, alors $0 \leq x^2 \leq 4$. Réciproquement, tout $y \in [0, 4]$ vaut $f(\sqrt{y})$ avec $\sqrt{y} \in [0, 2]$. Donc $f([-1, 2]) = [0, 4]$. Comme f est croissante sur $[0, +\infty[$, $f([1, 3]) = [1, 9]$. Ensuite, $1 \leq x^2 \leq 4$ équivaut à $1 \leq |x| \leq 2$. Par ailleurs, un carré n'est jamais négatif, et $x^2 \leq 4$ équivaut à $|x| \leq 2$. **En résumé :** $f([-1, 2]) = [0, 4]$, $f([1, 3]) = [1, 9]$, $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$, $f^{-1}([-4, -1]) = \emptyset$ et $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$.
2. On a $f(A) = [0, 4]$, donc $f^{-1}(f(A)) = [-2, 2]$, qui contient strictement $A = [0, 2]$. De même, $f^{-1}(B) = [-2, 2]$, donc $f(f^{-1}(B)) = [0, 4]$, strictement inclus dans $B = [-1, 4]$. **Ainsi, $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subsetneq B$.** La première inclusion est stricte car f n'est pas injective ; la seconde, car f n'est pas surjective.
3. On a $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, donc $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$. En revanche, $f(A_1) = f(A_2) = [0, 1]$. **Ainsi, $f(A_1 \cap A_2) = \{0\} \subsetneq [0, 1] = f(A_1) \cap f(A_2)$.**
4. Soit $x \in A$. Alors $g(x) \in g(A)$, donc $x \in g^{-1}(g(A))$. Ensuite, soit $y \in g(g^{-1}(B))$. Il existe $x \in g^{-1}(B)$ tel que $y = g(x)$. Or $x \in g^{-1}(B)$ signifie $g(x) \in B$. **Donc $A \subset g^{-1}(g(A))$ et $g(g^{-1}(B)) \subset B$.**

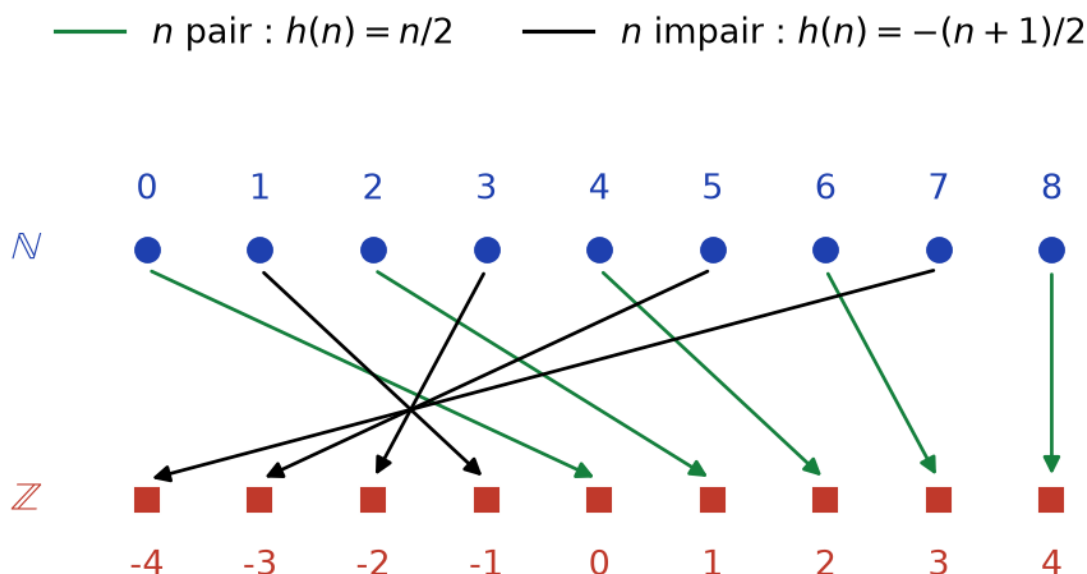
Corrigé de l'exercice 17 : Injections et surjections entre entiers

1. Si $2n = 2n'$, alors $n = n'$: f est injective. En revanche, $2n = 1$ n'a pas de solution entière, donc 1 n'a pas d'antécédent. Pour g , tout $m \in \mathbb{N}$ vérifie $m = g(2m)$, donc g est surjective. Cependant, $g(0) = g(1) = 0$. **Ainsi, f est injective non surjective, et g est surjective non injective.**
2. Pour tout n , $2n$ est pair, donc $g(f(n)) = \frac{2n}{2} = n$. Ainsi, $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$. En revanche, $f(g(n)) = n$ si n est pair et $f(g(n)) = n - 1$ si n est impair. **Donc $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$**

mais $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$, puisque $f(g(1)) = 0$. Ni f ni g n'est bijective : une seule des deux égalités ne suffit pas.

3. On propose $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, avec $k(m) = 2m$ si $m \geq 0$ et $k(m) = -2m - 1$ si $m < 0$. Elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$, car $-2m - 1 \geq 1$ pour $m \leq -1$. Vérifions $h \circ k = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Si $m \geq 0$, $k(m)$ est pair et $h(k(m)) = m$. Si $m < 0$, $k(m)$ est impair et $h(k(m)) = -\frac{-2m-1+1}{2} = m$. Vérifions $k \circ h = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Si n est pair, $h(n) = \frac{n}{2} \geq 0$ et $k(h(n)) = n$. Si n est impair, $h(n) = -\frac{n+1}{2} < 0$ et $k(h(n)) = (n+1) - 1 = n$. **Donc h est bijective, et $h^{-1}(m) = 2m$ si $m \geq 0$, $h^{-1}(m) = -2m - 1$ si $m < 0$.**

La figure ci-dessous représente h : les entiers pairs sont envoyés sur les entiers positifs, les impairs sur les entiers strictement négatifs, et chaque entier relatif reçoit exactement une flèche.



Corrigé de l'exercice 18 : Bijections explicites, restriction et prolongement

1. Pour $x \neq 1$, l'égalité $f(x) = 2$ donnerait $2x + 1 = 2x - 2$, ce qui est impossible. Donc

f est bien à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Soit $y \neq 2$. Pour $x \neq 1$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y(x - 1) \Leftrightarrow x(2 - y) = -y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y + 1}{y - 2}.$$

De plus, ce réel est différent de 1, car $y + 1 = y - 2$ est impossible. Chaque y a donc exactement un antécédent. **Ainsi, f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y + 1}{y - 2}$.**

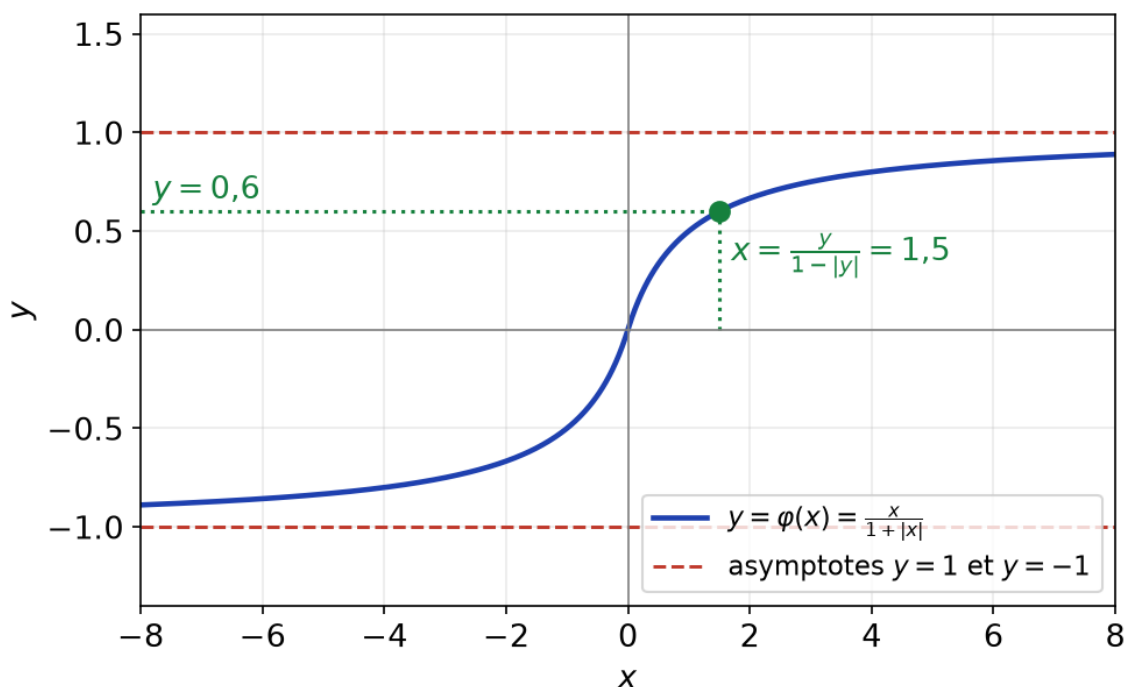
2. D'abord, $|\varphi(x)| = \frac{|x|}{1 + |x|} < 1$, donc φ est à valeurs dans $] -1, 1[$. Soit $y \in] -1, 1[$.

Analyse : si $\varphi(x) = y$, alors x et y sont de même signe, car $1 + |x| > 0$. De plus,

$$|y|(1 + |x|) = |x|, \text{ donc } |x|(1 - |y|) = |y|, \text{ puis } |x| = \frac{|y|}{1 - |y|}.$$

Avec le signe, $x = \frac{y}{1 - |y|}$. Synthèse : pour ce réel, $1 + |x| = \frac{1}{1 - |y|}$, donc

$$\varphi(x) = \frac{y}{1 - |y|} \times (1 - |y|) = y. \text{ Donc } \varphi \text{ est bijective et } \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$



3. On a $u(0) = u(2) = 0$, donc u n'est pas injective. Par ailleurs,

$u(x) = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$, donc -2 n'a pas d'antécédent : u n'est pas surjective. Notons v l'application de $[1, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$ définie par $v(x) = u(x)$; elle est bien définie car $u \geq -1$. Soit $y \geq -1$. Pour $x \geq 1$, $v(x) = y$ équivaut à $(x - 1)^2 = y + 1$. Comme $x - 1 \geq 0$, cela équivaut à $x - 1 = \sqrt{y + 1}$. **Donc v est bijective et $v^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y + 1}$.**

4. Analyse : soit g un prolongement impair de la racine carrée. Pour $x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{x}$. Pour $x < 0$, l'impairité donne $g(x) = -g(-x) = -\sqrt{-x}$. Donc g est unique. Synthèse :

définissons g ainsi. Pour $x > 0$, $g(-x) = -\sqrt{x} = -g(x)$. Pour $x < 0$, $g(-x) = \sqrt{-x} = -g(x)$. Enfin, $g(0) = 0$. **L'unique prolongement impair est**
 $g(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $g(x) = -\sqrt{-x}$ si $x < 0$.

Corrigé de l'exercice 19 : Composition et réciproque d'une composée

1. Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. En appliquant g , on obtient $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. L'injectivité de $g \circ f$ donne alors $x = x'$. **Donc f est injective.**
2. Soit $z \in G$. Par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. Ainsi, $y = f(x)$ est un antécédent de z par g . **Donc g est surjective.**
3. Prenons $E = G = \{0\}$, $F = \{0, 1\}$, $f(0) = 0$, et g constante égale à 0 . Alors $g \circ f$ est l'identité de $\{0\}$, donc elle est bijective. Cependant, f n'est pas surjective, car 1 n'a pas d'antécédent. De plus, g n'est pas injective, car $g(0) = g(1)$. **Cet exemple répond à la question.**
4. Par associativité, $u \circ (u \circ u) = (u \circ u) \circ u = u \circ u \circ u = \text{id}_E$. L'application $v = u \circ u$ vérifie donc $u \circ v = \text{id}_E$ et $v \circ u = \text{id}_E$. D'après le théorème de caractérisation des bijections, **u est bijective et $u^{-1} = u \circ u$.**
5. D'une part, $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^3$. Comme $t \rightarrow t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $(2x + 1)^3 = y$ équivaut à $2x + 1 = \sqrt[3]{y}$, donc à $x = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{2}$. D'autre part, $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ et $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Ainsi, $(f^{-1} \circ g^{-1})(y) = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{2}$. **Les deux méthodes donnent $(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{2}$.** L'ordre compte : $g^{-1} \circ f^{-1}$ donnerait $\sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$, qui est différent.

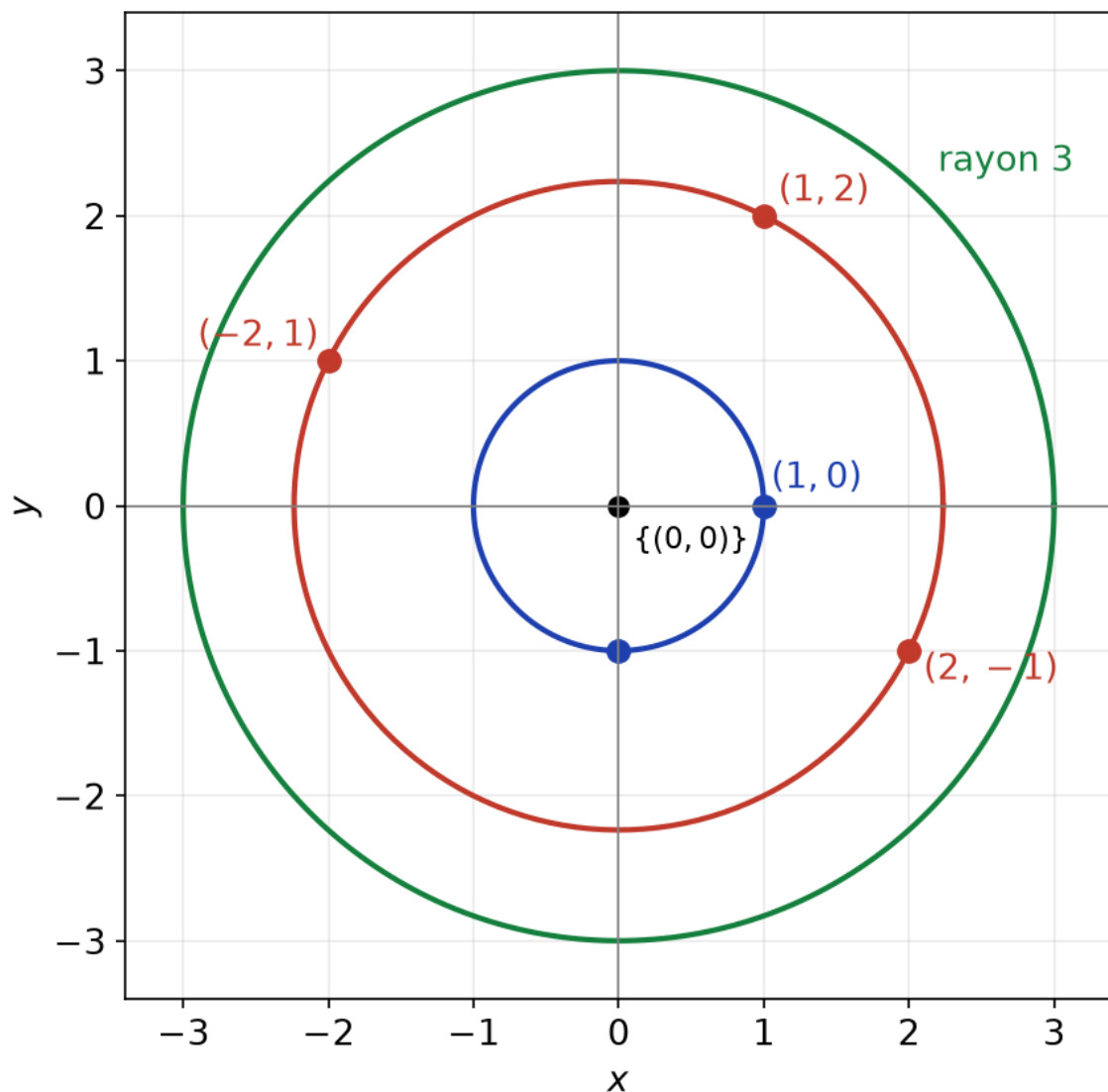
Corrigé de l'exercice 20 : Caractérisations par les images

- Supposons f injective et soit $A \subset E$. L'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est toujours vraie (exercice 16). Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$: il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité, $x = a \in A$. Réciproquement, supposons la propriété vraie pour toute partie. Soit x, x' tels que $f(x) = f(x')$. Avec $A = \{x\}$, on obtient $x' \in f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(f(A)) = \{x\}$. **Donc $x' = x$, et l'équivalence est démontrée.**
- Supposons f surjective et soit $B \subset F$. L'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ est toujours vraie. Soit $y \in B$. Par surjectivité, il existe x tel que $y = f(x)$. Alors $x \in f^{-1}(B)$, donc $y \in f(f^{-1}(B))$. Réciproquement, prenons $B = F$: on a $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$. **Ainsi, f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour tout B .**
- D'abord, $A \cap A' \subset A$ entraîne $f(A \cap A') \subset f(A)$, et de même pour A' . L'inclusion $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ est donc toujours vraie. Supposons f injective. Soit $y \in f(A) \cap f(A')$: $y = f(a) = f(a')$ avec $a \in A$ et $a' \in A'$. Par injectivité, $a = a' \in A \cap A'$, donc $y \in f(A \cap A')$. Réciproquement, supposons l'égalité toujours vraie, et soit $f(x) = f(x')$. Avec $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$, on a $f(x) \in f(A) \cap f(A') = f(\{x\} \cap \{x'\})$. Ainsi, $\{x\} \cap \{x'\}$ est non vide. **Donc $x = x'$, et f est injective.**

Point de méthode : pour exploiter une propriété vraie « pour toute partie », on la teste sur des singletons ou sur l'ensemble tout entier.

Corrigé de l'exercice 21 : Relation d'équivalence et cercles

- Posons $N(x, y) = x^2 + y^2$. La relation s'écrit $N(x, y) = N(x', y')$. Elle hérite donc des propriétés de l'égalité. Elle est réflexive, car $N(x, y) = N(x, y)$. Elle est symétrique, car l'égalité l'est. Enfin, elle est transitive : si $N(p) = N(q)$ et $N(q) = N(r)$, alors $N(p) = N(r)$. **C'est une relation d'équivalence.**
- Soit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. La classe de (a, b) est l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = r^2$. **C'est le cercle de centre O et de rayon r si $r > 0$, et la classe de $(0, 0)$ est $\{(0, 0)\}$.** Pour $(1, 2)$, on a $r = \sqrt{5}$. Par exemple, $(2, 1)$, $(-2, 1)$ et $(2, -1)$ sont dans la classe, car leurs coordonnées au carré ont pour somme 5.



3. Notons Φ l'application qui à la classe de (a, b) associe $\sqrt{a^2 + b^2}$. Elle est bien définie : deux points de la même classe ont la même valeur de N , donc le même rayon. Elle est injective : deux classes de même rayon r contiennent des points vérifiant $N = r^2$, donc elles sont égales. Elle est surjective : tout $r \geq 0$ est l'image de la classe de $(r, 0)$. **Ainsi, Φ est une bijection de l'ensemble des classes sur $[0, +\infty[$.**
4. La relation $\mathcal{S}$ est réflexive, car $|x - x| = 0 \leq 1$, et symétrique, car $|x - y| = |y - x|$. En revanche, $0 \mathcal{S} 1$ et $1 \mathcal{S} 2$, mais $|0 - 2| = 2 > 1$. **$\mathcal{S}$ n'est pas transitive, donc ce n'est pas une relation d'équivalence.**

Corrigé de l'exercice 22 : Congruences et sommes de deux

carrés

- Réflexivité : n divise $a - a = 0$. Symétrie : si $b - a = kn$, alors $a - b = (-k)n$.
Transitivité : si $b - a = kn$ et $c - b = ln$, alors $c - a = (k + l)n$. C'est donc une relation d'équivalence. Pour $n = 4$, la division euclidienne écrit tout entier $a = 4q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, d'où $a \equiv r \pmod{4}$. De plus, deux restes distincts r et r' de $\{0, 1, 2, 3\}$ vérifient $0 < |r - r'| < 4$: ils ne sont pas congrus. **Il y a exactement quatre classes : $4\mathbb{Z}$, $1 + 4\mathbb{Z}$, $2 + 4\mathbb{Z}$ et $3 + 4\mathbb{Z}$.**

- Écrivons $b - a = kn$ et $d - c = ln$. D'une part, $(b + d) - (a + c) = (k + l)n$.
D'autre part,

$$bd - ac = b(d - c) + c(b - a) = (bl + ck)n.$$

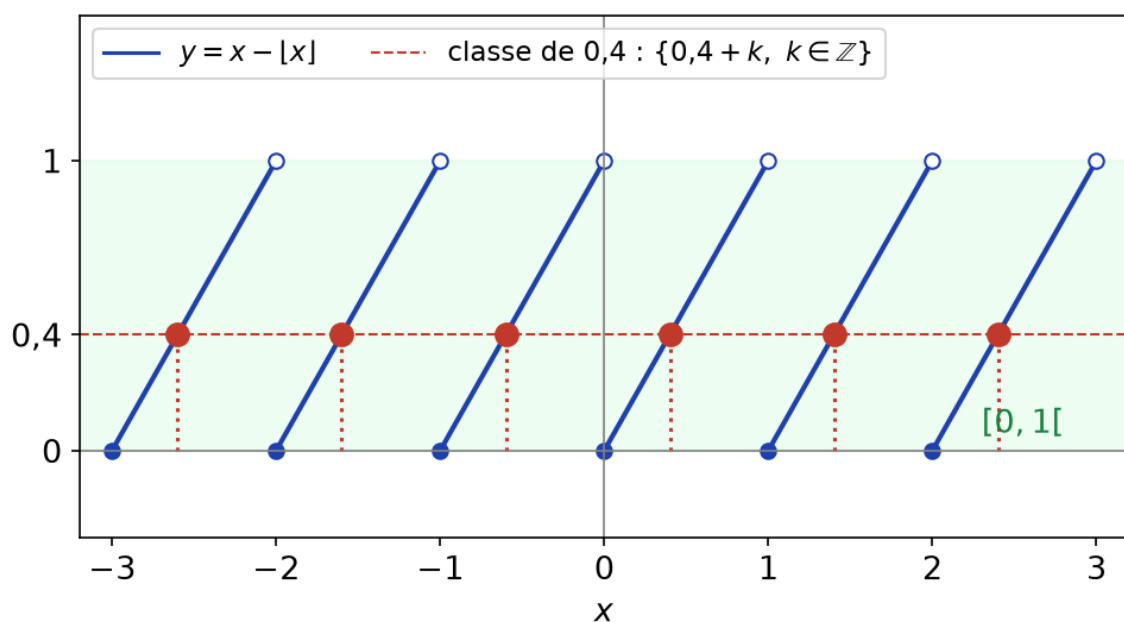
Donc $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ **et** $ac \equiv bd \pmod{n}$.

- Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $a \equiv r \pmod{4}$. Par compatibilité avec le produit,
 $a^2 \equiv r^2 \pmod{4}$. Or $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4 \equiv 0$ et $3^2 = 9 \equiv 1$. **Ainsi, $a^2 \equiv 0$ ou $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$.**
- Si $2027 = x^2 + y^2$, alors $x^2 + y^2$ serait congru à $0 + 0$, $0 + 1$ ou $1 + 1$ modulo 4, c'est-à-dire à 0 , 1 ou 2 . Or $2027 = 4 \times 506 + 3$, donc $2027 \equiv 3 \pmod{4}$. **Par conséquent, 2027 n'est pas la somme de deux carrés d'entiers.**

- On a $10 - 1 = 9$, donc $10 \equiv 1 \pmod{9}$. Par récurrence et compatibilité avec le produit, $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $N = \sum_{k=0}^p c_k 10^k$ l'écriture décimale d'un entier. Par compatibilité,
 $N \equiv \sum_{k=0}^p c_k \pmod{9}$. Pour 2027, la somme des chiffres vaut 11, et $11 \equiv 2 \pmod{9}$. **Ainsi, $2027 \equiv 2 \pmod{9}$, ce que confirme $2027 = 9 \times 225 + 2$.**

Corrigé de l'exercice 23 : Classes modulo $\mathbb{Z}$ et partie entière

- On a $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$. Ensuite, si $x - y \in \mathbb{Z}$, alors $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$. Enfin, si $x - y$ et $y - z$ sont entiers, leur somme $x - z$ l'est aussi. **Donc $\sim$ est une relation d'équivalence, et la classe de a est $\left\{ \begin{smallmatrix} a \\ k \end{smallmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.**
- Analyse : soit t un élément de la classe de x dans $[0, 1[$. Alors $t = x + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $0 \leq x + k < 1$. Ainsi, $-k \leq x < -k + 1$, donc $-k = \lfloor x \rfloor$ par unicité de la partie entière. Par conséquent, $t = x - \lfloor x \rfloor$: il y a au plus un tel élément. Synthèse : posons $t = x - \lfloor x \rfloor$. D'une part, $x - t = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, donc $t \sim x$. D'autre part, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donne $0 \leq t < 1$. **Chaque classe contient exactement un élément de $[0, 1[$: pour la classe de x , c'est $x - \lfloor x \rfloor$.**

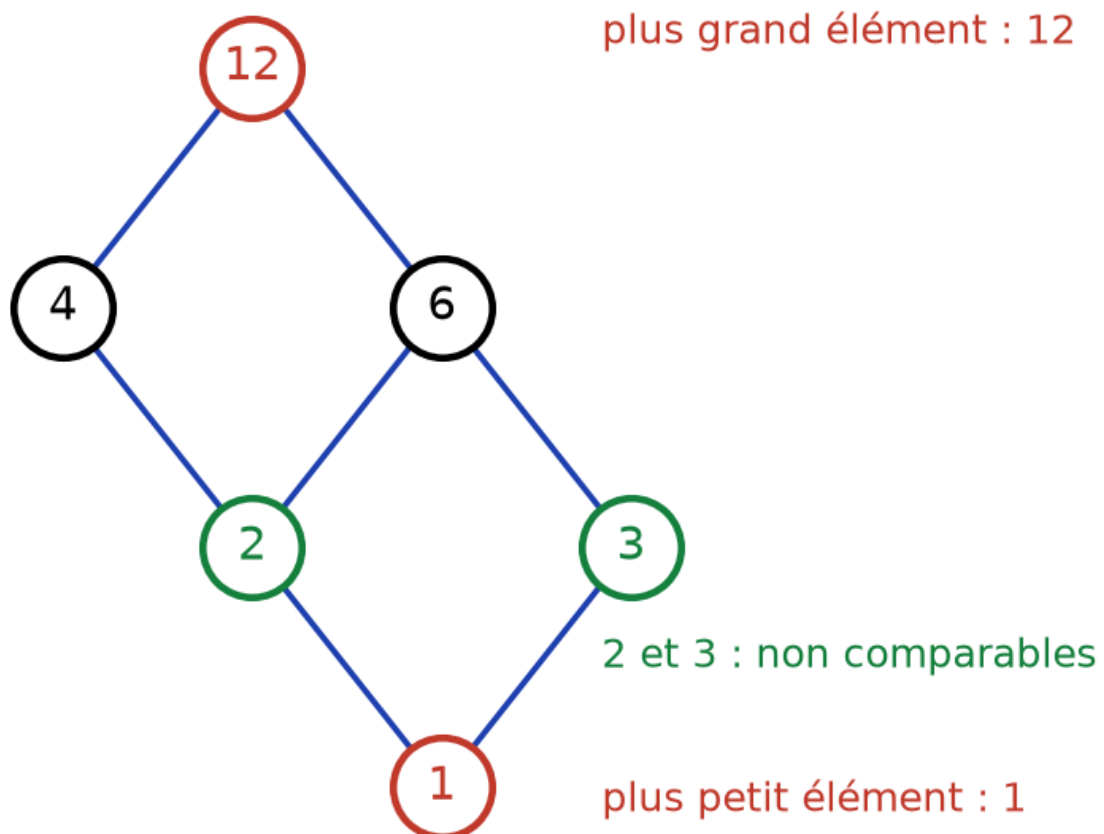


- Notons $\psi(a) = \text{cl}(a)$ pour $a \in [0, 1[$. Soit C une classe et $x \in C$. Le réel $a = x - \lfloor x \rfloor$ appartient à $[0, 1[$ et à C , donc $\psi(a) = C$: ψ est surjective. Ensuite, si $\psi(a) = \psi(b)$, alors a et b sont deux éléments de $[0, 1[$ dans la même classe. D'après la question 2, $a = b$. **Ainsi, ψ est une bijection de $[0, 1[$ sur l'ensemble des classes.** La figure ci-dessus l'illustre : la droite horizontale d'ordonnée $0,4$ coupe la dent de scie exactement aux points de la classe de $0,4$.
- Supposons f compatible avec $\sim$. Comme $x \sim x + 1$, on a $f(x + 1) = f(x)$: f est 1-périodique. Réciproquement, soit f une fonction 1-périodique. Par récurrence, $f(x + k) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a aussi

$f(x) = f((x - k) + k) = f(x - k)$. Donc $f(x + k) = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si $x \sim y$, alors $y = x + k$ avec k entier, et $f(y) = f(x)$. **Les fonctions cherchées sont exactement les fonctions 1-périodiques**, par exemple $x \rightarrow \cos(2\pi x)$ ou $x \rightarrow x - \lfloor x \rfloor$.

Corrigé de l'exercice 24 : Ordre de divisibilité et ordres sur le plan

- Réflexivité : $a = 1 \times a$, donc a divise a . Transitivité : si $b = ka$ et $c = lb$, alors $c = (lk)a$. Antisymétrie : si $b = ka$ et $a = lb$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, alors $a = lka$, donc $lk = 1$. Comme k et l sont des entiers naturels, $k = l = 1$ et $a = b$. C'est donc une relation d'ordre. Elle n'est pas totale : 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2. **Sur $\mathbb{Z}$, ce n'est plus une relation d'ordre**, car 2 divise -2 et -2 divise 2 alors que $2 \neq -2$.
- On a $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Le schéma ci-dessous relie deux diviseurs quand l'un s'obtient à partir de l'autre en multipliant par un nombre premier. L'entier 1 divise tous les éléments de D , et chaque élément de D divise 12. **Le plus petit élément de D est 1 et le plus grand est 12**. En revanche, 2 et 3, ou 4 et 6, ne sont pas comparables.



3. Réflexivité : $x \leq x$ et $y \leq y$. Antisymétrie : si $x \leq x' \leq x$ et $y \leq y' \leq y$, alors $x = x'$ et $y = y'$. Transitivité : elle découle de celle de $\leq$ sur chaque coordonnée. C'est donc un ordre. Cependant, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables : on n'a ni $0 \leq 1$ et $1 \leq 0$, ni l'inverse. **C'est une relation d'ordre partiel.**
4. Réflexivité : $x = x$ et $y \leq y$. Antisymétrie : supposons $(x, y) \leq (x', y')$ et $(x', y') \leq (x, y)$. Si l'on avait $x < x'$, la seconde relation exigerait $x' \leq x$, ce qui est impossible. Donc $x = x'$, puis $y \leq y'$ et $y' \leq y$, d'où $y = y'$. Transitivité : supposons $(x, y) \leq (x', y') \leq (x'', y'')$. On a $x \leq x' \leq x''$. Si l'une des deux inégalités est stricte, alors $x < x''$. Sinon, $x = x' = x''$ et $y \leq y' \leq y''$. Totalité : si $x \neq x'$, le couple de plus petite abscisse est inférieur à l'autre ; si $x = x'$, on compare y et y' , ce qui est toujours possible dans $\mathbb{R}$. **L'ordre lexicographique est un ordre total sur $\mathbb{R}^2$.**

Corrigé de l'exercice 25 : Problème sur les parties d'un ensemble et le théorème de Cantor

Partie A.

1. Soit $A, B \subset E$ tels que $1_A = 1_B$. Alors

$$A = \left\{ x \in E \mid 1_A(x) = 1 \right\} = \left\{ x \in E \mid 1_B(x) = 1 \right\} = B. \text{ Donc } \Phi \text{ est injective.}$$

2. Soit $x \in E$. On a $1_{A_u}(x) = 1$ si et seulement si $x \in A_u$, c'est-à-dire $u(x) = 1$. Sinon, $1_{A_u}(x) = 0$ et $u(x) = 0$, puisque u est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Ainsi, $1_{A_u} = u$, donc $u = \Phi(A_u)$: Φ est surjective. **Par conséquent, Φ est bijective et $\Phi^{-1}(u) = u^{-1}(\{1\})$.**

Partie B.

1. Notons $\mathcal{P}_a$ l'ensemble des parties de E' contenant a , et $\sigma(A) = A \cup \{a\}$. Pour $A \subset E'$, $\sigma(A)$ est une partie de E' qui contient a . Injectivité : comme $a \notin A$, on a $A = \sigma(A) \setminus \{a\}$. Donc $\sigma(A) = \sigma(A')$ entraîne $A = A'$. Surjectivité : si $X \in \mathcal{P}_a$, alors $X \setminus \{a\} \subset E$ et $\sigma(X \setminus \{a\}) = X$. **Ainsi, σ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}_a$.**
2. Notons $\mathcal{H}(n)$: « tout ensemble à n éléments possède 2^n parties ». Initialisation : l'ensemble vide a une seule partie, lui-même, et $2^0 = 1$. Hérédité : soit E' un ensemble à $n+1$ éléments, $a \in E'$ et $E = E' \setminus \{a\}$, qui a n éléments. Les parties de E' se répartissent en deux groupes disjoints. Celles qui ne contiennent pas a sont les parties de E : il y en a 2^n . Celles qui contiennent a sont en bijection avec $\mathcal{P}(E)$ d'après la question 1 : il y en a aussi 2^n . **Au total, E' a 2^{n+1} parties, et la propriété est démontrée par récurrence.**

Partie C.

1. Si $\{x\} = \{x'\}$, alors $x \in \{x'\}$, donc $x = x'$. **L'application $x \rightarrow \{x\}$ est injective.**
2. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = D$. Raisonnons par disjonction des cas. Si $a \in D$, alors, par définition de D , $a \notin f(a) = D$: contradiction. Si $a \notin D$, alors $a \notin f(a)$, donc $a \in D$ par définition : contradiction. **Ainsi, D n'a aucun antécédent par f .**
3. La partie D appartient à $\mathcal{P}(E)$ et n'est pas atteinte par f . Ceci vaut pour toute application f . **Il n'existe donc aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$** : c'est le théorème de Cantor.
4. Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. D'après la partie A, Φ^{-1} est une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. La composée $\Phi^{-1} \circ s$ est alors une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ce qui contredit la question 3. **Il n'existe aucune surjection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.**

Point de méthode : l'ensemble D est construit pour différer de chaque $f(x)$ en l'élément x lui-même ; c'est l'argument diagonal, qui revient souvent aux concours.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [logique, ensembles et applications, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur logique, ensembles et applications](#)
- Chapitre suivant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)