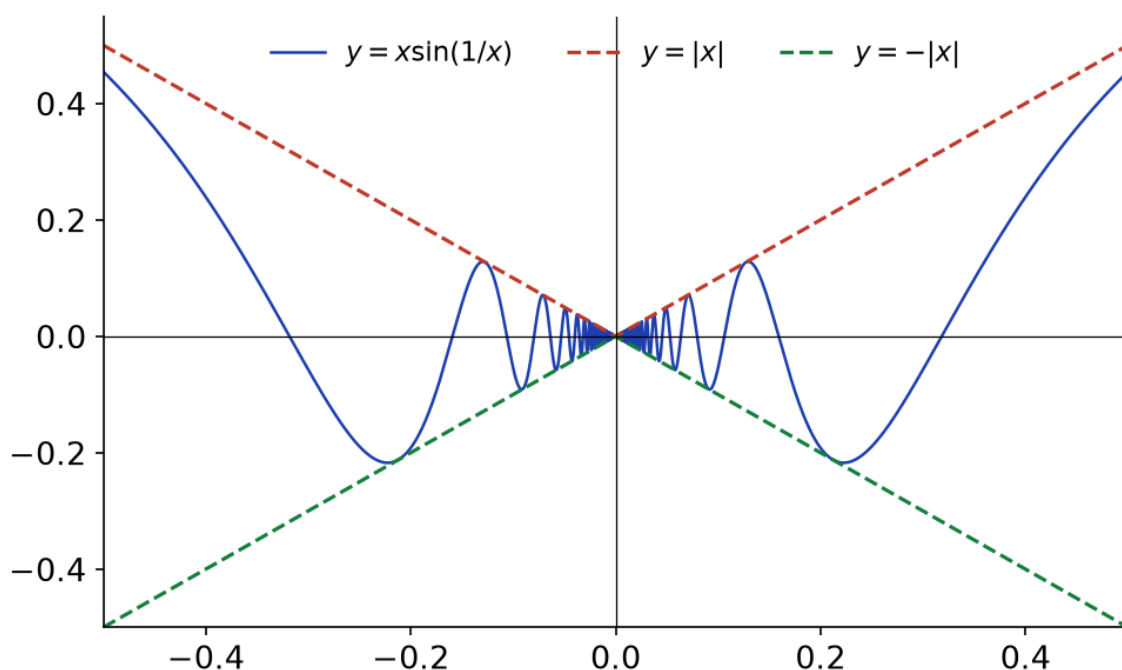


## Limites et continuité

### Corrigé de l'exercice 1 : Limites par encadrement et par composition

1. Pour  $x \neq 0$ , on a  $|\sin(1/x)| \leq 1$ , donc  $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$ . Les deux fonctions qui encadrent tendent vers 0 en 0. D'après le théorème d'encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ . La figure ci-dessous montre la courbe coincée entre les droites  $y = |x|$  et  $y = -|x|$ .



2. Pour  $x > 0$ , on a  $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$ . En divisant par  $x + 2 > 0$ , on obtient :

$$\frac{x - 1}{x + 2} \leq \frac{x + \sin x}{x + 2} \leq \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Or  $\frac{x-1}{x+2} = \frac{1-1/x}{1+2/x} \rightarrow 1$  et, de même,  $\frac{x+1}{x+2} \rightarrow 1$ . Par encadrement, **la limite vaut 1**.

3. Par définition de la partie entière,  $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$ . D'abord, pour  $x > 0$ , on multiplie par  $x$  :  $1 - x < x \left\lfloor 1/x \right\rfloor \leq 1$ . Ensuite, pour  $x < 0$ , la multiplication par  $x$  renverse les inégalités :  $1 \leq x \left\lfloor 1/x \right\rfloor < 1 - x$ . Dans les deux cas, les bornes tendent vers 1 quand  $x \rightarrow 0$ . Donc la limite à droite et la limite à gauche valent 1, et  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor 1/x \right\rfloor = 1$ .

4. Pour  $x > 0$ , on écrit  $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ . D'une part,  $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 0$ . D'autre part,  $\exp$  est continue en 1. Par composition des limites,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$ .

5. Soit  $A > 0$ . Pour  $|x-2| \leq 1$ , on a  $x \geq 1$ , donc  $x+1 \geq 2$  et, pour  $x \neq 2$ ,  $\frac{x+1}{(x-2)^2} \geq \frac{2}{(x-2)^2}$ . Ensuite,  $\frac{2}{(x-2)^2} \geq A$  équivaut à  $|x-2| \leq \sqrt{2/A}$ . Ainsi,  $\eta = \min(1, \sqrt{2/A})$  **convient** : pour  $0 < |x-2| \leq \eta$ , on a  $\frac{x+1}{(x-2)^2} \geq A$ . Cela prouve que la limite vaut  $+\infty$ .

6. Supposons  $\ell \neq \ell'$  et posons  $\varepsilon = |\ell - \ell'|/3 > 0$ . La définition fournit  $\eta_1$  pour  $\ell$  et  $\eta_2$  pour  $\ell'$ . Soit  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ . Comme  $a$  est adhérent à  $D$ , il existe  $x \in D$  tel que  $|x-a| \leq \eta$ . Alors, par l'inégalité triangulaire,  $|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$ . C'est absurde puisque  $|\ell - \ell'| > 0$ . **Donc  $\ell = \ell'$  : la limite est unique.**

**Point de méthode** : pour un produit « borné fois tend vers 0 », l'encadrement est immédiat ; pour une puissance variable, on passe toujours par l'exponentielle.

## Corrigé de l'exercice 2 : Limites à gauche et à droite

1. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . D'abord,  $f(n) = n \times n = n^2$ . Ensuite, pour  $x \in [n-1, n[$ , on a  $\lfloor x \rfloor = n-1$ , donc  $f(x) = (n-1)x$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n(n-1)$ . De même, pour  $x \in [n, n+1[$ , on a  $f(x) = nx$ , donc  $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n^2$ .

2. Sur chaque intervalle ouvert  $]k, k+1[$ ,  $f$  coïncide avec la fonction affine  $x \rightarrow kx$  : elle y est continue. En un entier  $n$ , la limite à droite vaut  $n^2 = f(n)$ , donc  $f$  est continue à droite.

en tout point. En revanche,  $f$  est continue à gauche en  $n$  si et seulement si  $n(n-1) = n^2$ , c'est-à-dire  $n = 0$ . Par conséquent,  $f$  **est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ , discontinue en tout entier non nul, et continue à droite partout**. La courbe de l'énoncé montre bien un saut en chaque entier sauf en 0.

- Pour  $x \neq 1$ ,  $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|}$ . Si  $x > 1$ , alors  $g(x) = x+1 \rightarrow 2$ . Si  $x < 1$ , alors  $g(x) = -(x+1) \rightarrow -2$ . Les deux limites latérales sont différentes :  $g$  **n'a pas de limite en 1**.
- Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $1/x \rightarrow +\infty$ , donc  $e^{1/x} \rightarrow +\infty$  par composition. Quand  $x \rightarrow 0^-$ ,  $1/x \rightarrow -\infty$ , donc  $e^{1/x} \rightarrow 0$ . Ainsi,  $h(0^-) = 0$  **et  $h$  tend vers  $+\infty$  à droite de 0**. En particulier,  $h$  se prolonge par continuité à gauche, mais pas en 0 lui-même.

### **Corrigé de l'exercice 3 : Absence de limite par la caractérisation séquentielle**

---

- Posons  $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$  et  $y_n = \frac{1}{n\pi}$  pour  $n \geq 1$ . Les deux suites tendent vers 0 et sont non nulles. Or  $\sin(1/x_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$  et  $\sin(1/y_n) = \sin(n\pi) = 0$ . Si la fonction avait une limite  $\ell$  en 0, la caractérisation séquentielle donnerait  $\ell = 1$  et  $\ell = 0$ . Par conséquent,  $x \rightarrow \sin(1/x)$  **n'a pas de limite en 0**.
- Les suites  $2n\pi$  et  $(2n+1)\pi$  tendent vers  $+\infty$ . Pourtant,  $\cos(2n\pi) = 1$  et  $\cos((2n+1)\pi) = -1$ . Donc  $\cos$  **n'a pas de limite en  $+\infty$** .
- Les suites  $n$  et  $n + \frac{1}{2}$  tendent vers  $+\infty$ . Or  $n - \lfloor n \rfloor = 0$  et  $(n + \frac{1}{2}) - \lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{1}{2}$ . Ainsi, **la partie fractionnaire n'a pas de limite en  $+\infty$** .
- Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $r_n \in \mathbb{Q}$  tel que  $|r_n - a| \leq 1/n$ . De même, par densité des irrationnels, il existe  $s_n \notin \mathbb{Q}$  tel que  $|s_n - a| \leq 1/n$ . Les deux suites tendent vers  $a$ , mais  $1_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1$  et  $1_{\mathbb{Q}}(s_n) = 0$ . Donc  $1_{\mathbb{Q}}$  **n'a de limite en aucun point**. Comme la continuité en  $a$  exige une limite en  $a$ , **elle n'est continue nulle part**.
- Posons  $u(x) = x 1_{\mathbb{Q}}(x)$ . D'abord,  $|u(x)| \leq |x|$ , donc  $u(x) \rightarrow 0 = u(0)$  :  **$u$  est continue en 0**. Ensuite, soit  $a \neq 0$ . Avec les suites de la question 4,  $u(r_n) = r_n \rightarrow a$  et  $u(s_n) = 0$ . Comme  $a \neq 0$ , ces limites diffèrent :  **$u$  n'est continue en aucun point  $a \neq 0$** .

**Point de méthode :** les suites choisies doivent tendre vers le point étudié et rester dans l'ensemble de définition ; on les construit souvent à partir des valeurs remarquables de la fonction.

## **Corrigé de l'exercice 4 : Prolongements par continuité**

---

1. La fonction  $u : x \rightarrow e^{2x}$  est dérivable en 0 avec  $u'(0) = 2$ . Donc le taux d'accroissement  $\frac{e^{2x} - 1}{x - 0}$  tend vers 2.  $f_1$  **se prolonge par continuité en posant**  $f_1(0) = 2$ .
2. Par croissances comparées,  $x \ln x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0^+$ . Pour  $x < 0$ , on écrit  $x \ln|x| = -(|x| \ln|x|)$ , qui tend aussi vers 0.  $f_2$  **se prolonge en posant**  $f_2(0) = 0$ .
3. On utilise  $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ . Ainsi, pour  $x \neq 0$  :

$$f_3(x) = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2.$$

Comme  $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$ , la composition donne  $f_3(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ . **On pose**  
 $f_3(0) = \frac{1}{2}$ .

4. Pour  $x > 0$ ,  $f_4(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ . Pour  $x < 0$ ,  $f_4(x) = -\frac{\sin x}{x} \rightarrow -1$ . Les limites latérales diffèrent :  $f_4$  **n'est pas prolongeable par continuité en 0**.
5. Chaque morceau est continu sur son intervalle ouvert. Il reste à étudier 0 et 1. En 0,  $\varphi(0) = e^0 = 1$ , la limite à gauche vaut 1 et la limite à droite vaut  $b$ . La continuité en 0 équivaut donc à  $b = 1$ . En 1,  $\varphi(1) = 3 + \ln 1 = 3$ , la limite à droite vaut 3, et la limite à gauche vaut  $a + b$ . Il faut donc  $a + b = 3$ . Finalement,  $\varphi$  **est continue sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $a = 2$  et  $b = 1$** .

## Corrigé de l'exercice 5 : Fonctions croissantes et sauts

1. Soit  $x \in ]0, 1[$ . La restriction de  $f$  à  $[0, x[$  est croissante et majorée par  $f(x)$ . D'après le théorème de la limite monotone,  $f(x^-)$  existe et vaut  $\sup_{[0, x[} f \leq f(x)$ . De même, la restriction à  $]x, 1]$  est croissante et minorée par  $f(x)$ , donc  $f(x^+) = \inf_{]x, 1]} f \geq f(x)$ . Ainsi,  $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$ . Enfin, pour  $0 < x < y < 1$ , choisissons  $z \in ]x, y[$ . Alors  $f(x^+) \leq f(z)$ , car  $f(x^+)$  est un minorant de  $f$  sur  $]x, 1]$ , et  $f(z) \leq f(y^-)$ . **Donc**  $f(x^+) \leq f(y^-)$ .

2. Comme  $x$  est intérieur,  $f$  est continue en  $x$  si et seulement si  $f(x^-) = f(x) = f(x^+)$ . Grâce à l'encadrement de la question 1, cette double égalité équivaut à  $f(x^-) = f(x^+)$ . **Donc**  $f$  est continue en  $x$  si et seulement si  $s(x) = 0$ .

3. Choisissons des points intermédiaires  $t_0 = 0$ ,  $t_i \in ]x_i, x_{i+1}[$  pour  $1 \leq i \leq p-1$ , et  $t_p = 1$ . Ainsi,  $t_{i-1} < x_i < t_i$  pour tout  $i$ . Par la question 1,  $f(x_i^+) \leq f(t_i)$  et  $f(x_i^-) \geq f(t_{i-1})$ . Donc  $s(x_i) \leq f(t_i) - f(t_{i-1})$ . En sommant, la somme télescopique donne :

$$\sum_{i=1}^p s(x_i) \leq \sum_{i=1}^p (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(1) - f(0).$$

**C'est l'inégalité demandée.**

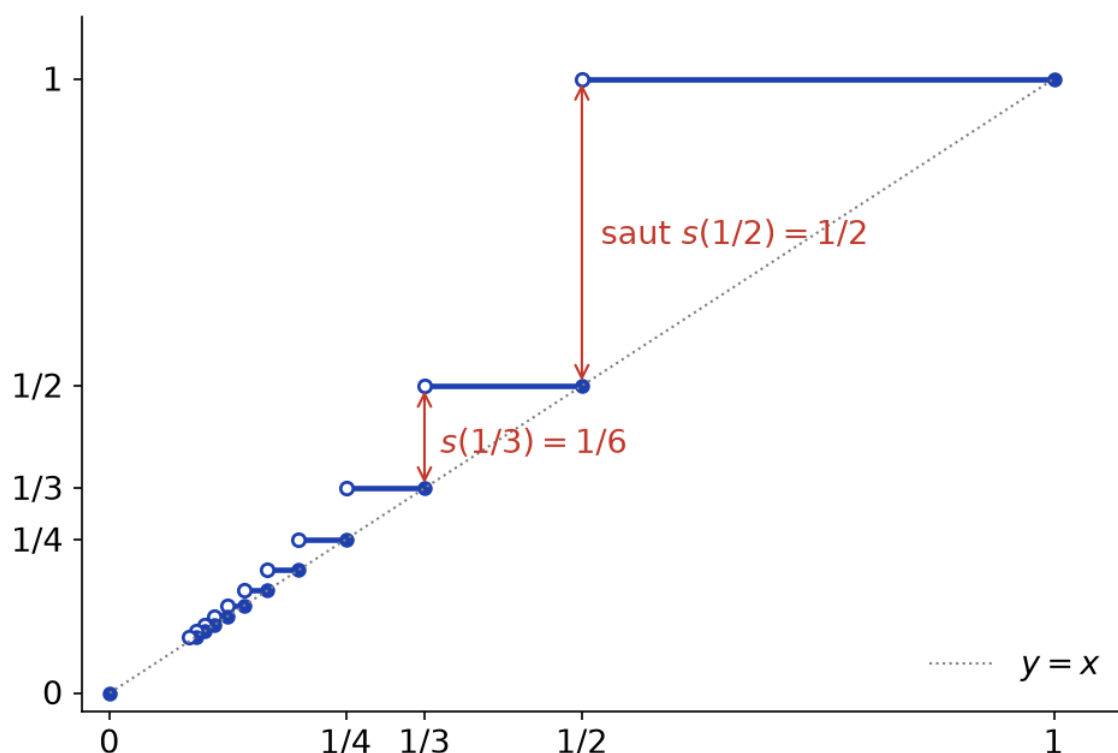
4. Soit  $x_1 < \dots < x_p$  des points distincts où le saut est au moins  $1/n$ . D'après la question 3,  $p/n \leq \sum s(x_i) \leq f(1) - f(0)$ . Donc  $p \leq n(f(1) - f(0))$ . Ainsi, toute partie finie de cet ensemble a au plus  $n(f(1) - f(0))$  éléments. **L'ensemble est donc fini, de cardinal au plus  $n(f(1) - f(0))$ .** En réunissant ces ensembles pour  $n \geq 1$ , on obtient toutes les discontinuités : on retiendra qu'elles sont « peu nombreuses ».

5. Soit  $0 < x \leq y \leq 1$ . Alors  $1/x \geq 1/y \geq 1$ , donc  $\lfloor 1/x \rfloor \geq \lfloor 1/y \rfloor \geq 1$ , puis  $g(x) \leq g(y)$ . De plus,  $g(0) = 0 < g(x)$ . **Donc**  $g$  est croissante.

Continuité en 0 : pour  $x \in ]0, 1[$ , on a  $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor 1/x \rfloor \leq \frac{1}{x}$ . En passant aux inverses,  $x \leq g(x) < \frac{x}{1-x}$ . Par encadrement,  $g(x) \rightarrow 0 = g(0)$ . **Donc**  $g$  est continue en 0.

Soit  $k \geq 2$ . Pour  $x \in ]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ , on a  $1/x \in [k, k+1[$ , donc  $g(x) = 1/k$ . Par conséquent,  $g(1/k) = 1/k$  et  $g\left(\left(\frac{1}{k}\right)^-\right) = \frac{1}{k}$ . Pour  $x \in ]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}]$ , on a  $g(x) = \frac{1}{k-1}$ . La limite à droite vaut donc  $\frac{1}{k-1}$ . **Le saut en  $1/k$  vaut  $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} > 0$  :**  $g$  y

est discontinue. La figure ci-dessous montre cet escalier, dont les marches se resserrent vers 0.



**Point de méthode :** la somme des sauts vaut ici  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)} = 1 = g(1) - g(0)$ , ce qui illustre l'inégalité de la question 3.

## Corrigé de l'exercice 6 : Équation fonctionnelle de Cauchy

1. Avec  $x = y = 0$ , on obtient  $f(0) = 2f(0)$ , donc  $f(0) = 0$ . Ensuite, avec  $y = -x$ , il vient  $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ . **Donc  $f$  est impaire.**
2. Montrons  $f(nx) = nf(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  par récurrence. Le cas  $n = 0$  découle de  $f(0) = 0$ . Ensuite, si  $f(nx) = nf(x)$ , alors  $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$ . Enfin, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'imparité donne  $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$ . **La formule vaut donc pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .**

3. Soit  $r = p/q$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ . D'une part,  $qf(r) = f(qr) = f(p)$ . D'autre part,  $f(p) = f(p \times 1) = pa$ . Donc  $f(r) = \frac{p}{q}a = ar$ .
4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$ , il existe une suite de rationnels  $(r_n)$  qui tend vers  $x$ . Comme  $f$  est continue en  $x$ , la caractérisation séquentielle donne  $f(r_n) \rightarrow f(x)$ . Or  $f(r_n) = ar_n \rightarrow ax$ . Par unicité de la limite,  $f(x) = ax$  **pour tout réel  $x$** . Réciproquement, ces fonctions linéaires conviennent.
5. Supposons  $f$  continue en 0. Soit  $x$  réel et  $h \rightarrow 0$ . Alors  $f(x+h) = f(x) + f(h) \rightarrow f(x) + f(0) = f(x)$ . **Donc  $f$  est continue en tout point  $x$ .**

## Corrigé de l'exercice 7 : Fonctions invariantes par dilatation

---

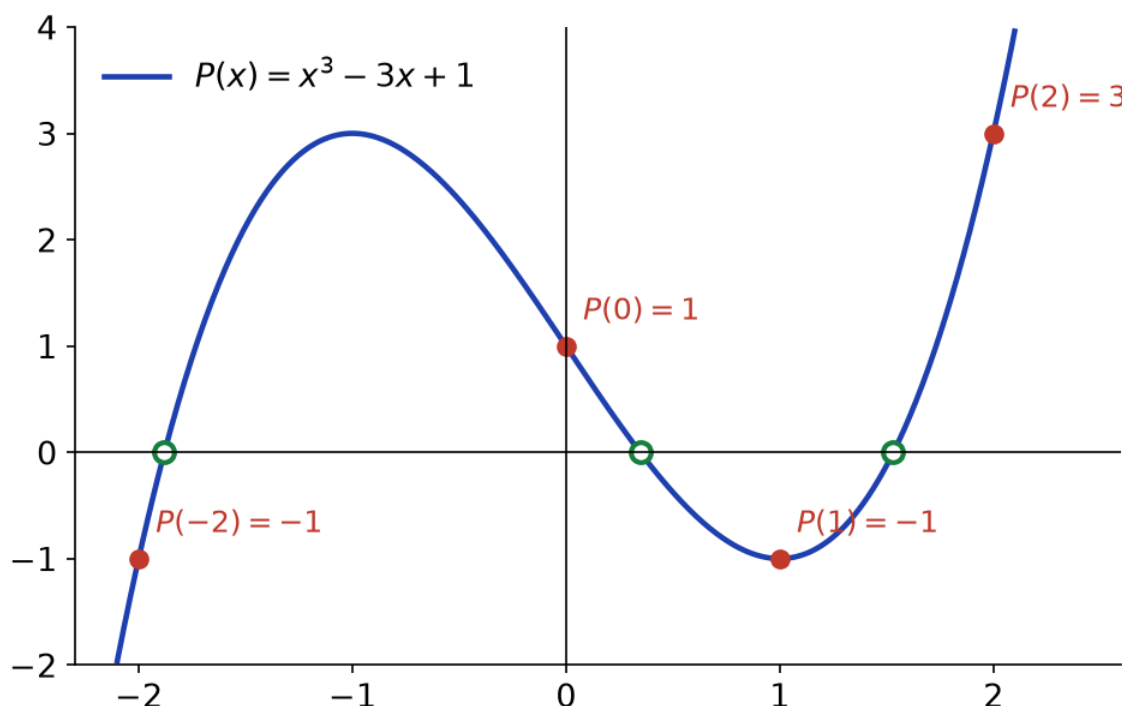
1. Soit  $x$  réel. En appliquant la relation à  $x/2$ , on obtient  $f(x) = f(x/2)$ . Par récurrence,  $f(x) = f(x/2^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or  $x/2^n \rightarrow 0$  et  $f$  est continue en 0. Par la caractérisation séquentielle,  $f(x/2^n) \rightarrow f(0)$ . La suite  $(f(x/2^n))$  est constante égale à  $f(x)$ , donc sa limite est  $f(x)$ . **Ainsi  $f(x) = f(0)$  :  $f$  est constante.**
2. Posons  $f(0) = 1$  et  $f(x) = 0$  pour  $x \neq 0$ . Comme  $2x = 0$  équivaut à  $x = 0$ , on a bien  $f(2x) = f(x)$  pour tout  $x$ . **Cette fonction n'est pas constante ; elle n'est pas continue en 0**, mais elle l'est ailleurs.
3. Soit  $g$  une solution et  $h(x) = g(x) - x$ . Alors  $h(2x) = g(2x) - 2x = g(x) + x - 2x = g(x) - x = h(x)$ . De plus,  $h$  est continue en 0 comme différence de fonctions continues en 0. D'après la question 1,  $h$  est constante, égale à  $c$ . Réciproquement,  $g(x) = x + c$  vérifie  $g(2x) = 2x + c = g(x) + x$ . **Les solutions sont les fonctions  $x \rightarrow x + c$ , avec  $c$  réel.**

## Corrigé de l'exercice 8 : Existence de solutions par le TVI

---

1. On trouve  $P(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$ ,  $P(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ ,  $P(0) = 1$ ,

$P(1) = -1$  et  $P(2) = 3$ . Le polynôme  $P$  est continu. Il change de signe sur  $[-2, -1]$ , sur  $[0, 1]$  et sur  $[1, 2]$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il s'annule dans chacun des intervalles  $] -2, -1[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ . Ces intervalles sont disjoints, donc  $P$  a au moins trois racines. Enfin, un polynôme de degré 3 a au plus trois racines.  **$P$  a exactement trois racines réelles, situées dans  $] -2, -1[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ .** La figure ci-dessous confirme ces changements de signe.



2. Posons  $g(x) = \cos x - x$  sur  $[0, \pi/2]$ . Elle est continue, avec  $g(0) = 1 > 0$  et  $g(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ . Le TVI fournit donc une solution. De plus,  $g'(x) = -\sin x - 1 < 0$  sur  $[0, \pi/2]$ , car  $\sin x \geq 0$  sur cet intervalle. Ainsi  $g$  est strictement décroissante, donc injective. **L'équation  $\cos x = x$  a une unique solution dans  $[0, \pi/2]$ .**

3. Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  avec  $d$  impair et  $a_d \neq 0$ . Quitte à remplacer  $P$  par  $-P$ , on suppose  $a_d > 0$ . Alors  $P(x) \sim a_d x^d$  en  $\pm\infty$ . Comme  $d$  est impair,  $P$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  et vers  $-\infty$  en  $-\infty$ . Il existe donc  $B > 0$  tel que  $P(B) > 0$  et  $P(-B) < 0$ . Par le TVI sur  $[-B, B]$ ,  **$P$  admet une racine réelle.**

**Point de méthode :** le TVI donne au moins une racine par changement de signe ; pour « exactement », on complète par un argument de comptage ou de monotonie.

## Corrigé de l'exercice 9 : Points fixes et intersections de courbes

---

1. Posons  $g(x) = f(x) - x$ , continue sur  $[a, b]$ . Comme  $f(a) \in [a, b]$ , on a  $g(a) = f(a) - a \geq 0$ . De même,  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . D'après le TVI, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ . **Donc  $f(c) = c$ .**
2. Sur  $[0, 1[$ , la fonction  $f(x) = \frac{1+x}{2}$  est continue et envoie  $[0, 1[$  dans  $[\frac{1}{2}, 1[$ . Pourtant,  $f(x) = x$  équivaut à  $x = 1$ , qui n'est pas dans  $[0, 1[$ . Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $x \rightarrow x + 1$  n'a aucun point fixe. **Le segment est donc indispensable.**
3. Posons  $h = f - g$ , continue sur  $[a, b]$ . Alors  $h(a) \leq 0$  et  $h(b) \geq 0$ . Le TVI fournit  $c$  tel que  $h(c) = 0$ . **Les courbes se coupent au point d'abscisse  $c$ .**
4. La question 1 fournit un point fixe. De plus,  $x \rightarrow f(x) - x$  est la somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante, donc elle est strictement décroissante. Elle s'annule donc au plus une fois. **Le point fixe est unique.**

## Corrigé de l'exercice 10 : Méthode de dichotomie

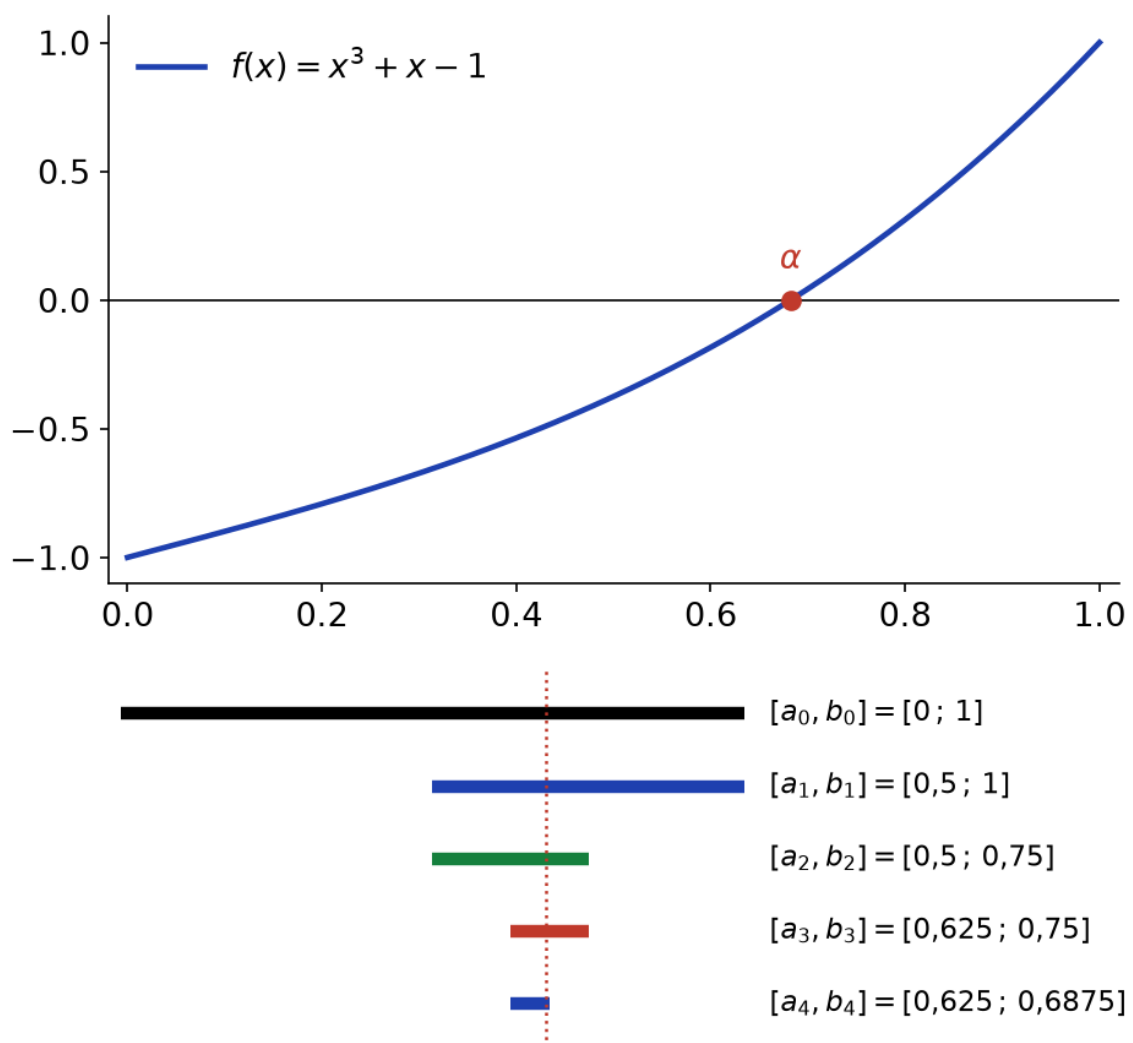
---

1. La fonction  $f$  est dérivable avec  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ , donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs,  $f(0) = -1 < 0$  et  $f(1) = 1 > 0$ . D'après le TVI,  $f$  s'annule sur  $]0, 1[$ ; par stricte monotonie, elle s'annule une seule fois sur  $\mathbb{R}$ . **Il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ , et  $\alpha \in ]0, 1[$ .**
2. Montrons par récurrence la propriété  $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$  et  $b_n - a_n = 2^{-n}$ . Au rang 0, elle est vraie. Supposons-la au rang  $n$ . Si  $f(m_n) < 0$ , le nouvel intervalle est  $[m_n, b_n]$ ; sinon, c'est  $[a_n, m_n]$  avec  $f(m_n) \geq 0$ . Dans les deux cas, la condition de signe est conservée et la longueur est divisée par 2. Enfin, comme  $f$  est strictement croissante,  $f(a_n) < 0 = f(\alpha) \leq f(b_n)$  entraîne  $a_n < \alpha \leq b_n$ . **Donc  $a_n \leq \alpha \leq b_n$  et  $b_n - a_n = 2^{-n}$ .**
3. Par construction,  $a_{n+1} \in [a_n, m_n]$ , donc  $a_{n+1} \geq a_n$ . De même,  $b_{n+1} \leq b_n$ . De plus,  $b_n - a_n = 2^{-n} \rightarrow 0$ . **Les suites sont adjacentes.** Elles ont donc une limite commune  $L$ . Par passage à la limite dans  $a_n \leq \alpha \leq b_n$ , on obtient  $L = \alpha$ .

4. On calcule successivement :

- $m_0 = 0,5$  et  $f(0,5) = -0,375 < 0$  , donc  $[a_1, b_1] = [0,5 ; 1]$  ;
- $m_1 = 0,75$  et  $f(0,75) = 0,171875 > 0$  , donc  $[a_2, b_2] = [0,5 ; 0,75]$  ;
- $m_2 = 0,625$  et  $f(0,625) \approx -0,1309 < 0$  , donc  $[a_3, b_3] = [0,625 ; 0,75]$  ;
- $m_3 = 0,6875$  et  $f(0,6875) \approx 0,0125 > 0$  , donc  $[a_4, b_4] = [0,625 ; 0,6875]$  .

La figure ci-dessous montre ces intervalles emboîtés, qui se resserrent autour de  $\alpha \approx 0,682$  .



5. Comme  $\alpha \in [a_n, b_n]$  et  $m_n$  est le milieu,  $|m_n - \alpha| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = 2^{-(n+1)}$ . Il suffit donc que  $2^{n+1} \geq 1000$ . Or  $2^9 = 512$  et  $2^{10} = 1024$ . Il faut donc  $n + 1 \geq 10$ . **Neuf étapes suffisent :  $m_9$  approche  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.**

## Corrigé de l'exercice 11 : Fonctions continues et bornes atteintes

---

1. D'après le théorème des bornes atteintes,  $f$  atteint son minimum en un point  $x_m$  de  $[a, b]$ . Posons  $m = f(x_m)$ . Par hypothèse,  $m > 0$ , et  $f(x) \geq m$  pour tout  $x$ . **Le résultat est donc vrai sur un segment.** En revanche, sur  $]0, 1]$ , la fonction  $x \rightarrow x$  est continue et strictement positive, mais  $\inf_{]0, 1]} x = 0$ . **Le résultat tombe en défaut sur  $]0, 1]$ .**
2. Comme  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $\pm\infty$ , il existe  $R > 0$  tel que  $f(x) > f(0)$  dès que  $|x| > R$ . Sur le segment  $[-R, R]$ ,  $f$  atteint son minimum en un point  $c$ . Comme  $0 \in [-R, R]$ , on a  $f(c) \leq f(0)$ . Ainsi, pour  $|x| > R$ ,  $f(x) > f(0) \geq f(c)$ ; pour  $|x| \leq R$ ,  $f(x) \geq f(c)$ . **Donc  $f(c)$  est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .**
3. D'abord, avec  $\varepsilon = 1$ , il existe  $R \geq 0$  tel que  $|f(x)| \leq 1$  pour  $x \geq R$ . Sur  $[0, R]$ ,  $f$  est bornée par un réel  $M$ , d'après le théorème des bornes atteintes. **Donc  $|f| \leq \max(1, M)$  sur  $[0, +\infty[$ .**  
  
Supposons ensuite  $f(x_0) > 0$ . Avec  $\varepsilon = f(x_0)/2$ , il existe  $R'$  tel que  $f(x) \leq f(x_0)/2 < f(x_0)$  pour  $x \geq R'$ . Quitte à l'augmenter, on suppose  $R' > x_0$ . Sur  $[0, R']$ ,  $f$  atteint son maximum en un point  $c$ , et  $f(c) \geq f(x_0)$ . Par conséquent, pour  $x \geq R'$ ,  $f(x) < f(x_0) \leq f(c)$ . **Donc  $f(c)$  est le maximum de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .**
4. La fonction  $x \rightarrow xe^{-x}$  est continue, tend vers 0 en  $+\infty$  par croissances comparées, et vaut  $e^{-1} > 0$  en 1. Elle admet donc un maximum. Sa dérivée  $(1-x)e^{-x}$  est positive sur  $[0, 1]$  et négative sur  $[1, +\infty[$ . **Le maximum vaut  $1/e$ , atteint en  $x = 1$ .**

## Corrigé de l'exercice 12 : Images d'intervalles

---

1. On a  $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ . La fonction décroît sur  $[-1, 1]$  de 3 à  $-1$ , puis croît sur  $[1, 2]$  de  $-1$  à 0. Son minimum sur  $[-1, 2]$  vaut  $-1$  et son maximum vaut 3. **L'image est le segment  $[-1, 3]$ .**

2. Posons  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Alors  $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ . Ainsi,  $g$  décroît sur  $] -\infty, -1]$ , croît sur  $[-1, 1]$  et décroît sur  $[1, +\infty[$ . De plus,  $g(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  $g(1) = \frac{1}{2}$  et  $g$  tend vers 0 en  $\pm\infty$ . Enfin,  $|x| \leq \frac{1+x^2}{2}$  car  $(|x| - 1)^2 \geq 0$ , donc  $|g| \leq \frac{1}{2}$ . **L'image de  $\mathbb{R}$  est  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .**
3. Sur  $]0, 2\pi[$ , le sinus atteint 1 en  $\pi/2$  et  $-1$  en  $3\pi/2$ . L'image est un intervalle contenu dans  $[-1, 1]$  qui contient  $-1$  et 1. Donc  $\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$ . Par ailleurs,  $\varphi$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, 1]$ , avec  $\varphi(1) = 1$  et une limite  $+\infty$  en  $0^+$ . Donc  $\varphi(]0, 1]) = [1, +\infty[$ . Ainsi, le caractère ouvert et le caractère borné ne sont pas conservés ; seul le caractère d'intervalle l'est.
4. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Or  $]0, 1]$  n'est pas un segment. **Aucune fonction continue sur  $[0, 1]$  n'a pour image  $]0, 1]$ .** En revanche, l'identité de  $]0, 1]$  convient : **sur  $]0, 1]$ , c'est possible.**

## Corrigé de l'exercice 13 : Une bijection et sa réciproque

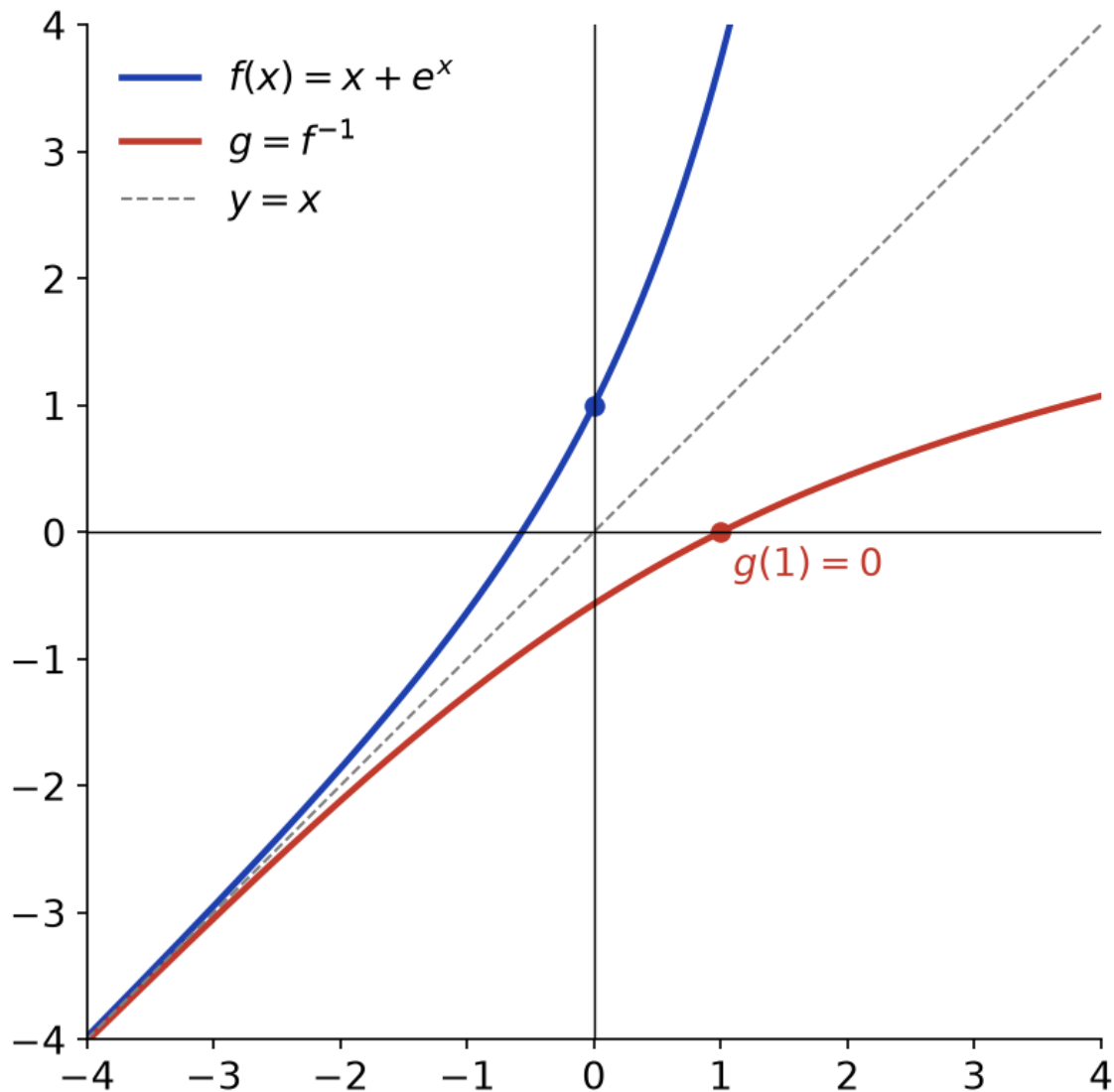
1. La fonction  $f$  est continue et dérivable, avec  $f'(x) = 1 + e^x > 0$ . Elle est donc strictement croissante. En  $-\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  et  $e^x \rightarrow 0$ , donc  $f \rightarrow -\infty$ . En  $+\infty$ ,  $f \rightarrow +\infty$ . D'après le théorème de la bijection,  **$f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .**
2. Le même théorème affirme que  $g$  est continue et strictement croissante. Ensuite,  $f(0) = 0 + 1 = 1$ , donc  $g(1) = 0$ . De même,  $f(1) = 1 + e$ , donc  $g(1 + e) = 1$ .
3. La fonction  $g$  est strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Par le théorème de la limite monotone, elle a des limites en  $\pm\infty$ . Si  $g$  était majorée par  $M$ , on aurait  $y = f(g(y)) \leq f(M)$  pour tout  $y$ , ce qui est faux. **Donc  $g \rightarrow +\infty$  en  $+\infty$  et, de même,  $g \rightarrow -\infty$  en  $-\infty$ .**
4. Pour  $y > 1$ , posons  $x = g(y) > 0$ , de sorte que  $y = x + e^x$ . Alors :

$$\ln y = \ln(e^x(1 + xe^{-x})) = x + \ln(1 + xe^{-x}).$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $xe^{-x} \rightarrow 0$ , donc  $\ln(1 + xe^{-x}) \rightarrow 0$  et  $\frac{\ln(x + e^x)}{x} \rightarrow 1$ . Or  $g(y) \rightarrow +\infty$  quand  $y \rightarrow +\infty$ . Par composition des limites,  $\frac{\ln y}{g(y)} \rightarrow 1$ . **Donc**

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{\ln y} = 1.$$

5. Avec  $x = g(y)$ , on a  $g(y) - y = x - (x + e^x) = -e^x$ . Quand  $y \rightarrow -\infty$ ,  $g(y) \rightarrow -\infty$ , donc  $e^{g(y)} \rightarrow 0$ . Ainsi  $\lim_{y \rightarrow -\infty} (g(y) - y) = 0$  : la courbe de  $g$  admet la droite  $y = x$  pour asymptote en  $-\infty$ . La figure ci-dessous montre les deux courbes symétriques.



**Point de méthode :** pour étudier une réciproque sans formule, on pose  $x = g(y)$  et on traduit tout en fonction de  $x$ , puis on revient à  $y$  par composition des limites.

## Corrigé de l'exercice 14 : Réciproque de la tangente hyperbolique

---

1. Comme  $\operatorname{sh}$  est impaire et  $\operatorname{ch}$  paire,  $\operatorname{th}$  est impaire. Elle est continue, car  $\operatorname{ch}$  ne s'annule pas. Sa dérivée vaut  $\frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0$ , donc elle est strictement croissante. Enfin,  $\operatorname{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow 1$  en  $+\infty$ . **Par imparité,  $\operatorname{th}$  tend vers  $-1$  en  $-\infty$  et vers  $1$  en  $+\infty$ .**

2. D'après le théorème de la bijection,  **$\operatorname{th}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $J = ]-1, 1[$ .**

3. Soit  $y \in ]-1, 1[$ . L'égalité  $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y$  équivaut à  $e^{2x} - 1 = y e^{2x} + y$ , soit  $e^{2x}(1 - y) = 1 + y$ . Comme  $1 - y > 0$  et  $1 + y > 0$ , on obtient  $e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} > 0$ .  
Donc :

$$\operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y}{1 - y} \right).$$

**C'est l'expression explicite de la réciproque.**

4. La fonction  $y \rightarrow \frac{1 + y}{1 - y} = -1 + \frac{2}{1 - y}$  est continue, strictement croissante et strictement positive sur  $] -1, 1[$ . Par composition avec  $\ln$ ,  **$\operatorname{argth}$  est continue et strictement croissante.** Ensuite,  $\operatorname{argth}(-y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - y}{1 + y} \right) = -\operatorname{argth}(y)$  : elle est impaire. Enfin, quand  $y \rightarrow 1^-$ ,  $\frac{1 + y}{1 - y} \rightarrow +\infty$ . **Donc  $\operatorname{argth}$  tend vers  $+\infty$  en  $1^-$  et, par imparité, vers  $-\infty$  en  $-1^+$ .** On retrouve ce qu'annonçait le théorème de la bijection.

## Corrigé de l'exercice 15 : Injections continues

---

1. D'abord,  $x_t$  et  $y_t$  sont dans  $I$ , car un intervalle contient tout segment joignant deux de ses points. De plus,  $y_t - x_t = (1 - t)(y - x) + t(y' - x') > 0$ . Comme  $f$  est injective,  $f(y_t) \neq f(x_t)$  :  **$\varphi$  ne s'annule pas.** Par ailleurs,  $\varphi$  est continue par composition. Si  $\varphi(0)$  et  $\varphi(1)$  étaient de signes contraires, le TVI donnerait un zéro de  $\varphi$ . Donc

$f(y) - f(x) = \varphi(0)$  et  $f(y') - f(x') = \varphi(1)$  ont le même signe. Ainsi, soit  $f(y) > f(x)$  pour tous  $x < y$ , soit  $f(y) < f(x)$  pour tous  $x < y$ .  $f$  est strictement monotone.

- Supposons  $f$  continue avec  $f \circ f = -\text{id}$ . Si  $f(x) = f(y)$ , alors  $-x = f(f(x)) = f(f(y)) = -y$  :  $f$  est injective. D'après la question 1,  $f$  est strictement monotone. Or la composée de deux fonctions strictement croissantes, ou de deux fonctions strictement décroissantes, est strictement croissante. Donc  $f \circ f$  est strictement croissante, alors que  $-\text{id}$  est strictement décroissante. **Une telle fonction n'existe pas.**
- L'image de  $[0, 1]$  par une fonction continue est un segment, et  $]0, 1[$  n'en est pas un. **Il n'existe donc pas de surjection continue de  $[0, 1]$  sur  $]0, 1[$ .** Ensuite, soit  $f$  une bijection continue de  $]0, 1[$  sur  $[0, 1]$ . Elle est injective, donc strictement monotone ; supposons-la croissante. Il existe  $c \in ]0, 1[$  tel que  $f(c) = 1$ . Pour  $x \in ]c, 1[$ , on aurait  $f(x) > 1$ , ce qui est impossible. Le cas décroissant se traite de même avec la valeur 0. **Aucune bijection continue de  $]0, 1[$  sur  $[0, 1]$  n'existe.**
- Pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $2\pi x \in ]0, 2\pi[$ , et  $\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$ . Donc  $\frac{1 + \sin(2\pi x)}{2}$  décrit exactement  $[0, 1]$ , avec la valeur 1 en  $x = 1/4$  et 0 en  $x = 3/4$ . **C'est une surjection continue de  $]0, 1[$  sur  $[0, 1]$**  ; elle n'est pas injective, ce qui est cohérent avec la question 3.

## Corrigé de l'exercice 16 : Fonctions à valeurs complexes

---

- Si  $e^{it}$  avait une limite  $\ell$  en  $+\infty$ , sa partie réelle  $\cos t$  tendrait vers  $\text{Re}(\ell)$ . Or  $\cos$  n'a pas de limite en  $+\infty$  (exercice 3). **Donc  $t \rightarrow e^{it}$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .** En revanche,  $\left| \frac{e^{it}}{t} \right| = \frac{1}{t} \rightarrow 0$ . **Donc  $\frac{e^{it}}{t} \rightarrow 0$  en  $+\infty$ .**
- On a  $h(t) = \frac{\cos t - 1}{t} + i \frac{\sin t}{t}$ . La partie réelle est le taux d'accroissement de  $\cos$  en 0 ; elle tend vers  $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$ . La partie imaginaire tend vers  $\sin'(0) = 1$ . **Donc  $h$  tend vers  $i$  et se prolonge par continuité en posant  $h(0) = i$ .**
- On trouve  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(1) = e^{i\pi} = -1$  et  $|\varphi(t)| = 1$  pour tout  $t$ . Ainsi,  $\varphi$  est continue et joint 1 à  $-1$  sans jamais s'annuler, alors que 0 est « entre » 1 et  $-1$  sur l'axe réel. **Le théorème des valeurs intermédiaires est faux pour les fonctions à valeurs complexes.** L'image de  $\varphi$  est le demi-cercle supérieur, qui contourne 0.
- La fonction  $|f| = \sqrt{(\text{Re } f)^2 + (\text{Im } f)^2}$  est continue et à valeurs réelles. D'après le théorème

des bornes atteintes, elle est bornée sur  $[a, b]$  et atteint son maximum en un point  $c$ . **Donc  $f$  est bornée et  $|f(c)| = \max_{[a, b]} |f|$ .**

## Corrigé de l'exercice 17 : Théorème de la corde universelle

---

1. Pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on a  $\frac{k}{n} \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ , donc  $g(k/n)$  est défini. La somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = f(1) - f(0) = 0.$$

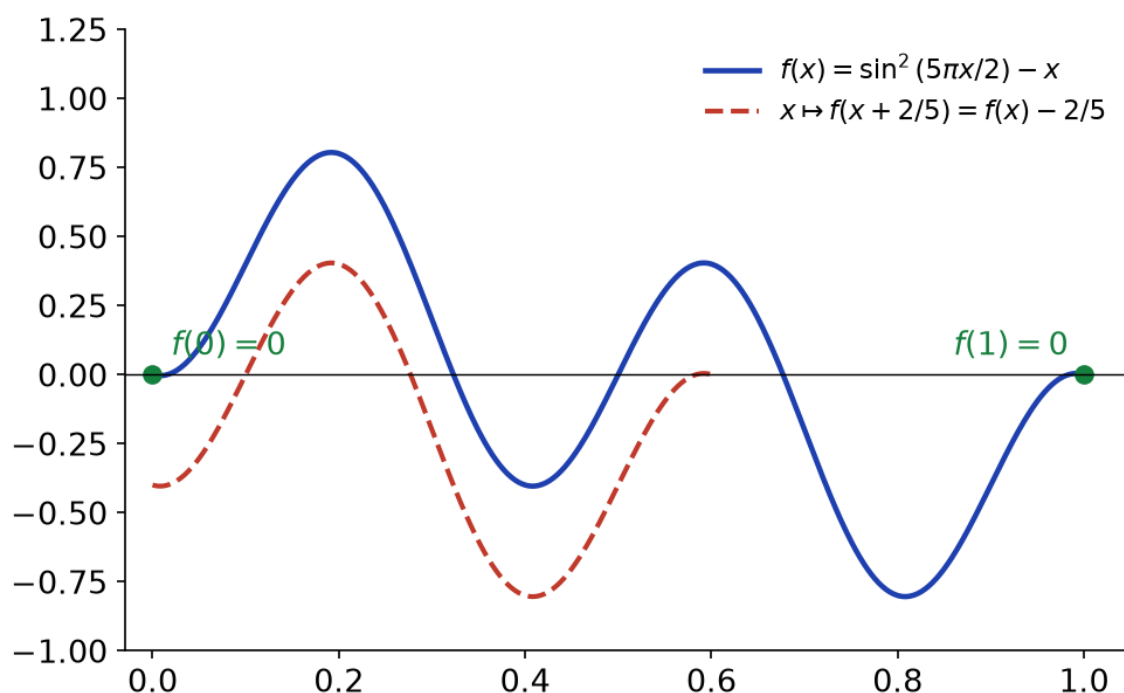
**La somme est nulle.**

2. Si l'un des  $g(k/n)$  est nul,  $c = k/n$  convient. Sinon, les  $n$  termes sont non nuls et de somme nulle : ils ne sont pas tous du même signe. Il existe donc  $i$  et  $j$  tels que  $g(i/n) > 0$  et  $g(j/n) < 0$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ . Le TVI, appliqué entre  $i/n$  et  $j/n$ , fournit  $c$  tel que  $g(c) = 0$ . **Ainsi,  $f(c + 1/n) = f(c)$ .** Géométriquement, la courbe de  $f$  possède une corde horizontale de longueur  $1/n$ .

3. La fonction  $f$  est continue comme composée et somme de fonctions continues. Ensuite,  $f(0) = 0$  et  $f(1) = \sin^2(\pi/a) - \sin^2(\pi/a) = 0$ . Enfin, pour  $x \in [0, 1 - a]$ ,  $\sin^2\left(\frac{\pi(x+a)}{a}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a} + \pi\right) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ . Donc :

$$f(x+a) - f(x) = -(x+a)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) + x\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = -a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right).$$

Or  $\sin(\pi/a) = 0$  équivaut à  $1/a \in \mathbb{Z}$ , ce qui est exclu. **Donc  $f(x+a) - f(x)$  est une constante non nulle, et  $f(x+a) \neq f(x)$  pour tout  $x$ .** La figure ci-dessous traite le cas  $a = 2/5$  : la courbe décalée reste parallèle, à distance  $2/5$  en dessous.



4. D'après les questions 2 et 3, **les longueurs universelles sont exactement les  $a = 1/n$ , avec  $n \geq 2$  entier**. Pour toute autre longueur, la fonction de la question 3 fournit un contre-exemple.

## Corrigé de l'exercice 18 : Fonctions continues périodiques

- Soit  $x$  réel et  $k = \lfloor x/T \rfloor$ . Alors  $x - kT \in [0, T[$  et, par périodicité,  $f(x) = f(x - kT)$ . Donc  $f(\mathbb{R}) \subset f([0, T])$ , et l'inclusion inverse est évidente. **Ainsi  $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$** . Or  $f$  est continue sur le segment  $[0, T]$  : d'après le théorème des bornes atteintes,  $f([0, T]) = [m, M]$ . **Donc  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et atteint ses bornes.**
- Soit  $x$  réel. La suite  $(x + nT)$  tend vers  $+\infty$ . Par la caractérisation séquentielle,  $f(x + nT) \rightarrow \ell$ . Or  $f(x + nT) = f(x)$  pour tout  $n$ . La suite est constante, donc sa limite vaut  $f(x)$ . **Ainsi  $f(x) = \ell$  pour tout  $x$  :  $f$  est constante.**
- La fonction  $f - g$  est continue,  $T$ -périodique, et tend vers 0 en  $+\infty$ . D'après la question 2, elle est constante égale à 0. **Donc  $f = g$ .**

4. Pour tout  $x$ ,  $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$  : la fonction est bornée. Sa borne inférieure 0 est atteinte en tout entier. En revanche, sa borne supérieure vaut 1, car  $x - \lfloor x \rfloor$  tend vers 1 quand  $x \rightarrow 1^-$ , mais cette valeur n'est jamais atteinte. **La fonction est bornée mais n'atteint pas sa borne supérieure** ; ce n'est pas contradictoire, car elle n'est pas continue aux entiers.

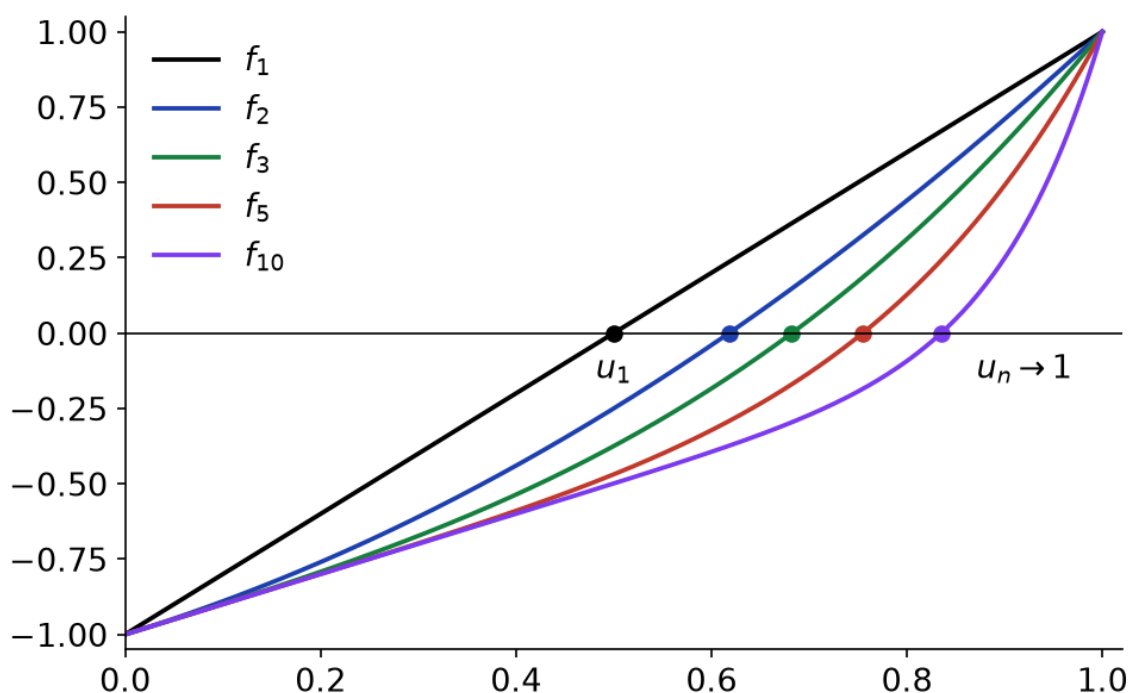
## **Corrigé de l'exercice 19 : Problème : une suite définie par des racines**

---

- La fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Pour  $n \geq 2$ ,  $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$  ; pour  $n = 1$ ,  $f'_1 = 2$ . Ainsi  $f_n$  est strictement croissante. De plus,  $f_n(0) = -1 < 0$  et  $f_n(1) = 1 > 0$ . Le TVI fournit un zéro dans  $]0, 1[$ , et la stricte monotonie assure son unicité sur  $[0, +\infty[$ . **Il existe un unique  $u_n \geq 0$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ , et  $u_n \in ]0, 1[$ .**
- D'abord,  $f_1(x) = 2x - 1$ , donc  $u_1 = \frac{1}{2}$ . Ensuite,  $x^2 + x - 1 = 0$  a pour racines  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , dont une seule est positive. **Donc  $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ .**
- Comme  $u_n + u_n^n - 1 = 0$ , on a  $u_n - 1 = -u_n^n$ . Donc :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 = u_n^{n+1} - u_n^n = u_n^n(u_n - 1).$$

Or  $u_n \in ]0, 1[$ , donc  $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ . Comme  $f_{n+1}$  est strictement croissante, on en déduit  $u_n < u_{n+1}$ . **La suite  $(u_n)$  est strictement croissante.** La figure ci-dessous montre les zéros successifs, qui se déplacent vers la droite.



4. La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone pour les suites, elle converge vers  $\ell \leq 1$ . De plus,  $\ell \geq u_1 = \frac{1}{2}$ . **Donc**  $\ell \in [\frac{1}{2}, 1] \subset ]0, 1]$ .
5. Supposons  $\ell < 1$ . Comme  $(u_n)$  croît vers  $\ell$ , on a  $0 < u_n \leq \ell$ , donc  $0 < u_n^n \leq \ell^n$ . Or  $\ell^n \rightarrow 0$  car  $0 \leq \ell < 1$ . Par encadrement,  $u_n^n \rightarrow 0$ . Par conséquent,  $u_n = 1 - u_n^n \rightarrow 1$ , ce qui contredit  $\ell < 1$ . **Donc**  $\ell = 1$ .
6. Posons  $\varepsilon_n = 1 - u_n \in ]0, 1[$ . La relation  $f_n(u_n) = 0$  s'écrit  $\varepsilon_n = u_n^n = (1 - \varepsilon_n)^n$ . L'inégalité de Bernoulli donne  $\varepsilon_n \geq 1 - n\varepsilon_n$ , donc  $(n+1)\varepsilon_n \geq 1$ . Ainsi  $1 - u_n \geq \frac{1}{n+1}$ , c'est-à-dire  $u_n \leq \frac{n}{n+1}$ . Vérifions : pour  $n = 1$ ,  $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  (égalité). Pour  $n = 2$ ,  $u_2 \leq \frac{2}{3}$  équivaut à  $\sqrt{5} \leq \frac{7}{3}$ , soit  $5 \leq \frac{49}{9}$ , ce qui est vrai.

**Point de méthode :** pour comparer les zéros de deux fonctions strictement croissantes, on évalue l'une au zéro de l'autre et on regarde le signe.

## Corrigé de l'exercice 20 : Monotonie et image d'un intervalle

1. Par le théorème de la limite monotone,  $f(a^-) = \sup_{x < a} f(x)$  et  $f(a^+) = \inf_{x > a} f(x)$ , avec  $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$ . L'intervalle ouvert  $]f(a^-), f(a^+)[$  est infini ; il contient donc un réel  $y \neq f(a)$ . Pour  $x < a$ ,  $f(x) \leq f(a^-) < y$ . Pour  $x > a$ ,  $f(x) \geq f(a^+) > y$ . Enfin,  $f(a) \neq y$ . **Donc**  $y \notin f(I)$ . Or,  $a$  étant intérieur, il existe  $x_1 < a < x_2$  dans  $I$ , et  $f(x_1) < y < f(x_2)$ . Comme  $f(I)$  est un intervalle, il contient  $y$  : c'est une contradiction. Par conséquent,  $f(a^-) = f(a^+)$ , et l'encadrement donne  $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$ .  **$f$  est continue en  $a$ .**
2. Supposons que  $a = \min I$ . On a  $f(a) \leq f(a^+)$ . Si l'inégalité était stricte, un réel  $y \in ]f(a), f(a^+)[$  ne serait pas dans  $f(I)$ , puisque  $f(x) \geq f(a^+) > y$  pour  $x > a$ . Pourtant,  $f(a) < y < f(x_2)$  pour tout  $x_2 > a$  : contradiction. Donc  $f$  est continue à droite en  $a$ . L'extrémité droite se traite de même. **Ainsi  $f$  est continue sur  $I$ .**
3. Soit  $f : I \rightarrow J$  une bijection continue strictement croissante et  $g = f^{-1}$ . La fonction  $g$  est croissante, et  $g(J) = I$  est un intervalle. D'après les questions 1 et 2,  **$g$  est continue sur  $J$ .**
4. Pour  $0 \leq x < y \leq 1$ ,  $f(x) = x < y = f(y)$ . Pour  $1 < x < y \leq 2$ ,  $f(x) = x + 1 < y + 1$ . Enfin, si  $x \leq 1 < y$ , alors  $f(x) \leq 1 < 2 < f(y)$ . Donc  $f$  est strictement croissante. En 1, la limite à droite vaut 2 alors que  $f(1) = 1$  :  $f$  est discontinue. De plus,  $f([0, 2]) = [0, 1] \cup ]2, 3]$ , qui n'est pas un intervalle, en accord avec la question 2.
5. Soit  $K \subset [0, 1]$  un intervalle. Si  $0 \notin K$ ,  $h$  est continue sur  $K$ , donc  $h(K)$  est un intervalle. Si  $K = \{0\}$ ,  $h(K) = \{0\}$ . Sinon,  $K$  contient un segment  $[0, \delta]$  avec  $\delta > 0$ . Quand  $x$  décrit  $]0, \delta]$ ,  $1/x$  décrit  $[1/\delta, +\infty[$ , qui contient une période entière du sinus. Donc  $h(K) = [-1, 1]$ , qui est un intervalle. **Ainsi  $h$  transforme tout intervalle en intervalle.** Pourtant,  $h$  n'a pas de limite en 0 (exercice 3), **donc elle n'est pas continue : l'hypothèse de monotonie est indispensable.**

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

## Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [limites et continuité, cours de maths sup](#)

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur limites et continuité](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et suites numériques](#)
- Chapitre précédent : [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Chapitre suivant : [Dérivabilité et convexité](#)
- Le même thème en L1 : [limites et continuité, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)