

Limites et continuité

Exercice 1 : Limites par encadrement et par composition

Déterminez les limites suivantes, en justifiant chaque étape.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + 2}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, en étudiant séparément $x > 0$ et $x < 0$.

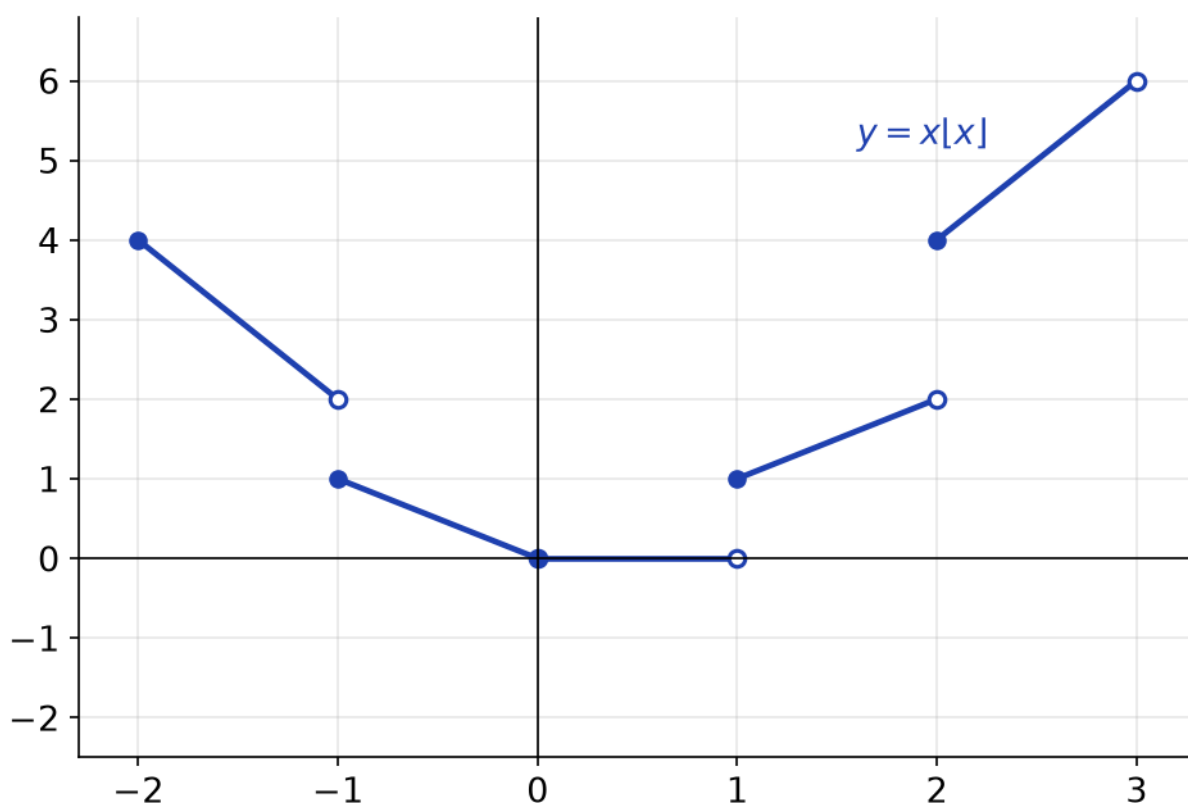
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x}$, en utilisant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

5. Montrez, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = +\infty$: pour $A > 0$, trouvez un η explicite.

6. Soit f définie sur D et a adhérent à D . Démontrez que si f tend vers ℓ et vers ℓ' en a , avec ℓ et ℓ' réels, alors $\ell = \ell'$.

Exercice 2 : Limites à gauche et à droite

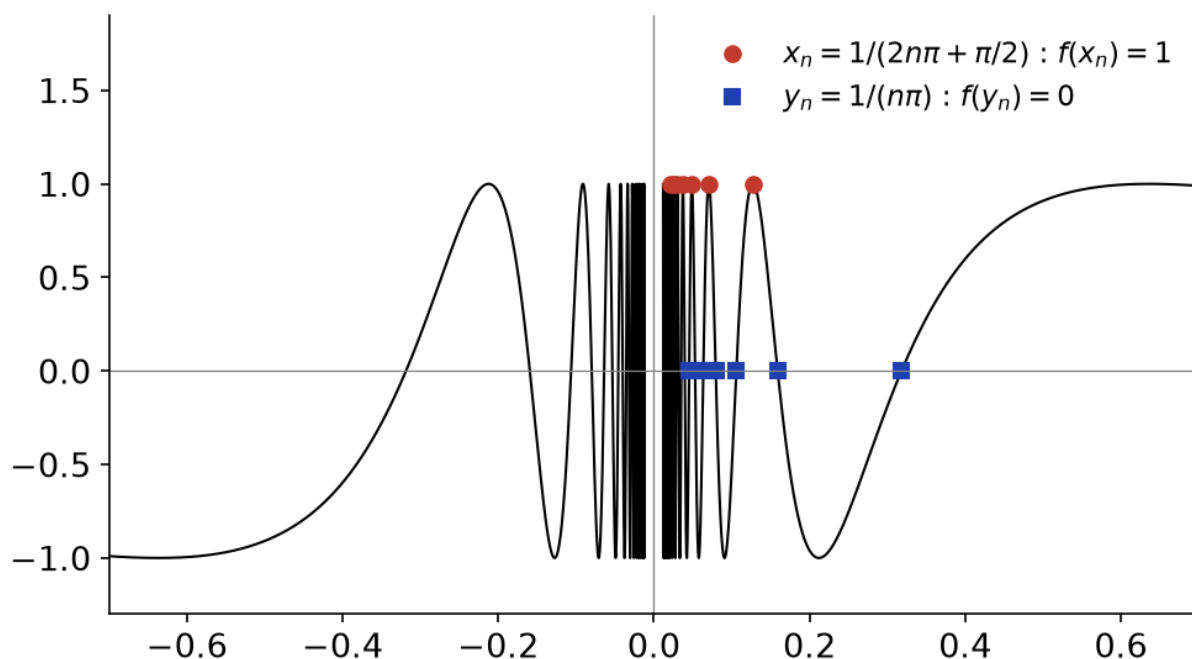
On considère la fonction $f : x \rightarrow x \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$, représentée ci-dessous.



1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculez $f(n)$, $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x)$.
2. En déduire l'ensemble des points où f est continue. Est-elle continue à droite partout ?
3. Étudiez les limites à gauche et à droite en 1 de $g : x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$. La fonction g admet-elle une limite en 1 ?
4. Étudiez les limites à gauche et à droite en 0 de $h : x \rightarrow e^{1/x}$.

Exercice 3 : Absence de limite par la caractérisation séquentielle

La figure ci-dessous représente $x \rightarrow \sin(1/x)$ au voisinage de 0, avec deux suites de points.



1. Montrez que $x \rightarrow \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.
2. Montrez que $x \rightarrow \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Montrez que $x \rightarrow x - \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en $+\infty$.
4. Soit $1_{\mathbb{Q}}$ la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrez qu'elle n'a de limite en aucun point $a \in \mathbb{R}$, puis qu'elle n'est continue en aucun point.
5. La fonction $x \rightarrow x 1_{\mathbb{Q}}(x)$ est-elle continue en 0 ? En un point $a \neq 0$?

Exercice 4 : Prolongements par continuité

Dites si chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}^*$, est prolongeable par continuité en 0. Le cas échéant, donnez la valeur du prolongement.

1. $f_1(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

2. $f_2(x) = x \ln|x|$.
3. $f_3(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
4. $f_4(x) = \frac{\sin x}{|x|}$.
5. Déterminez les réels a et b pour lesquels la fonction φ suivante est continue sur $\mathbb{R}$:
 $\varphi(x) = e^x$ si $x \leq 0$, $\varphi(x) = ax + b$ si $0 < x < 1$, et $\varphi(x) = 3 + \ln x$ si $x \geq 1$.

Exercice 5 : Fonctions croissantes et sauts

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Justifiez que, pour tout $x \in]0, 1[$, les limites $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent, et que $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$. Montrez aussi que $f(x^+) \leq f(y^-)$ pour $0 < x < y < 1$.
2. On pose $s(x) = f(x^+) - f(x^-)$, le saut de f en x . Montrez que f est continue en x si et seulement si $s(x) = 0$.
3. Soit $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ des points de $]0, 1[$. Montrez que $\sum_{i=1}^p s(x_i) \leq f(1) - f(0)$.
4. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble des $x \in]0, 1[$ tels que $s(x) \geq 1/n$ est fini, de cardinal au plus $n(f(1) - f(0))$.
5. On définit g sur $[0, 1]$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}$ pour $x > 0$. Montrez que g est croissante, continue en 0, et discontinue en chaque point $1/k$ avec $k \geq 2$ entier. Calculez le saut en $1/k$.

Exercice 6 : Équation fonctionnelle de Cauchy

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y . On pose $a = f(1)$.

1. Montrez que $f(0) = 0$ et que f est impaire.
2. Montrez que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout réel x .
3. En déduire que $f(r) = ar$ pour tout rationnel r .
4. Conclure, à l'aide de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et de la caractérisation séquentielle, que $f(x) = ax$ pour tout réel x .
5. Montrez que, pour une fonction vérifiant l'équation, la continuité en 0 suffit à entraîner la continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Fonctions invariantes par dilatation

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x . Montrez que f est constante.
2. Donnez une fonction non constante qui vérifie $f(2x) = f(x)$ pour tout x . Où n'est-elle pas continue ?
3. Déterminez toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $g(2x) = g(x) + x$ pour tout réel x . On pourra étudier $x \rightarrow g(x) - x$.

Exercice 8 : Existence de solutions par le TVI

1. Soit $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Calculez $P(-2)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$. En déduire que P admet exactement trois racines réelles, et localisez chacune entre deux entiers consécutifs.
2. Montrez que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans $[0, \pi/2]$.

3. Montrez que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 9 : Points fixes et intersections de courbes

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Montrez que f admet un point fixe, c'est-à-dire un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Montrez que ce résultat tombe en défaut sur $[0, 1[$ et sur $\mathbb{R}$, à l'aide de contre-exemples.
3. Soit f et g continues sur $[a, b]$ telles que $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Montrez que les courbes de f et g se coupent.
4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et décroissante. Montrez que le point fixe de f est unique.

Exercice 10 : Méthode de dichotomie

On pose $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α , et que $\alpha \in]0, 1[$.
2. On pose $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ puis, pour $m_n = (a_n + b_n)/2$: si $f(m_n) < 0$, $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$. Montrez que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ et $b_n - a_n = 2^{-n}$ pour tout n .
3. Montrez que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers α .
4. Calculez a_n et b_n pour $n \leq 4$.
5. Combien d'étapes suffisent pour que m_n approche α à 10^{-3} près ?

Exercice 11 : Fonctions continues et bornes atteintes

1. Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x . Montrez qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a, b]$. Le résultat subsiste-t-il sur $]0, 1]$?
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrez que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrez que f est bornée. Montrez ensuite que, s'il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$, alors f admet un maximum.
4. Appliquez la question précédente à $x \rightarrow x e^{-x}$ et calculez ce maximum.

Exercice 12 : Images d'intervalles

1. Déterminez l'image de $[-1, 2]$ par $x \rightarrow x^2 - 2x$.
2. Déterminez l'image de $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \frac{x}{1+x^2}$.
3. Déterminez $\sin(]0, 2\pi[)$ et $\varphi(]0, 1])$ pour $\varphi(x) = 1/x$. Quelles propriétés de l'intervalle de départ ne sont pas conservées ?
4. Existe-t-il une fonction continue sur $[0, 1]$ dont l'image est $]0, 1]$? Et une fonction continue sur $]0, 1]$ dont l'image est $]0, 1]$?

Exercice 13 : Une bijection et sa réciproque

On pose $f(x) = x + e^x$ pour x réel.

1. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque.

- Justifiez que g est continue et strictement croissante. Calculez $g(1)$ et $g(1+e)$.
- Déterminez les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Montrez que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{\ln y} = 1$.
- Montrez que $\lim_{y \rightarrow -\infty} (g(y) - y) = 0$.

Exercice 14 : Réciproque de la tangente hyperbolique

On rappelle que $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

- Montrez que th est impaire, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et calculez ses limites en $\pm\infty$.
- En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
- Résolvez $\operatorname{th}(x) = y$ pour $y \in J$ et donnez une expression explicite de la réciproque argth .
- Vérifiez sur cette formule que argth est continue, strictement croissante, impaire, et calculez ses limites aux bornes de J .

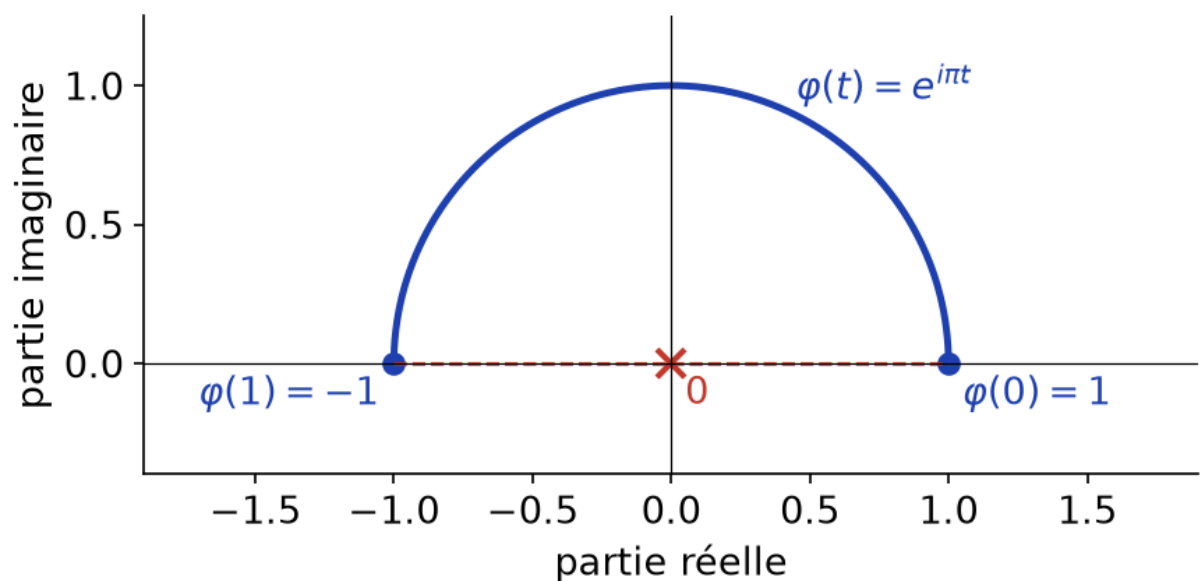
Exercice 15 : Injections continues

- Soit f continue et injective sur un intervalle I . Soit $x < y$ et $x' < y'$ dans I . On pose, pour $t \in [0, 1]$, $x_t = (1-t)x + tx'$, $y_t = (1-t)y + ty'$ et $\varphi(t) = f(y_t) - f(x_t)$. Montrez que φ ne s'annule pas sur $[0, 1]$. En déduire que $f(y) - f(x)$ et $f(y') - f(x')$ ont le même signe, puis que f est strictement monotone.
- Montrez qu'il n'existe aucune fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = -\operatorname{id}_{\mathbb{R}}$.

- Montrez qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$, ni de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$.
- Vérifiez que $x \rightarrow \frac{1 + \sin(2\pi x)}{2}$ est une surjection continue de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$.

Exercice 16 : Fonctions à valeurs complexes

- Montrez que $t \rightarrow e^{it}$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais que $t \rightarrow \frac{e^{it}}{t}$ tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrez que $h : t \rightarrow \frac{e^{it} - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et donnez la valeur du prolongement.
- Soit $\varphi(t) = e^{i\pi t}$ sur $[0, 1]$, dont l'image est tracée ci-dessous. Calculez $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $|\varphi(t)|$. Que peut-on dire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions à valeurs complexes ?
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrez que f est bornée et qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $|f(c)| = \max_{[a, b]} |f|$.



Exercice 17 : Théorème de la corde universelle

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ pour $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Calculez $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $c \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$. Interprétez ce résultat en termes de corde horizontale.
3. Soit $a \in]0, 1[$ tel que $1/a$ ne soit pas entier. On pose $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right)$. Montrez que $f(0) = f(1)$ et que $f(x+a) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1-a]$.
4. Conclusion : pour quelles longueurs $a \in]0, 1[$ toute fonction continue avec $f(0) = f(1)$ admet-elle une corde horizontale de longueur a ?

Exercice 18 : Fonctions continues périodiques

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique.

1. Montrez que $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$. En déduire que f est bornée et atteint ses bornes.
2. On suppose de plus que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrez que f est constante.
3. Soit f et g continues et T -périodiques telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Montrez que $f = g$.
4. La fonction $x \rightarrow x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. Est-elle bornée ? Atteint-elle ses bornes ? Commentez.

Exercice 19 : Problème : une suite définie par des racines

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour $x \geq 0$.

1. Montrez que f_n s'annule en un unique point u_n de $[0, +\infty[$, et que $u_n \in]0, 1[$.
2. Calculez u_1 et u_2 .
3. Calculez $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n et en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. Montrez que (u_n) converge vers une limite $\ell \in]0, 1]$.
5. En raisonnant par l'absurde, montrez que $\ell = 1$.
6. À l'aide de l'inégalité de Bernoulli $(1 - \varepsilon)^n \geq 1 - n\varepsilon$ pour $\varepsilon \in [0, 1]$, montrez que $u_n \leq \frac{n}{n+1}$. Vérifiez cette inégalité pour $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 20 : Monotonie et image d'un intervalle

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $f(I)$ soit un intervalle.

1. Soit a un point intérieur à I . On suppose $f(a^-) < f(a^+)$. Montrez qu'il existe un réel y de $]f(a^-), f(a^+)[$, distinct de $f(a)$, qui n'appartient pas à $f(I)$. En déduire une contradiction, puis que f est continue en a .
2. Adaptez l'argument lorsque a est une extrémité de I appartenant à I . Conclure que f est continue sur I .
3. En déduire une nouvelle preuve de la continuité de la réciproque d'une bijection continue strictement croissante d'un intervalle I sur un intervalle J .
4. Soit f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = x$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x + 1$ si $x > 1$. Vérifiez que f est strictement croissante et discontinue, et déterminez $f([0, 2])$.

5. On pose $h(0) = 0$ et $h(x) = \sin(1/x)$ pour $x \in]0, 1]$. Montrez que h transforme tout intervalle en intervalle, mais n'est pas continue. Quelle hypothèse manque ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [limites et continuité, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et suites numériques](#)
- Chapitre précédent : [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Chapitre suivant : [Dérivabilité et convexité](#)
- Le même thème en L1 : [limites et continuité, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)