

Limites et continuité

Exercice 1 : Limites par epsilon-delta

Démontrer chacune des limites suivantes en revenant à la définition epsilon-delta, c'est-à-dire en donnant explicitement un δ en fonction de ε .

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.
2. $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$, la fonction étant définie sur $]0, +\infty[$.

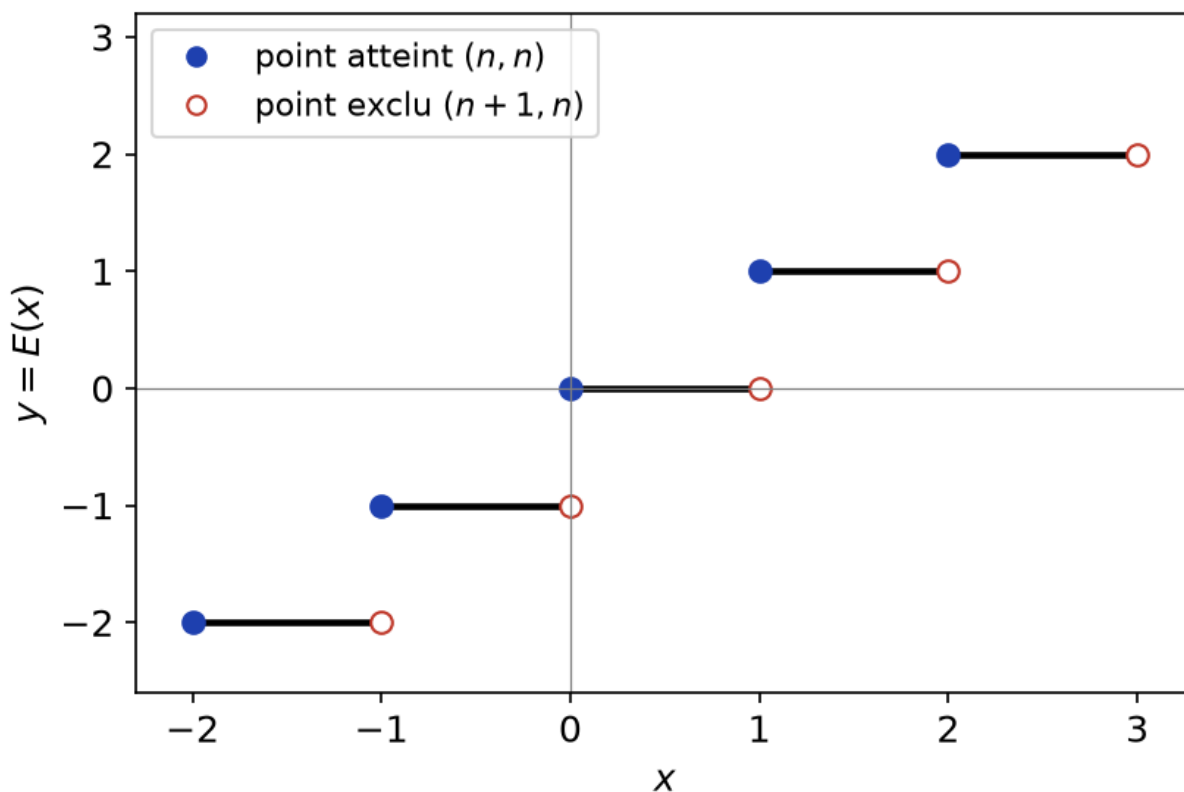
Exercice 2 : Limites en l'infini et limites infinies

Revenir aux définitions avec des quantificateurs pour établir les résultats suivants.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+3} = 2$, en donnant un seuil A en fonction de ε .
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
4. La fonction $x \rightarrow 1/x$, définie sur $\mathbb{R}^*$, admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 3 : Limites à gauche et à droite

On note E la fonction partie entière, dont la courbe est représentée ci-dessous.



1. Étudier les limites à gauche et à droite en 1 de $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction f a-t-elle une limite en 1 ?
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer les limites à gauche et à droite de E en n . En quels points E est-elle continue ?
3. Pour $x \neq 0$, on pose $g(x) = x E(1/x)$. Montrer que $1 - x < g(x) \leq 1$ pour $x > 0$ et que $1 \leq g(x) < 1 - x$ pour $x < 0$.
4. En déduire les limites à gauche et à droite de g en 0. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 4 : Fonctions monotones et limites latérales

Soit $b < c$ deux réels, f une fonction croissante sur $]b, c[$ et $x_0 \in]b, c[$. On se propose de démontrer le théorème de la limite monotone à partir de la borne supérieure.

1. Justifier que $\ell^- = \sup \{ f(x) \mid b < x < x_0 \}$ existe et que $\ell^- \leq f(x_0)$.
2. Montrer, avec des quantificateurs, que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$.
3. Énoncer sans démonstration le résultat analogue à droite, avec $\ell^+ = \inf \{ f(x) \mid x_0 < x < c \}$, et en déduire $\ell^- \leq f(x_0) \leq \ell^+$.
4. Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si $\ell^- = \ell^+$.
5. Application : on pose $h(x) = x + E(x)$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que h est croissante, puis calculer $h(n^-)$, $h(n)$ et $h(n^+)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Où h est-elle continue ?

Exercice 5 : Absence de limite par les suites

On utilise la caractérisation séquentielle de la limite.

1. Montrer que $x \rightarrow \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.
2. Montrer que $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Montrer que $x \rightarrow x \sin x$ n'a de limite ni finie ni infinie en $+\infty$.
4. Montrer que $x \rightarrow \cos(x) e^x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 6 : Fonction indicatrice des rationnels

On note $1_{\mathbb{Q}}$ la fonction qui vaut 1 en tout rationnel et 0 en tout irrationnel. On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Construire une suite de rationnels et une suite d'irrationnels qui convergent vers a .
2. En déduire que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.
3. Montrer que $g : x \rightarrow x 1_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0 et en aucun autre point.
4. Proposer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est continue en 1 et en 2, et en aucun autre point.

Exercice 7 : Opérations et composition de limites

Calculer les limites suivantes en justifiant chaque étape par les théorèmes d'opérations, de composition ou d'encadrement. On admet que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x - \sin x}$.

Exercice 8 : Prolongements par continuité

Dire si chacune des fonctions suivantes est prolongeable par continuité au point indiqué et, si oui, donner la valeur du prolongement.

1. $k(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ en 2.
2. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0. Le prolongement obtenu est-il continu sur $\mathbb{R}$?
3. $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ en 0 (on pourra utiliser $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$).
4. $h(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ en 0.

Exercice 9 : Signe au voisinage d'un point

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose f continue en a et $f(a) > 0$. Montrer, en choisissant bien ε , qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq \frac{f(a)}{2}$ pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$.
2. Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(r) = g(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. En appliquant la question 1 à $|f - g|$, montrer que $f = g$.
3. Retrouver le résultat de la question 2 à l'aide de la caractérisation séquentielle.

Exercice 10 : Équation fonctionnelle de Cauchy

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y . On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$, que $f(-x) = -f(x)$ et que $f(nx) = n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x .
2. En déduire que $f(r) = a r$ pour tout rationnel r .

3. Conclure, à l'aide de la continuité, que $f(x) = ax$ pour tout réel x . Vérifier la réciproque.

Exercice 11 : Existence de racines par le TVI

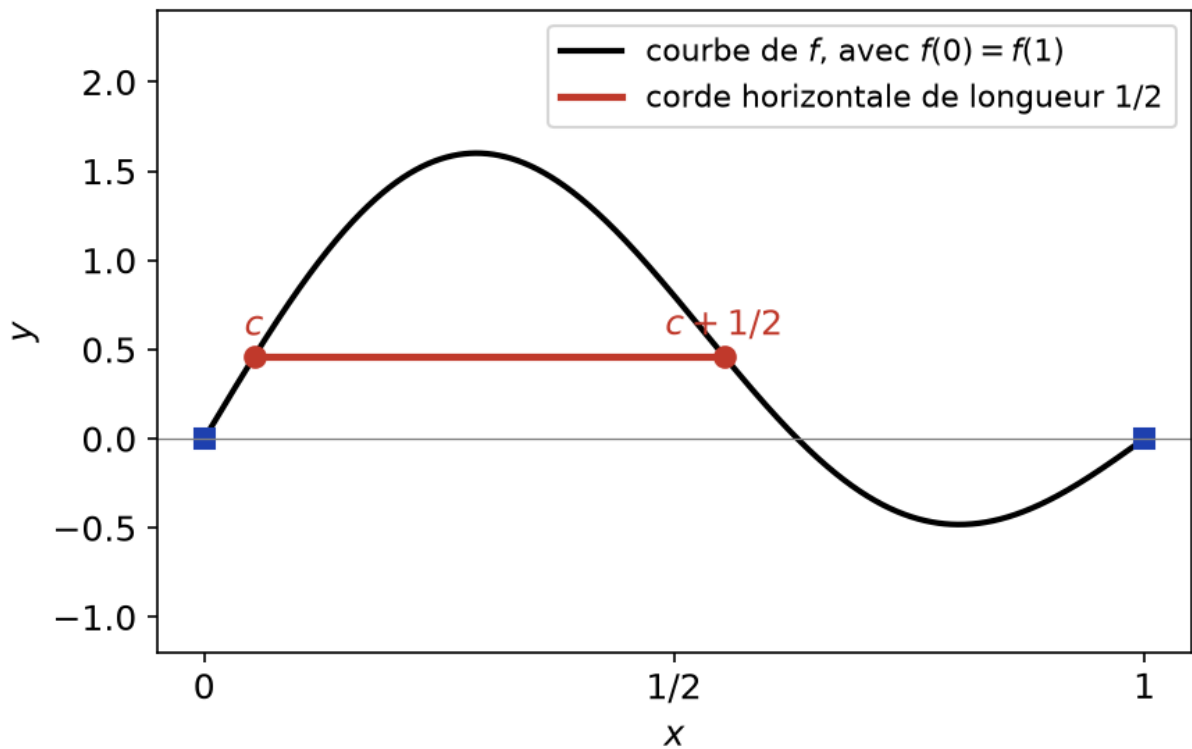
1. On pose $P(x) = x^5 - 3x + 1$. Calculer $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$. En déduire que P a au moins trois racines réelles, en précisant un intervalle pour chacune.
2. Soit Q un polynôme réel de degré impair. Montrer que Q possède au moins une racine réelle.
3. Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ possède une unique solution réelle, et qu'elle appartient à $]0, 1[$.

Exercice 12 : Théorème du point fixe sur un segment

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire un $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Montrer que $\cos$ envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. En déduire que l'équation $\cos x = x$ a une solution dans $[0, 1]$, puis qu'elle y est unique.
3. Montrer que le résultat de la question 1 devient faux pour une fonction continue de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$.

Exercice 13 : Théorème des cordes horizontales

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. La figure ci-dessous montre une telle courbe et une corde horizontale de longueur $1/2$.



1. On pose $g(x) = f(x + 1/2) - f(x)$ pour $x \in [0, 1/2]$. Calculer $g(0) + g(1/2)$.
2. En déduire qu'il existe $c \in [0, 1/2]$ tel que $f(c + 1/2) = f(c)$.
3. Soit $n \geq 2$ un entier. En considérant $g_n(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ sur $[0, 1 - 1/n]$, montrer qu'il existe $c \in [0, 1 - 1/n]$ tel que $f(c + 1/n) = f(c)$.
4. Application : un cycliste parcourt 30 km en exactement 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 10 minutes pendant lequel il a parcouru exactement 5 km. On admet que la distance parcourue dépend continûment du temps.

Exercice 14 : Méthode de dichotomie

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0, 1]$. On pose $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et, pour tout n , $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(a_n) f(m_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$; sinon, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

1. Montrer par récurrence que $f(a_n) f(b_n) \leq 0$ et que $b_n - a_n = 2^{-n}$ pour tout n .
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On note c leur limite commune.
3. Montrer que $f(c) = 0$.
4. Calculer a_n et b_n pour $n \leq 3$. Combien d'étapes suffisent pour obtenir c à 10^{-3} près ?

Exercice 15 : Minorant strictement positif sur un segment

1. Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x . Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a, b]$.
2. Montrer que ce résultat est faux sur $]0, 1]$ et sur $[0, +\infty[$.
3. Soit f et g continues sur $[a, b]$ telles que $f(x) < g(x)$ pour tout x . Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f + \alpha \leq g$ sur $[a, b]$.

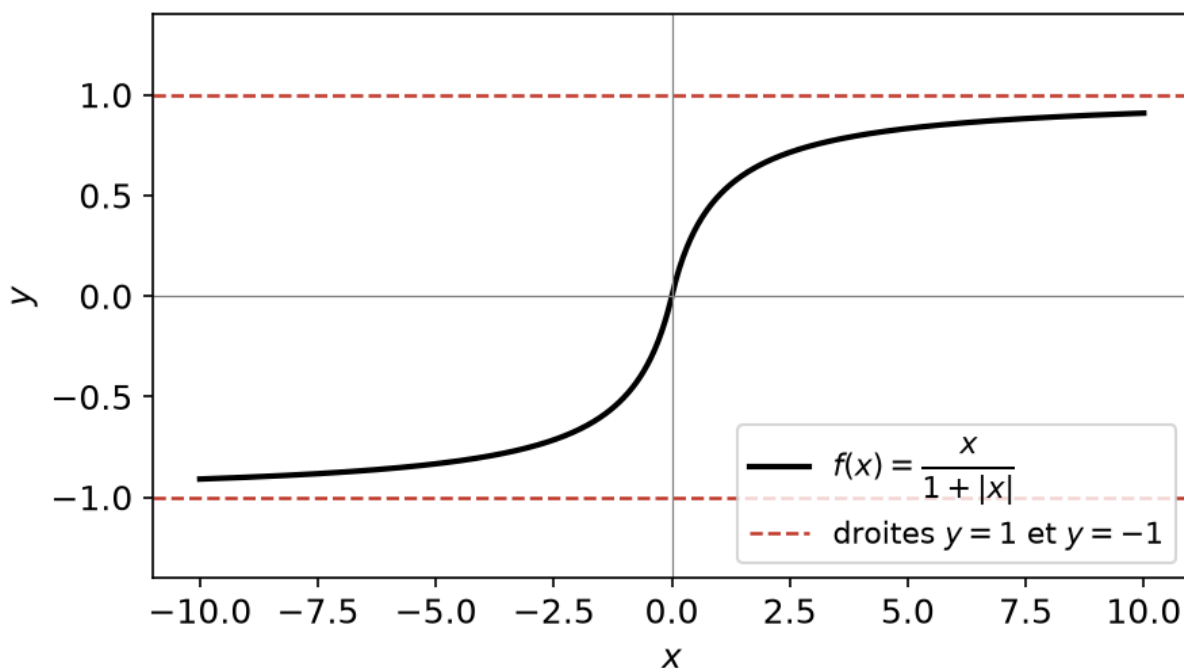
Exercice 16 : Minimum d'une fonction qui tend vers l'infini

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour tout x vérifiant $|x| > A$.
2. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \rightarrow x^2 + \sin(3x)$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f admet-elle nécessairement un maximum sur $\mathbb{R}$?

Exercice 17 : Une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Sa courbe est tracée ci-dessous.



1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire, par le théorème de la bijection continue, que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.
4. Déterminer explicitement f^{-1} et vérifier directement qu'elle est continue.

Exercice 18 : Injectivité et stricte monotonie

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. On veut montrer que f est strictement monotone.

1. On suppose le contraire. Justifier l'existence de $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$ dans I tels que $f(x_1) < f(y_1)$ et $f(x_2) > f(y_2)$.
2. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $x(t) = (1-t)x_1 + t x_2$ et $y(t) = (1-t)y_1 + t y_2$. Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ appartiennent à I et que $x(t) < y(t)$.
3. Étudier $\varphi(t) = f(y(t)) - f(x(t))$ et conclure.
4. Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse de continuité est indispensable.
5. Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse « I est un intervalle » est indispensable.

Exercice 19 : Continuité uniforme du carré et de la racine

1. Montrer que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est uniformément continue sur $[-R, R]$ pour tout $R > 0$, sans utiliser le théorème de Heine.
3. Montrer que $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$ pour $0 \leq y \leq x$. En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ pour tous $x, y \geq 0$.
4. En déduire que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 20 : Fonctions lipschitziennes

1. Montrer qu'une fonction k -lipschitzienne sur D est uniformément continue sur D .
2. Montrer que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout réel u (on pourra traiter d'abord $u \in [0, \pi/2]$), puis que $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \rightarrow 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$, puis qu'elle l'est sur $[1, +\infty[$.
4. Montrer que la racine carrée est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais n'y est pas lipschitzienne.

Exercice 21 : Limite en l'infini et continuité uniforme

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \geq 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour tous $x, y \geq A$.
2. En appliquant le théorème de Heine sur $[0, A+1]$, montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
3. En déduire que $x \rightarrow \arctan x$ et $x \rightarrow \frac{\sin x}{1+x}$ sont uniformément continues sur $[0, +\infty[$.
4. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 22 : Problème : fonctions continues périodiques

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique, c'est-à-dire telle que $f(x + T) = f(x)$ pour tout réel x .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k = E(x/T)$. Montrer que $x - kT \in [0, T[$ et que $f(x) = f(x - kT)$.
2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y atteint ses bornes.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On pourra appliquer le théorème de Heine sur $[0, 2T]$ et choisir $\delta \leq T$.
4. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$. En utilisant les suites $(x + nT)$, montrer que f est constante.
5. Soit g continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. On suppose $f(x) + g(x) \geq 0$ pour tout réel x . Montrer que $f \geq 0$.

6. Application : la fonction $x \rightarrow \sin x + \frac{1}{1+x^2}$ est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Répondre de deux façons, avec la question 5 puis par un calcul direct.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [limites et continuité, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Suites numériques](#)
- Chapitre précédent : [Suites numériques](#)
- Chapitre suivant : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)