Limites et continuité

I. Limite d'une fonction en un point

Dans tout le chapitre, f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, en général un intervalle ou une réunion d'intervalles. Le point a où l'on étudie la limite est soit un point de D, soit une extrémité de D, éventuellement $\pm\infty$. On dit alors que a est adhérent à D. Autrement dit, des points de D s'approchent de a aussi près que l'on veut.

Définition :

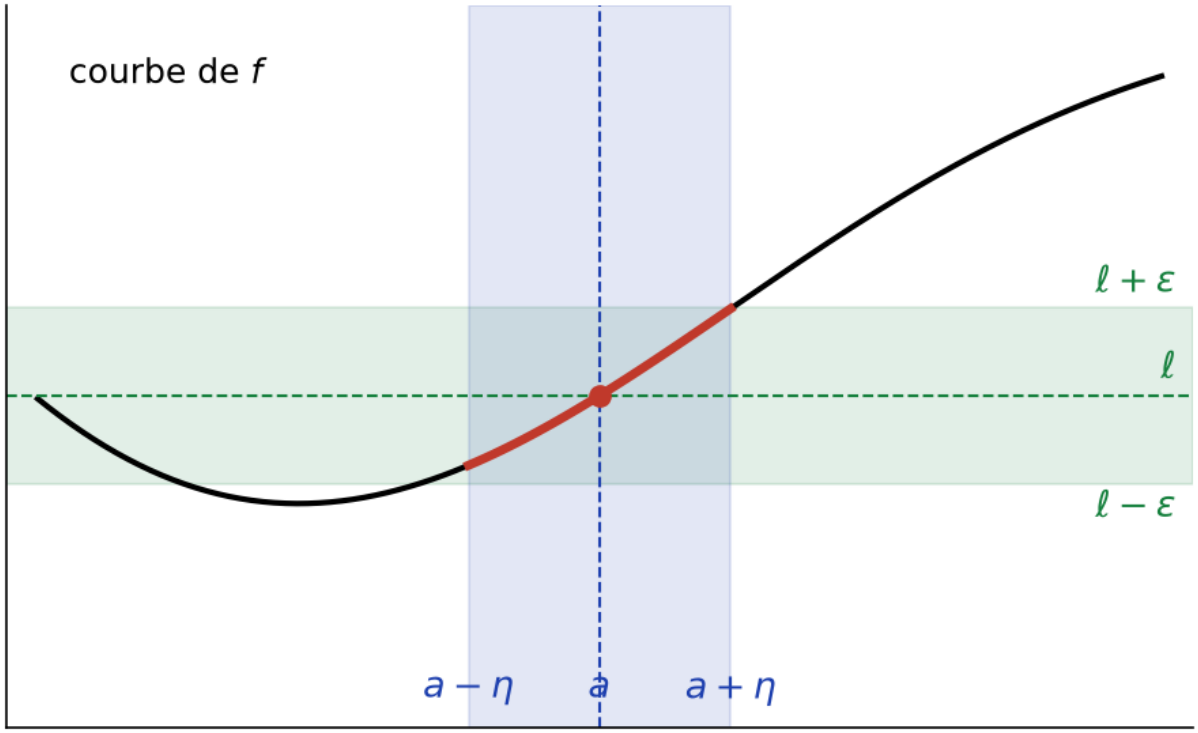
Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en a si :

$$\begin{aligned}&\forall\ \varepsilon > 0,\\ &\exists\ \eta > 0,\\ &\forall\ x \in D,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$.

Cette définition se lit sur un dessin. On se donne d'abord une bande horizontale de demi-largeur ε autour de ℓ. Ensuite, on cherche une bande verticale de demi-largeur η autour de a. Dans cette bande verticale, la courbe doit rester dans la bande horizontale, comme le montre la figure ci-dessous.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Les limites infinies et les limites en l'infini suivent le même schéma. Il suffit de remplacer la bande autour de ℓ ou de a par une demi-droite.

Définition :

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie : $\begin{array}{l} \forall\, A \in \mathbb{R}, \\ \exists\, \eta > 0, \\ \forall\, x \in D, \\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A \end{array}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie : $\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0, \\ \exists\, B \in \mathbb{R}, \\ \forall\, x \in D, \\ x \geq B \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon \end{array}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie : $\begin{array}{l} \forall\, A \in \mathbb{R}, \\ \exists\, B \in \mathbb{R}, \\ \forall\, x \in D, \\ x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A \end{array}$.

Les cas $-\infty$ s'écrivent de la même façon, en renversant les inégalités.

Proposition :

Si f admet une limite en a, cette limite est unique. De plus, si $a \in D$ et si f admet une limite en a, cette limite vaut $f(a)$.

Démonstration :

Supposons que f tende vers ℓ et vers ℓ' en a, avec $\ell \neq \ell'$ réels. Posons $\varepsilon = |\ell - \ell'|/3$. On obtient deux réels η_1 et η_2 associés à ε. Pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, il existe $x \in D$ avec $|x - a| \leq \eta$, car a est adhérent à D. Alors $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \leq 2\varepsilon$, ce qui est absurde. Les cas infinis se traitent de même. Enfin, si $a \in D$, on peut prendre $x = a$ dans la définition : $|f(a) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\ell = f(a)$.

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. Pour $|x - 2| \leq 1$, on a $|x + 2| \leq 5$, donc $|x^2 - 4| \leq 5|x - 2|$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, le choix $\eta = \min(1, \varepsilon/5)$ convient.

1. Limites à gauche et à droite

Il est souvent utile de n'approcher a que d'un seul côté. Par exemple, la partie entière saute en chaque entier. On restreint alors f à $D \cap]-\infty, a[$ ou à $D \cap]a, +\infty[$.

Définition :

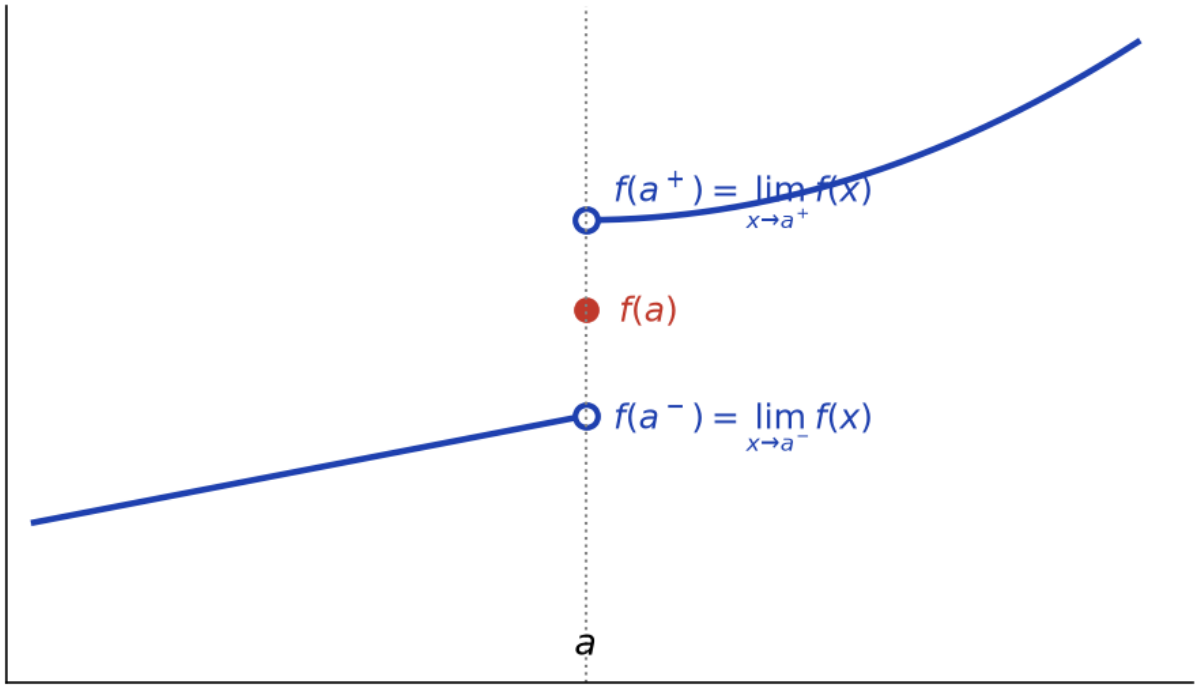
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction de f à $D \cap]-\infty, a[$ tend vers ℓ en a. On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ -}} f(x) = \ell$ ou $f(a^-) = \ell$. La limite à droite, notée $f(a^+)$, se définit avec $D \cap]a, +\infty[$.

Propriété :

Soit a un point intérieur à D. Alors f admet une limite en a si et seulement si $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent et sont égales à $f(a)$. Si a n'appartient pas à D mais que D contient des points des deux côtés de a, il faut et il suffit que $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent et soient égales.

La figure ci-dessous montre une fonction qui admet une limite à gauche et une limite à droite en a, distinctes de $f(a)$. Par conséquent, elle n'a pas de limite en a.



Exemple :

Pour $n \in \mathbb{Z}$, la partie entière vérifie $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$. En effet, $\lfloor x \rfloor = n-1$ sur $[n-1, n[$ et $\lfloor x \rfloor = n$ sur $[n, n+1[$. Ainsi, la partie entière n'a de limite en aucun entier.

II. Caractérisation séquentielle, opérations et limite monotone

1. Le lien avec les suites

Le chapitre sur les suites fournit un outil très efficace. En effet, la limite d'une fonction se lit sur les suites qui tendent vers le point étudié.

Théorème :

(Caractérisation séquentielle de la limite.) Soit a adhérent à D et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de D qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers ℓ.

Démonstration :

Traitons le cas a et ℓ réels. Supposons d'abord que f tende vers ℓ en a. Soit (x_n) une suite de D de limite a et soit $\varepsilon > 0$. On prend η donné par la définition. Ensuite, il existe un rang N tel que $|x_n - a| \leq \eta$ pour $n \geq N$. Donc $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$.

Réciproquement, raisonnons par contraposée. Si f ne tend pas vers ℓ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, un point $x \in D$ vérifie $|x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$. Pour $\eta = 1/(n+1)$, on obtient ainsi un point x_n. La suite (x_n) tend vers a, mais $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Méthode :

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, on exhibe deux suites (x_n) et (y_n) de D qui tendent vers a, telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes. Par unicité de la limite, f ne peut pas avoir de limite. On peut aussi exhiber une seule suite (x_n) pour laquelle $(f(x_n))$ diverge.

Exemple :

La fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, $x_n = 2n\pi$ et $y_n = (2n+1)\pi$ tendent vers $+\infty$, alors que $\cos(x_n) = 1$ et $\cos(y_n) = -1$ pour tout n.

2. Opérations et inégalités

Grâce à la caractérisation séquentielle, les règles de calcul démontrées pour les suites passent aux fonctions sans effort.

Propriété :

- Somme, produit et quotient : si $f \to \ell$ et $g \to \ell'$ en a, alors $f+g \to \ell+\ell'$, $fg \to \ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $f/g \to \ell/\ell'$. Les formes indéterminées restent celles connues pour les suites.
- Composition : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Théorème :

(Théorème d'encadrement.) Si $g \leq f \leq h$ au voisinage de a et si g et h tendent vers le même réel ℓ en a, alors f tend vers ℓ en a. De plus, si $f \leq g$ au voisinage de a et si les deux limites existent, alors $\lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$.

Exemple :

Pour $x \neq 0$, on a $|x \sin(1/x)| \leq |x|$. Donc $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$ et, par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

3. Le théorème de la limite monotone

Pour une fonction monotone, l'existence des limites latérales est automatique. Ce résultat repose sur la propriété de la borne supérieure, exactement comme pour les suites monotones.

Théorème :

(Théorème de la limite monotone.) Soit f croissante sur $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

- Si f est majorée, f admet en b la limite finie $\sup\limits_{]a,b[} f$; sinon, f tend vers $+\infty$ en b.
- Si f est minorée, f admet en a la limite finie $\inf\limits_{]a,b[} f$; sinon, f tend vers $-\infty$ en a.

Démonstration :

Supposons f majorée et b réel. L'ensemble $f(]a, b[)$ est non vide et majoré, donc il admet

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

une borne supérieure M. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > M - \varepsilon$. Posons $\eta = b - x_0$. Pour $x \in [x_0, b[$, la croissance donne $M - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M$. Donc $|f(x) - M| \leq \varepsilon$ dès que $b - \eta \leq x < b$. Les autres cas se traitent de la même manière.

Corollaire :

Si f est croissante sur un intervalle I et si x est intérieur à I, alors $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent, et $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$. Ainsi, une fonction monotone n'a que des discontinuités de saut.

III. Continuité en un point et prolongement

Définition :

Soit $a \in D$. La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Elle est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et continue à droite si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Enfin, f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

D'après la partie précédente, f est continue en un point intérieur a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a. De plus, les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continus. Par conséquent, les polynômes, les fonctions rationnelles, $\exp$, $\ln$, $\sin$ et $\cos$ sont continus sur leur ensemble de définition.

Propriété :

Si f est continue en ℓ et si (u_n) est une suite de D qui tend vers ℓ, alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. En particulier, si une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers

$\ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

1. Prolongement par continuité

Une fonction peut ne pas être définie en un point, tout en y admettant une limite finie. On la complète alors naturellement.

Définition :

Soit $a \notin D$, adhérent à D. Si f admet une limite finie ℓ en a, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $D \cup \{a\}$ par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in D$ et $\widetilde{f}(a) = \ell$ est continue en a. On l'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Méthode :

Pour prolonger f par continuité en a, on calcule la limite de f en a, si besoin à gauche et à droite séparément. Si cette limite existe et est finie, on pose $f(a) = \ell$. En revanche, si les limites latérales diffèrent, ou si l'une est infinie, aucun prolongement continu n'existe.

Exemple :

La fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, tend vers 1 en 0, car c'est le taux d'accroissement de $\sin$ en 0. On la prolonge donc en posant sa valeur égale à 1 en 0. En revanche, $x \to \frac{|x|}{x}$ vaut -1 à gauche de 0 et 1 à droite : elle n'est pas prolongeable par continuité.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

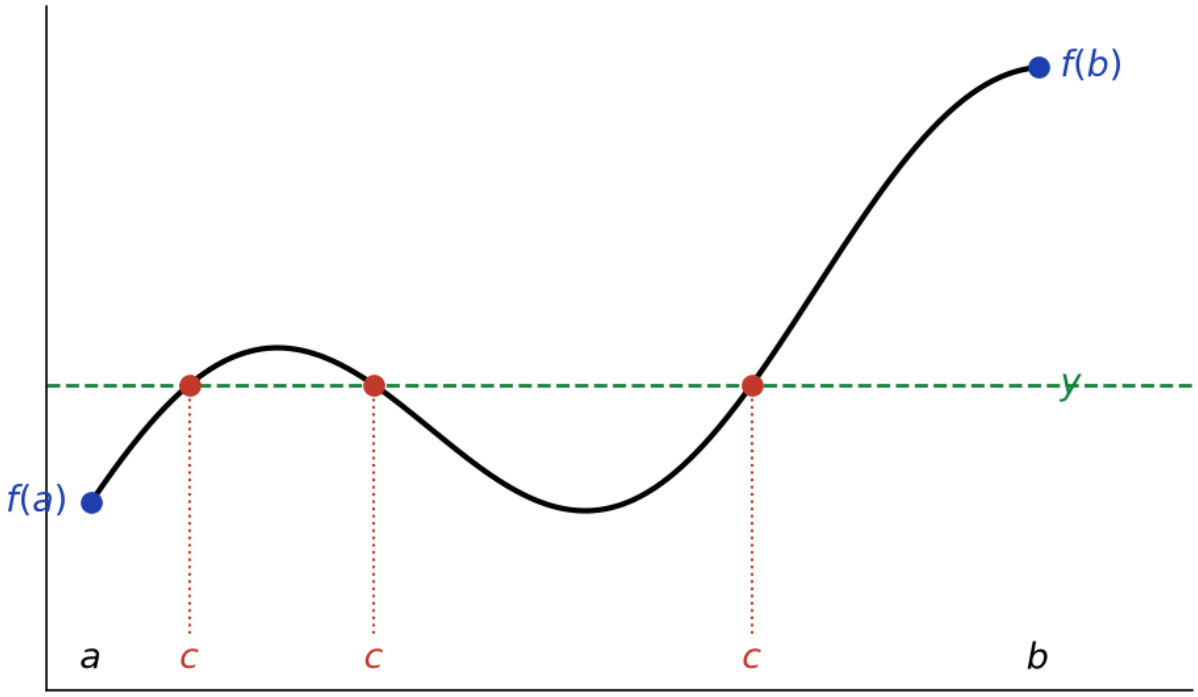
IV. Le théorème des valeurs intermédiaires

Ce théorème, admis en début d'année, se démontre maintenant grâce aux suites adjacentes. Son énoncé traduit une idée intuitive : une courbe continue qui passe d'un côté d'une droite horizontale à l'autre la traverse forcément.

Théorème :

(Théorème des valeurs intermédiaires.) Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

La figure ci-dessous illustre ce théorème. Le réel c n'est pas forcément unique : ici, trois points conviennent.



Démonstration :

Posons $g = f - y$, quitte à remplacer f par $-f$: on peut supposer $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. On construit deux suites par dichotomie. D'abord, $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Ensuite, on note $m = (a_n + b_n)/2$. Si $g(m) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

Par récurrence, $g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$ et $b_n - a_n = (b-a)/2^n$. De plus, (a_n) croît et (b_n) décroît. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers un même réel $c \in [a, b]$. Enfin, la continuité de g en c donne $g(c) = \lim g(a_n) \leq 0$ et $g(c) = \lim g(b_n) \geq 0$. Donc $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = y$.

Corollaire :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration :

Une partie J de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous $y_1 \leq y_2$ de J, tout réel compris entre eux appartient à J. Soit donc $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ dans $f(I)$, et y entre les deux. Le segment d'extrémités x_1 et x_2 est inclus dans I. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué sur ce segment, donne c tel que $f(c) = y$. Donc $y \in f(I)$.

Méthode :

Pour montrer qu'une équation $f(x) = y$ admet une solution, on écrit l'équation sous la forme $g(x) = 0$. Ensuite, on vérifie que g est continue sur un intervalle, puis on trouve deux points où g prend des valeurs de signes opposés. Pour l'unicité, on ajoute un argument de stricte monotonie.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. La méthode de dichotomie

La preuve précédente est constructive. Autrement dit, elle fournit un algorithme d'approximation. Après n étapes, la solution c est dans $[a_n, b_n]$, de longueur $(b-a)/2^n$. Par conséquent, le milieu de cet intervalle approche c à $(b-a)/2^{n+1}$ près.

Méthode :

Pour approcher un zéro de g continue sur $[a,b]$ avec $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ à ε près :

- on calcule g au milieu m de l'intervalle courant ;
- on garde la moitié dont les extrémités vérifient encore la condition de signe ;
- on s'arrête dès que la longueur de l'intervalle est inférieure à 2ε, puis on renvoie son milieu.

Le nombre d'étapes est le plus petit entier n tel que $(b-a)/2^{n+1} \leq \varepsilon$.

Exemple :

Montrons que $x^5 + x = 1$ admet une solution dans $[0,1]$. La fonction $g : x \to x^5 + x - 1$ est continue, $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit donc $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$. Comme g est strictement croissante, cette solution est unique. Pour l'approcher à 10^{-3} près par dichotomie, il faut $2^{n+1} \geq 1000$, soit $n = 9$ étapes.

V. Continuité sur un segment : les bornes atteintes

Sur un intervalle quelconque, une fonction continue peut être non bornée. Par exemple, $x \to 1/x$ est continue sur $]0, 1]$ mais pas bornée. Sur un segment, en revanche, la situation est bien meilleure.

Théorème :

(Théorème des bornes atteintes.) Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M dans $[a, b]$ tels que $f(x_m) = \min_{[a,b]} f$ et $f(x_M) = \max_{[a,b]} f$.

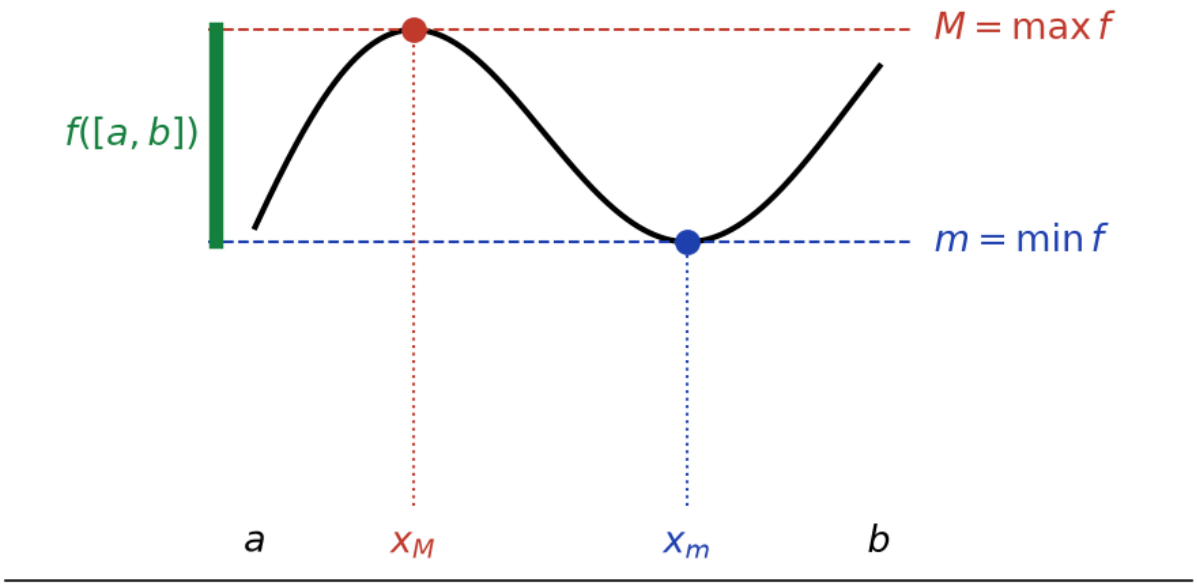
Démonstration :

D'abord, f est majorée. Sinon, pour tout n, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. La suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel c. Par passage à la limite dans les inégalités, $c \in [a, b]$. Alors, par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(c)$, ce qui contredit $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$.

Ensuite, notons $M = \sup_{[a,b]} f$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. De nouveau, une sous-suite converge vers $x_M \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_M) = \lim f(x_{\varphi(n)}) = M$. Le cas du minimum s'obtient en appliquant ce résultat à $-f$.

En combinant ce théorème avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on obtient l'image exacte d'un segment. La figure ci-dessous représente ce résultat.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Corollaire :

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : $f([a, b]) = [m, M]$, avec $m = \min_{[a, b]} f$ et $M = \max_{[a, b]} f$.

Attention :

Les deux hypothèses sont indispensables. Par exemple, $x \to x$ est continue sur $[0, 1[$ mais n'y atteint pas sa borne supérieure 1. De même, la fonction définie par $f(x) = x$ sur $[0, 1[$ et $f(1) = 0$ n'est pas continue et n'atteint pas non plus son sup. Enfin, l'image d'un intervalle ouvert n'est pas toujours ouverte : $\sin(\,]0, 2\pi[\,) = [-1, 1]$.

Exemple :

Soit f continue sur $[a, b]$ et strictement positive. Alors son minimum $m = f(x_m)$ est atteint,

donc $m > 0$. Ainsi, $f(x) \geq m > 0$ pour tout x : la fonction f est minorée par une constante strictement positive. Sur $]0, 1]$, la fonction $x \to x$ montre que ce résultat tombe en défaut sans segment.

VI. Continuité, stricte monotonie et bijections

Une fonction strictement monotone est injective. Pour les fonctions continues sur un intervalle, la réciproque est vraie aussi.

Proposition :

Une fonction continue et injective sur un intervalle I est strictement monotone sur I.

La preuve repose sur le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction auxiliaire. Elle fait l'objet de l'exercice « Injections continues » de la fiche associée. Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant.

Théorème :

(Théorème de la bijection.) Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I ;
- f réalise une bijection de I sur J ;
- la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même sens que f.

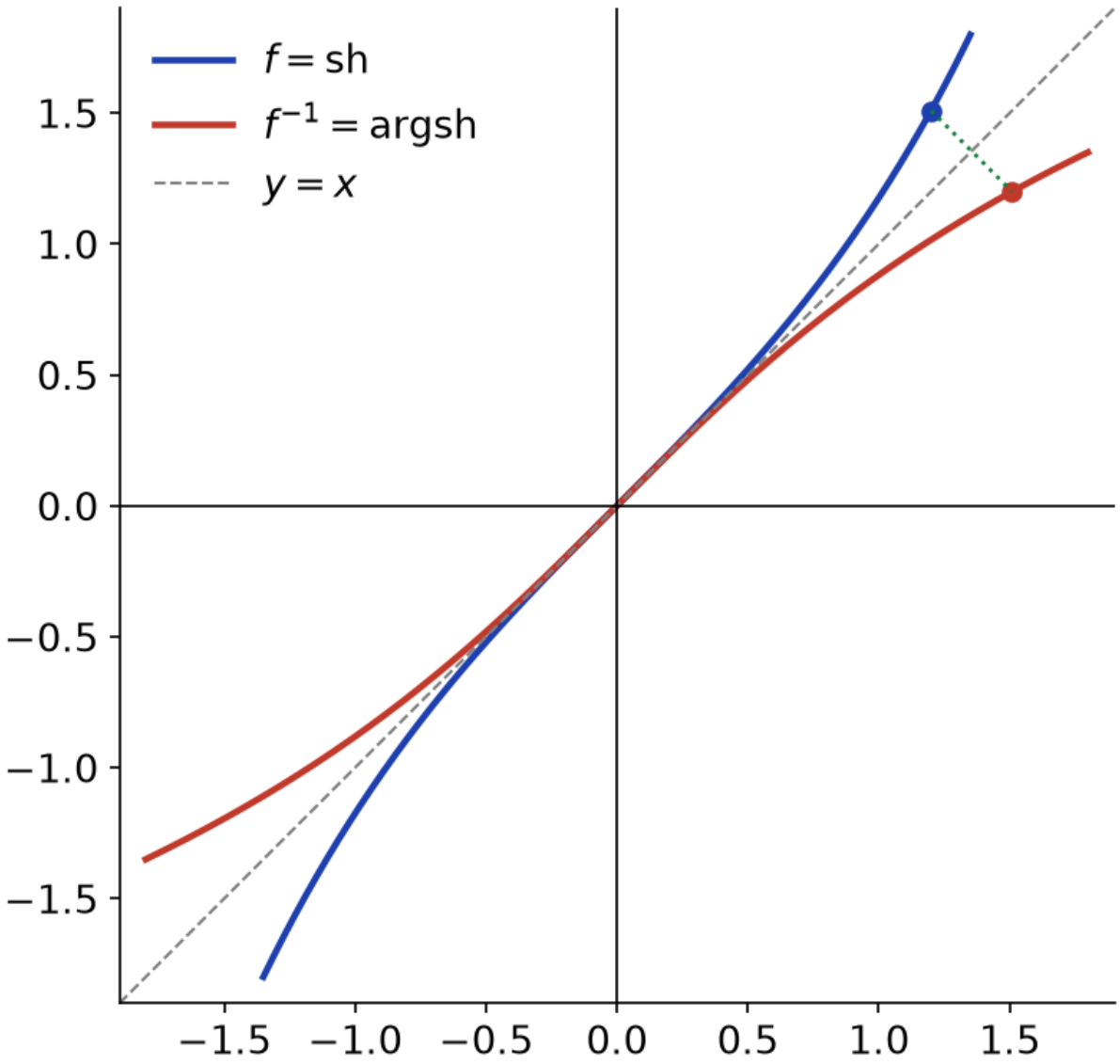
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Démonstration :

Supposons f strictement croissante. D'abord, J est un intervalle d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Ensuite, f est injective car strictement monotone, et surjective sur J par définition. Donc $f : I \to J$ est bijective. La réciproque $g = f^{-1}$ est strictement croissante : si $y < y'$ et $g(y) \geq g(y')$, la croissance de f donnerait $y \geq y'$.

Montrons enfin que g est continue en un point y_0 intérieur à J. D'après le théorème de la limite monotone, $g(y_0^-)$ et $g(y_0^+)$ existent et $g(y_0^-) \leq g(y_0) \leq g(y_0^+)$. Supposons par exemple $g(y_0^-) < g(y_0)$. Pour $y < y_0$, on a $g(y) \leq g(y_0^-)$ et, pour $y > y_0$, on a $g(y) > g(y_0)$. Donc l'intervalle $]g(y_0^-), g(y_0)[$ ne contient aucune valeur de g. Or $g(J) = I$ est un intervalle qui contient $g(y_0)$ et des valeurs inférieures à $g(y_0^-)$: c'est absurde. L'autre inégalité se traite de même. Donc g est continue en y_0. Aux bornes de J, l'argument est le même avec une seule limite latérale.

Dans un repère orthonormé, la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$. La figure ci-dessous le montre pour le sinus hyperbolique et sa réciproque.



Méthode :

Pour établir que f réalise une bijection et étudier sa réciproque :

- on montre que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, souvent grâce au signe de la dérivée ;
- on calcule les limites de f aux bornes de I pour obtenir $J = f(I)$;
- on en déduit que f^{-1} est continue, de même monotonie, et que ses limites aux bornes de J sont les bornes de I ;

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- quand c'est possible, on résout $f(x) = y$ pour obtenir une formule explicite de f^{-1}.

Exemple :

La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec des limites $-\infty$ et $+\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Résolvons $\mathrm{sh}(x) = y$: en posant $X = e^x > 0$, on obtient $X^2 - 2yX - 1 = 0$. La seule racine positive est $X = y + \sqrt{y^2+1}$. Ainsi, $\mathrm{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$, et cette réciproque est bien continue.

VII. Fonctions à valeurs complexes

Les notions de limite et de continuité s'étendent sans peine aux fonctions $f : D \to \mathbb{C}$. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module.

Définition :

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers ℓ en a si $|f(x) - \ell|$ tend vers 0 quand x tend vers a. La fonction f est continue en $a \in D$ si elle tend vers $f(a)$ en a.

Propriété :

La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ tend vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f)$ tend vers $\mathrm{Im}(\ell)$. En effet, on a $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ et $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$. De même, f est continue si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

La caractérisation séquentielle, les opérations et le prolongement par continuité restent valables. De plus, une fonction continue sur un segment à valeurs complexes est bornée : il suffit d'appliquer le théorème des bornes atteintes à $|f|$, qui est continue et réelle.

Attention :

Le théorème des valeurs intermédiaires n'a plus de sens dans $\mathbb{C}$, car « être compris entre » n'y est pas défini. Par exemple, $\varphi(t) = e^{i\pi t}$ est continue sur $[0,1]$, avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = -1$. Pourtant, $|\varphi(t)| = 1$, donc φ ne s'annule jamais. De même, la notion de fonction monotone n'existe pas pour des valeurs complexes.

Exemple :

Étudions $h(t) = \frac{e^{it} - 1}{t}$ en 0. Sa partie réelle $\frac{\cos t - 1}{t}$ tend vers $\cos'(0) = 0$, et sa partie imaginaire $\frac{\sin t}{t}$ tend vers 1. Donc h tend vers i en 0, et on la prolonge par continuité en posant $h(0) = i$.

Ce qu'il faut retenir

- La limite en un point se définit avec des ε et des η. Elle est unique et, si $a \in D$, elle vaut $f(a)$.
- En un point intérieur, f a une limite si et seulement si ses limites à gauche et à droite existent et valent $f(a)$.
- La caractérisation séquentielle ramène les limites de fonctions aux limites de suites. Deux suites de limites différentes prouvent l'absence de limite.
- Une fonction monotone admet des limites latérales en tout point : c'est le théorème de la limite monotone.
- Pour prolonger par continuité en a, il faut une limite finie en a.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une solution. Sa preuve par dichotomie fournit aussi un algorithme d'approximation.
- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ; l'image d'un segment est un segment.
- Une fonction continue strictement monotone sur un intervalle est une bijection sur son image, et sa réciproque est continue.
- Pour une fonction à valeurs complexes, on travaille avec le module ou avec les parties réelle et imaginaire ; en revanche, le TVI ne s'applique plus.

Questions fréquentes sur limites et continuité

Comment prouver qu'une fonction n'a pas de limite en un point ?

On utilise la caractérisation séquentielle. On construit deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers le point, telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes. Par exemple, pour $\sin(1/x)$ en 0, on prend $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ et $y_n = 1/(n\pi)$.

Quelle différence entre continuité et prolongement par continuité ?

La continuité concerne un point où la fonction est définie : il faut $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Le prolongement concerne un point a où f n'est pas définie mais admet une limite finie ℓ. On pose alors $f(a) = \ell$, et la nouvelle fonction est continue en a.

Le théorème des valeurs intermédiaires donne-t-il l'unicité de la solution ?

Non, il donne seulement l'existence. Pour l'unicité, il faut un argument de plus, en général la stricte monotonie de la fonction. Le théorème de la bijection combine alors les deux : existence et unicité de l'antécédent.

Pourquoi le théorème des bornes atteintes exige-t-il un segment ?

Sur un intervalle non fermé ou non borné, le résultat tombe en défaut. Par exemple, $x \to 1/x$ n'est pas bornée sur $]0, 1]$, et $x \to x$ n'atteint pas sa borne supérieure sur $[0, 1[$. La preuve utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass, qui a besoin d'un segment.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : exercices de maths sup sur limites et continuité
- À maîtriser avant : Nombres réels et suites numériques
- Chapitre précédent : Suites particulières et suites récurrentes
- Chapitre suivant : Dérivabilité et convexité
- Le même thème en L1 : limites et continuité, cours de maths en L1
- Tester vos connaissances : QCM de maths sup par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths sup et les chapitres de maths spé

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.