Limites et continuité

Corrigé de l'exercice 1 : Limites par epsilon-delta

1. Pour tout réel x, on a $|(3x-1)-5| = |3x-6| = 3|x-2|$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon / 3$. Alors, si $|x-2| \leq \delta$, on obtient $|(3x-1)-5| \leq 3\delta = \varepsilon$. **Donc** $\lim\limits_{x \to 2} (3x-1) = 5$**, avec** $\delta = \varepsilon/3$**.**

2. On factorise : $|x^2-9| = |x-3|\,|x+3|$. D'abord, on se restreint à $|x-3| \leq 1$. Dans ce cas, $2 \leq x \leq 4$, donc $5 \leq x+3 \leq 7$ et $|x^2-9| \leq 7|x-3|$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \min(1, \varepsilon/7)$. Si $|x-3| \leq \delta$, les deux conditions sont remplies. Par conséquent $|x^2-9| \leq 7\delta \leq \varepsilon$. **Ainsi** $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$**, avec** $\delta = \min(1, \varepsilon/7)$**.**

3. Pour $x > 0$, on a $\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{x}$. Si $|x-1| \leq \frac{1}{2}$, alors $x \geq \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{x} \leq 2$. On obtient $\left|\frac{1}{x} - 1\right| \leq 2|x-1|$. Soit $\varepsilon > 0$; on pose $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Alors $|x-1| \leq \delta$ entraîne $\left|\frac{1}{x} - 1\right| \leq 2\delta \leq \varepsilon$. **Donc** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$**, avec** $\delta = \min(1/2, \varepsilon/2)$**.**

Point de méthode : la restriction préalable ($|x-3| \leq 1$ ou $|x-1| \leq 1/2$) sert à majorer le facteur parasite par une constante. C'est pourquoi δ est un minimum de deux quantités.

Corrigé de l'exercice 2 : Limites en l'infini et limites infinies

1. Pour $x > 0$, on calcule $\frac{2x+1}{x+3} - 2 = \frac{2x+1-2x-6}{x+3} = \frac{-5}{x+3}$. Donc $\left|\frac{2x+1}{x+3} - 2\right| = \frac{5}{x+3} < \frac{5}{x}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A = 5/\varepsilon > 0$. Pour $x \geq A$, on a $\frac{5}{x} \leq \varepsilon$, donc l'écart est inférieur à ε. **Ainsi la limite vaut 2, avec le seuil** $A = 5/\varepsilon$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Soit $M \in \mathbb{R}$ et $A = \sqrt{|M|}$. Pour $x \geq A \geq 0$, la croissance du carré sur $[0, +\infty[$ donne $x^2 \geq A^2 = |M| \geq M$. **Donc** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

3. Soit $M \in \mathbb{R}$ et $M' = \max(M, 1) > 0$. On pose $\delta = 1/M'$. Si $0 < x \leq \delta$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{\delta} = M' \geq M$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. De même, si $-\delta \leq x < 0$, alors $\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{\delta} = -M'$. Or $-M' \leq -M$, donc $\frac{1}{x} \leq -M$. **Par conséquent** $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

4. Si $x \to 1/x$ avait une limite L en 0 (finie ou infinie), ses restrictions à $]0, +\infty[$ et à $]-\infty, 0[$ auraient aussi la limite L. Or ces restrictions ont des limites différentes, $+\infty$ et $-\infty$. **La fonction** $1/x$ **n'a donc pas de limite en 0.**

Corrigé de l'exercice 3 : Limites à gauche et à droite

1. Pour $x > 1$, $|x - 1| = x - 1$, donc $f(x) = 1$. Pour $x < 1$, $|x-1| = -(x-1)$, donc $f(x) = -1$. Ainsi, la limite à droite en 1 vaut 1 et la limite à gauche vaut -1. **Ces limites diffèrent, donc** f **n'a pas de limite en 1.**

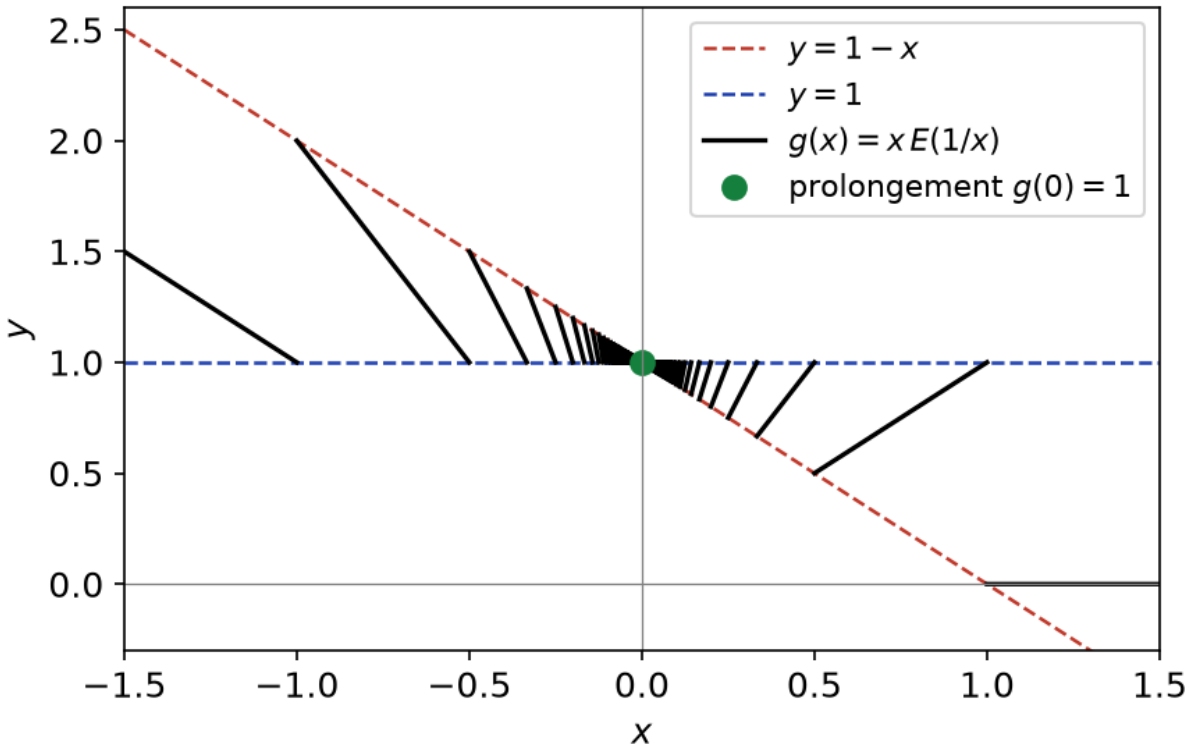
2. Sur $[n-1, n[$, on a $E(x) = n - 1$; sur $[n, n+1[$, on a $E(x) = n$. Donc $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n-1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n = E(n)$. En chaque entier, E est continue à droite mais pas à gauche. En revanche, sur chaque intervalle ouvert $]n, n+1[$, E est constante, donc continue. **La partie entière est continue exactement sur** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3. Par définition de la partie entière, $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Si $x > 0$, on multiplie par $x > 0$ sans changer le sens : $1 - x < g(x) \leq 1$. Si $x < 0$, la multiplication par x renverse les inégalités : $1 - x > g(x) \geq 1$. **On obtient bien les deux encadrements demandés.**

4. Quand $x \to 0^+$, on a $1 - x \to 1$. Par le théorème d'encadrement, $g(x) \to 1$. De même, quand $x \to 0^-$, g est coincée entre 1 et $1 - x$, qui tendent vers 1. Les deux limites latérales valent donc 1. Comme g n'est pas définie en 0, elle admet la limite 1 en 0. **Donc** g **se prolonge par continuité en posant** $g(0) = 1$.

La figure ci-dessous montre la courbe de g, formée de segments. Elle reste entre les droites $y = 1$ et

$y = 1 - x$, qui se coupent au point $(0, 1)$.



Corrigé de l'exercice 4 : Fonctions monotones et limites latérales

1. L'ensemble $\{ f(x) \mid b < x < x_0 \}$ est non vide, car $]b, x_0[$ n'est pas vide. De plus, il est majoré par $f(x_0)$, puisque f est croissante. D'après l'axiome de la borne supérieure, ℓ^- existe. Enfin, $f(x_0)$ est un majorant, donc $\ell^- \leq f(x_0)$, car la borne supérieure est le plus petit des majorants. **Ainsi** ℓ^- **existe et** $\ell^- \leq f(x_0)$ **.**

2. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell^- - \varepsilon$ n'est pas un majorant, donc il existe $x_1 \in]b, x_0[$ tel que $f(x_1) > \ell^- - \varepsilon$. On pose $\delta = x_0 - x_1 > 0$. Soit $x \in]b, x_0[$ avec $|x - x_0| \leq \delta$. Alors $x \geq x_1$, donc $f(x) \geq f(x_1) > \ell^- - \varepsilon$ par croissance. D'autre part, $f(x) \leq \ell^-$ par définition de ℓ^- . Par conséquent $|f(x) - \ell^-| < \varepsilon$. **Donc** $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$ **.**

3. De façon symétrique, $\ell^+ = \inf\{f(x) \mid x_0 < x < c\}$ existe, vérifie $f(x_0) \leq \ell^+$, et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+$. En combinant avec la question 1, **on obtient** $\ell^- \leq f(x_0) \leq \ell^+$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Si f est continue en x_0, elle y tend vers $f(x_0)$. Ses restrictions à gauche et à droite aussi, donc $\ell^- = f(x_0) = \ell^+$. Réciproquement, si $\ell^- = \ell^+$, l'encadrement de la question 3 force $\ell^- = f(x_0) = \ell^+$. Les limites à gauche et à droite existent et valent $f(x_0)$. D'après le cours, f tend alors vers $f(x_0)$ en x_0. **Donc f est continue en x_0 si et seulement si $\ell^- = \ell^+$.**

5. La fonction h est la somme de deux fonctions croissantes, $x \to x$ et E, donc elle est croissante. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur $[n-1, n[$, $h(x) = x + n - 1$, qui tend vers $2n-1$ quand $x \to n^-$. Ensuite, $h(n) = 2n$. Enfin, sur $[n, n+1[$, $h(x) = x + n$, qui tend vers $2n$ quand $x \to n^+$. Ainsi $h(n^-) = 2n-1 \neq 2n = h(n^+)$: h est discontinue en chaque entier. En revanche, sur $]n, n+1[$, h est affine, donc continue. **La fonction h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, avec un saut de 1 en chaque entier.**

Corrigé de l'exercice 5 : Absence de limite par les suites

1. Pour $n \geq 1$, on pose $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$. Ces deux suites de réels non nuls tendent vers 0. De plus, $\sin(1/x_n) = \sin(2n\pi) = 0$ et $\sin(1/y_n) = \sin(\pi/2) = 1$. Si $x \to \sin(1/x)$ avait une limite ℓ en 0, la caractérisation séquentielle donnerait $\ell = 0$ et $\ell = 1$. **Donc $\sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.**

2. Les suites $x_n = 2n\pi$ et $y_n = \pi + 2n\pi$ tendent vers $+\infty$. Pourtant, $\cos(x_n) = 1$ et $\cos(y_n) = -1$ pour tout n. **Par la caractérisation séquentielle, $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.**

3. Avec $x_n = 2n\pi$, on a $x_n \sin x_n = 0$ pour tout n. Avec $y_n = \pi/2 + 2n\pi$, on a $y_n \sin y_n = y_n \to +\infty$. Une limite finie ou infinie L devrait vérifier à la fois $L = 0$ et $L = +\infty$. **Ainsi $x \sin x$ n'a de limite ni finie ni infinie en $+\infty$.**

4. On pose $u(x) = \cos(x)\, e^x$. Pour $x_n = 2n\pi$, on obtient $u(x_n) = e^{2n\pi} \to +\infty$. En revanche, pour $y_n = \pi/2 + 2n\pi$, on obtient $u(y_n) = 0$. **Les deux suites d'images ont des limites différentes, donc u n'a pas de limite en $+\infty$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Fonction indicatrice des rationnels

1. Pour $n \geq 1$, on pose $r_n = \frac{E(na)}{n}$, qui est rationnel. Par définition de la partie entière, $na - 1 < E(na) \leq na$, donc $a - \frac{1}{n} < r_n \leq a$. Par encadrement, $r_n \to a$. Ensuite, on pose $s_n = r_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Si s_n était rationnel, $\sqrt{2} = n(s_n - r_n)$ le serait aussi, ce qui est faux. Donc s_n est irrationnel. Enfin, $|s_n - a| \leq \frac{1+\sqrt{2}}{n} \to 0$. **Les suites (r_n) rationnelle et (s_n) irrationnelle convergent vers a.**

2. On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(s_n) = 0$ pour tout n. Si la fonction était continue en a, les deux suites d'images tendraient vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)$ par caractérisation séquentielle. On aurait alors $1 = 0$. **Donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.**

3. Pour tout réel x, on a $|g(x)| \leq |x|$. Par encadrement, $g(x) \to 0 = g(0)$ quand $x \to 0$: g est continue en 0. Soit maintenant $a \neq 0$. D'une part, $g(r_n) = r_n \to a$. D'autre part, $g(s_n) = 0 \to 0$. Comme $a \neq 0$, ces limites diffèrent. **Par conséquent g est continue en 0 et discontinue en tout $a \neq 0$.**

4. On pose $u(x) = (x-1)(x-2)\,\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. D'abord, $|u(x)| \leq |x-1|\,|x-2|$, qui tend vers 0 en 1 et en 2. Comme $u(1) = u(2) = 0$, u est continue en 1 et en 2. Ensuite, si $a \notin \{1, 2\}$, on a $u(r_n) = (r_n - 1)(r_n - 2) \to (a-1)(a-2) \neq 0$, tandis que $u(s_n) = 0$. **La fonction u est continue en 1 et en 2 exactement.**

Corrigé de l'exercice 7 : Opérations et composition de limites

1. Pour $x \geq -1$, $x \neq 0$, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{(1+x) - 1}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

   La racine carrée est continue en 1, donc $\sqrt{1+x} \to 1$. Par quotient, **la limite vaut $\frac{1}{2}$.**

2. Pour $x > 0$, on a $\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + 1/x}$. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1}.$$

   Or $1/x \to 0$ et la racine est continue en 1. Par composition puis quotient, **la limite vaut $\frac{1}{2}$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Pour $x \neq 0$, $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}$. Quand $x \to 0$, $u = 3x$ tend vers 0 en restant non nul. Par composition, $\frac{\sin u}{u} \to 1$. **Donc la limite vaut 3.**

4. Pour $x > 0$, on pose $u = 1/x$, qui tend vers 0^+. Alors $x \sin(1/x) = \frac{\sin u}{u}$. Par composition, **la limite vaut 1.**

5. Pour $x > 1$, on divise numérateur et dénominateur par x : $\frac{x + \cos x}{x - \sin x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$. Or $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ et $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$. Par encadrement, ces deux quotients tendent vers 0. Ensuite, le dénominateur tend vers $1 \neq 0$. **Par quotient, la limite vaut 1.**

Corrigé de l'exercice 8 : Prolongements par continuité

1. On factorise : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Donc, pour $x \neq 2$, $k(x) = x - 1$, qui tend vers 1 en 2. **La fonction k se prolonge par continuité en posant $k(2) = 1$.**

2. Pour $x \neq 0$, $|f(x)| \leq |x|$, car $|\sin| \leq 1$. Par encadrement, $f(x) \to 0$. On prolonge donc f par $f(0) = 0$. Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue comme produit et composée de fonctions continues. En 0, elle l'est par construction. **Le prolongement, avec $f(0) = 0$, est continu sur $\mathbb{R}$.**

3. Pour $x \neq 0$, on utilise l'identité $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$:

$$g(x) = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2.$$

Quand $x \to 0$, $u = x/2$ tend vers 0 sans s'annuler, donc $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Par produit, g **tend vers $\frac{1}{2}$ et se prolonge par $g(0) = \frac{1}{2}$.**

4. Pour $x > 0$, $h(x) = \frac{\sin x}{x} \to 1$. Pour $x < 0$, $h(x) = -\frac{\sin x}{x} \to -1$. Les limites à gauche et à droite en 0 diffèrent, donc h n'a pas de limite en 0. **La fonction h n'est pas prolongeable par continuité en 0.**

Corrigé de l'exercice 9 : Signe au voisinage d'un point

1. On applique la définition de la continuité en a avec $\epsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour $|x-a| \leq \delta$, $|f(x) - f(a)| \leq \frac{f(a)}{2}$. En particulier, $f(x) \geq f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2}$. **Ainsi** $f \geq f(a)/2 > 0$ **sur** $[a-\delta, a+\delta]$.

2. La fonction $h = |f-g|$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de $f-g$ et de la valeur absolue. Supposons qu'il existe a avec $h(a) > 0$. D'après la question 1, $h \geq h(a)/2 > 0$ sur un intervalle $[a-\delta, a+\delta]$. Or cet intervalle contient un rationnel r, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On aurait donc $h(r) > 0$, alors que $h(r) = 0$. C'est absurde. **Donc** $h = 0$**, c'est-à-dire** $f = g$**.**

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r_n = E(na)/n$, suite de rationnels qui converge vers a (voir l'exercice 6). Pour tout n, $f(r_n) = g(r_n)$. Par continuité en a et caractérisation séquentielle, $f(r_n) \to f(a)$ et $g(r_n) \to g(a)$. **Par unicité de la limite,** $f(a) = g(a)$ **pour tout** a**.**

Corrigé de l'exercice 10 : Équation fonctionnelle de Cauchy

1. Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Ensuite, avec $y = -x$, on a $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, d'où $f(-x) = -f(x)$. Enfin, on raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est $f(0) = 0$. Si $f(nx) = nf(x)$, alors $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)\,f(x)$. **Donc** $f(0) = 0$**,** f **est impaire et** $f(nx) = n\,f(x)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**.**

2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. La question 1 appliquée à $x = 1/q$ et $n = q$ donne $q\,f(1/q) = f(1) = a$, donc $f(1/q) = a/q$. Soit alors $r = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \geq 0$, $f(p/q) = p\,f(1/q) = ap/q$. Si $p < 0$, l'imparité donne $f(p/q) = -f(-p/q) = -a(-p)/q = ap/q$. **Ainsi** $f(r) = ar$ **pour tout** $r \in \mathbb{Q}$**.**

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (r_n) une suite de rationnels de limite x. D'une part, $f(r_n) = a\,r_n \to ax$. D'autre part, f est continue en x, donc $f(r_n) \to f(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = ax$. Réciproquement, $x \to ax$ est continue et vérifie $a(x+y) = ax + ay$. **Les solutions sont exactement les fonctions linéaires** $x \to ax$**,** $a \in \mathbb{R}$**.**

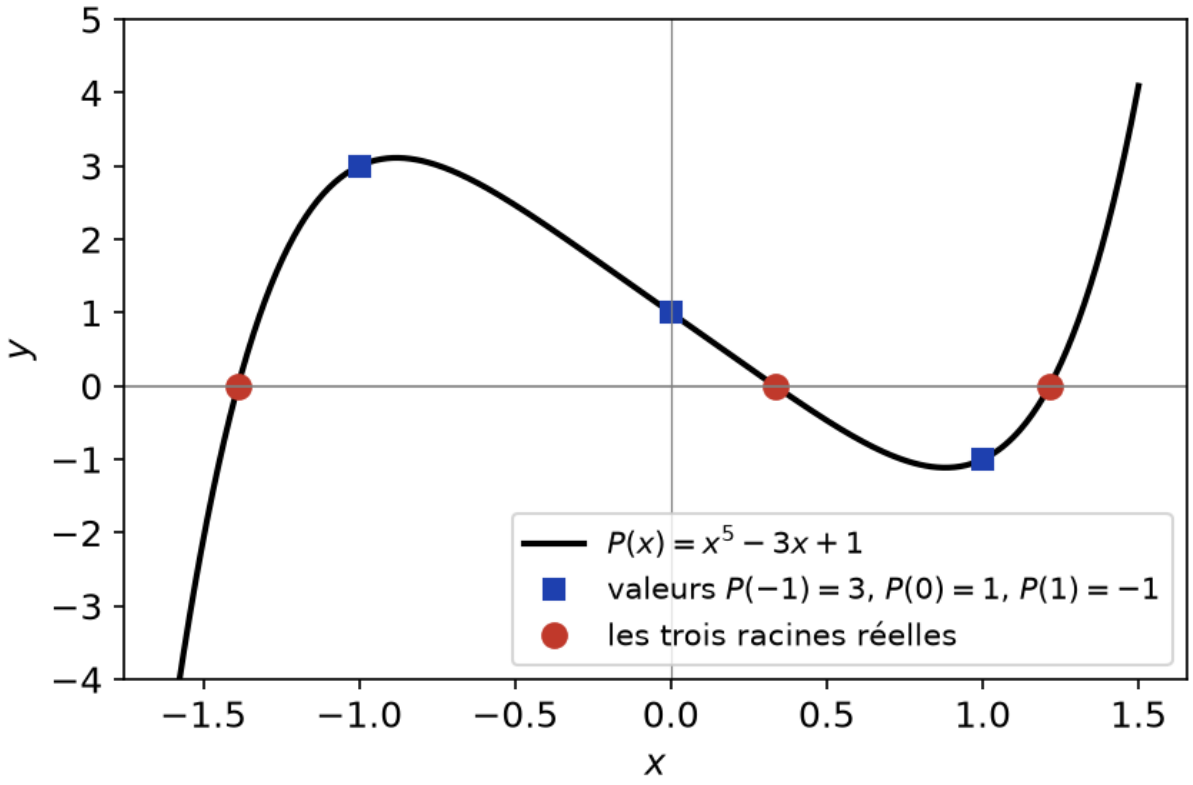
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Point de méthode : on détermine d'abord la fonction sur une partie dense (ici $\mathbb{Q}$), puis la continuité étend l'égalité à tout $\mathbb{R}$ grâce à la caractérisation séquentielle.

Corrigé de l'exercice 11 : Existence de racines par le TVI

1. On calcule $P(-2) = -32 + 6 + 1 = -25$, $P(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$, $P(0) = 1$, $P(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ et $P(2) = 32 - 6 + 1 = 27$. La fonction polynôme P est continue sur $\mathbb{R}$. Elle change de signe sur $[-2, -1]$, sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule dans chacun des intervalles ouverts $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$. Ces intervalles sont disjoints, donc les trois racines sont distinctes. **Le polynôme P a au moins trois racines réelles, dans $]-2,-1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$.**

La figure ci-dessous confirme cette localisation. On y lit trois racines, proches de $-1{,}39$, $0{,}33$ et $1{,}21$.



2. Soit $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, avec n impair et $c_n \neq 0$. Quitte à remplacer Q par $-Q$, qui a les mêmes racines, on suppose $c_n > 0$. Pour $x \neq 0$, on écrit

$$Q(x) = c_n x^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{c_n} x^{k-n}\right).$$

La parenthèse tend vers 1 en $\pm\infty$, car $k - n < 0$. Comme n est impair, $x^n \to +\infty$ en $+\infty$ et $x^n \to -\infty$ en $-\infty$. Il existe donc $A > 0$ tel que $Q(-A) < 0 < Q(A)$. Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[-A, A]$ conclut. **Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.**

3. La fonction $f : x \to x^3 + x - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme des fonctions strictement croissantes $x \to x^3$ et $x \to x - 1$. Ses limites sont $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection continue, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc 0 a un unique antécédent c. Enfin, $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$, donc $c \in]0, 1[$. **L'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution réelle, située dans $]0, 1[$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Théorème du point fixe sur un segment

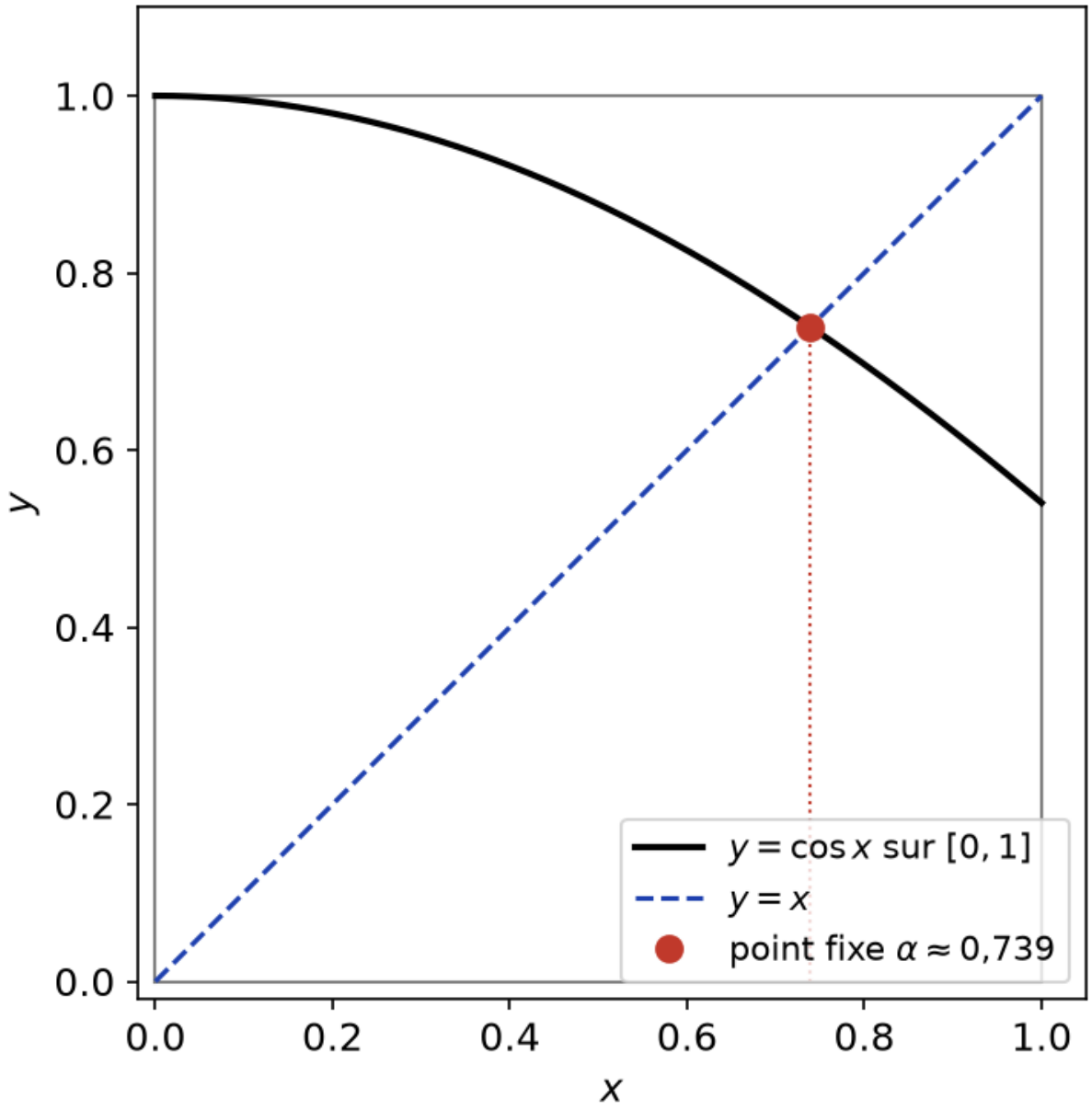
1. On pose $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0, 1]$. Comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, on a $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$. **Donc $f(c) = c$: f admet un point fixe.**

2. Comme $[0, 1] \subset [0, \pi]$, le cosinus est décroissant sur $[0, 1]$. Donc $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1]$. Or $0 < 1 < \pi/2$, donc $\cos 1 > 0$. Ainsi $\cos$ envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, et la question 1 fournit une solution de $\cos x = x$. Pour l'unicité, $h : x \to \cos x - x$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$, comme somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante. Elle s'annule donc au plus une fois. **L'équation $\cos x = x$ a une unique solution α dans $[0, 1]$, avec $\alpha \approx 0{,}739$.**

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe du cosinus reste dans le carré $[0, 1]^2$. Elle croise donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

la diagonale $y = x$, en un seul point.



3. La fonction $f : x \to x/2$ est continue de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$. Cependant, $f(x) = x$ équivaut à $x = 0$, qui n'appartient pas à $]0, 1[$. **Le résultat tombe en défaut sans les extrémités du segment.**

Corrigé de l'exercice 13 : Théorème des cordes horizontales

1. On calcule directement : $g(0)+g(1/2)=f(1/2)-f(0)+f(1)-f(1/2)=f(1)-f(0)$. **Donc** $g(0)+g(1/2)=0$**.**

2. La fonction g est continue sur $[0,1/2]$, par composition et différence. D'après la question 1, $g(0)$ et $g(1/2)$ sont opposés. Ils sont donc nuls tous les deux, ou de signes contraires. Dans les deux cas, le théorème des valeurs intermédiaires fournit $c\in[0,1/2]$ avec $g(c)=0$. **Ainsi** $f(c+1/2)=f(c)$**.**

3. Les points k/n, pour $0\leq k\leq n-1$, appartiennent à $[0,1-1/n]$. La somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\tfrac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\tfrac{k+1}{n}\right)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right]=f(1)-f(0)=0.$$

   Si tous les termes étaient strictement positifs, la somme le serait aussi ; de même s'ils étaient tous strictement négatifs. Donc soit un terme est nul, soit il existe i et j avec $g_n(i/n)<0<g_n(j/n)$. Dans le second cas, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à g_n, continue, entre i/n et j/n. **Il existe** $c\in[0,1-1/n]$ **tel que** $f(c+1/n)=f(c)$**.**

4. Notons $d(t)$ la distance parcourue à l'instant t, en heures, avec $d(0)=0$ et $d(1)=30$. On pose $f(t)=d(t)-30t$, continue sur $[0,1]$, avec $f(0)=f(1)=0$. Pour $n=6$, la question 3 donne c tel que $f(c+1/6)=f(c)$. Autrement dit, $d(c+1/6)-d(c)=30/6=5$. **Entre les instants** c **et** $c+1/6$ **heure, soit 10 minutes, le cycliste parcourt exactement 5 km.**

Corrigé de l'exercice 14 : Méthode de dichotomie

1. Pour $n=0$, on a $f(0)\,f(1)=(-1)\times 1\leq 0$ et $b_0-a_0=1$. Supposons la propriété vraie au rang n. Premier cas : $f(a_n)\,f(m_n)\leq 0$. Alors $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,m_n]$ et $f(a_{n+1})\,f(b_{n+1})\leq 0$. Second cas : $f(a_n)\,f(m_n)>0$. Alors $f(a_n)$ et $f(m_n)$ sont non nuls, de même signe, et $[a_{n+1},b_{n+1}]=[m_n,b_n]$. On écrit

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$f(m_n)\,f(b_n) = \frac{f(m_n)}{f(a_n)}\,f(a_n)\,f(b_n) \le 0,$$

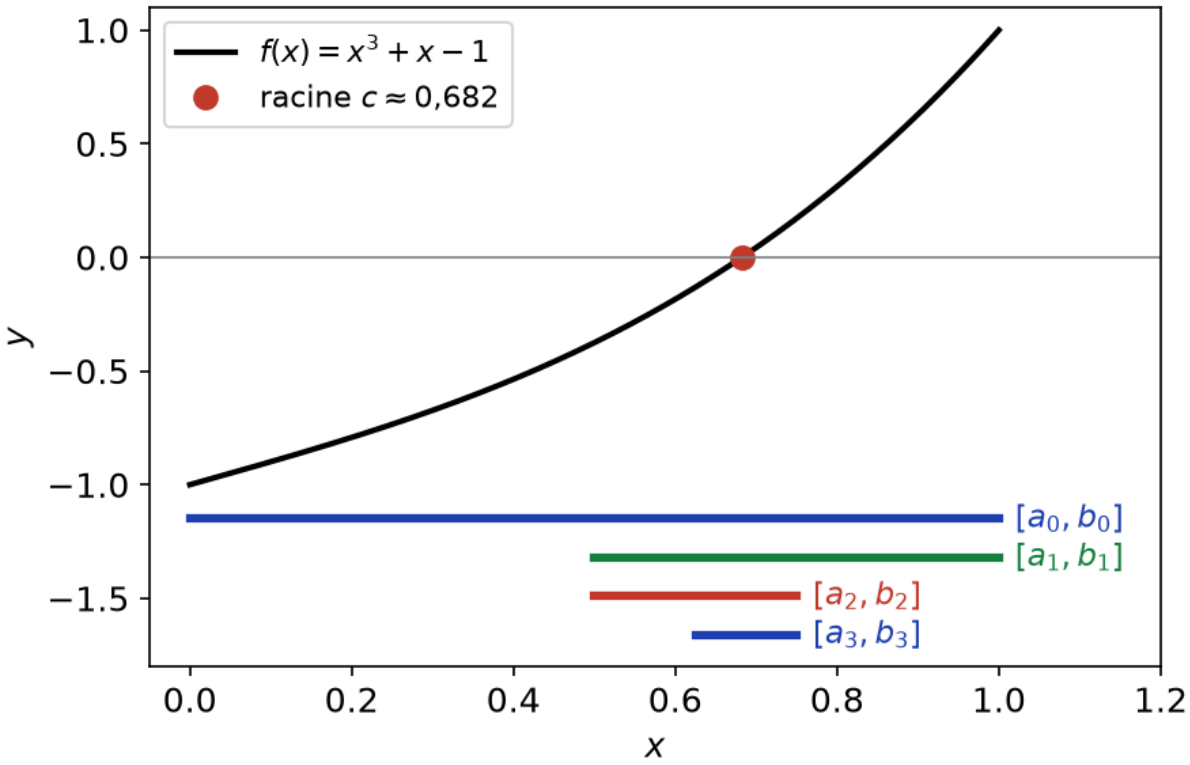
car le quotient est strictement positif. Dans les deux cas, la longueur est divisée par 2. **Donc** $f(a_n)\,f(b_n) \le 0$ **et** $b_n - a_n = 2^{-n}$ **pour tout** n**.**

2. Dans les deux cas, $a_{n+1} \ge a_n$ et $b_{n+1} \le b_n$, car $a_n \le m_n \le b_n$. De plus, $b_n - a_n = 2^{-n} \to 0$. **Les suites** (a_n) **et** (b_n) **sont adjacentes ; elles convergent vers une même limite** $c \in [0,1]$**.**

3. La fonction f est continue en c. Par caractérisation séquentielle, $f(a_n) \to f(c)$ et $f(b_n) \to f(c)$. En passant à la limite dans $f(a_n)\,f(b_n) \le 0$, on obtient $f(c)^2 \le 0$. **Donc** $f(c) = 0$**.**

4. On a $m_0 = 0{,}5$ et $f(0{,}5) = 0{,}125 + 0{,}5 - 1 = -0{,}375$. Comme $f(0)\,f(0{,}5) > 0$, on obtient $[a_1, b_1] = [0{,}5\,;1]$. Ensuite, $f(0{,}75) = 0{,}421875 + 0{,}75 - 1 = 0{,}171875$. Or $f(0{,}5)\,f(0{,}75) < 0$, donc $[a_2, b_2] = [0{,}5\,;0{,}75]$. Enfin, $f(0{,}625) = 0{,}244140625 + 0{,}625 - 1 = -0{,}130859375$. Comme $f(0{,}5)\,f(0{,}625) > 0$, on a $[a_3, b_3] = [0{,}625\,;0{,}75]$. Pour la précision, $0 \le c - a_n \le 2^{-n}$. Or $2^{-10} = 1/1024 < 10^{-3}$, alors que $2^{-9} = 1/512 > 10^{-3}$. **Dix étapes suffisent :** a_{10} **approche** $c \approx 0{,}682$ **à** 10^{-3} **près.**

La figure ci-dessous représente les quatre premiers intervalles emboîtés. Chacun contient la racine et mesure la moitié du précédent.



Corrigé de l'exercice 15 : Minorant strictement positif sur un segment

1. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum $m = f(c)$, avec $c \in [a,b]$. Comme $f(c) > 0$, on a $m > 0$. **Donc $f(x) \geq m > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.**

2. Sur $]0, 1]$, la fonction $x \to x$ est continue et strictement positive. Soit $m > 0$; le point $x = \min(1, m/2)$ vérifie $x \leq m/2 < m$. Aucun $m > 0$ ne minore donc cette fonction. Sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \to e^{-x}$ est continue et strictement positive, mais tend vers 0 en $+\infty$. Pour tout $m > 0$, on a $e^{-x} < m$ dès que $x > -\ln m$. **Le résultat est faux sur $]0, 1]$ et sur $[0, +\infty[$, qui ne sont pas des segments.**

3. La fonction $g - f$ est continue et strictement positive sur $[a,b]$. D'après la question 1, elle est minorée par un réel $\alpha > 0$. **Ainsi $g - f \geq \alpha$, c'est-à-dire $f + \alpha \leq g$ sur $[a,b]$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 16 : Minimum d'une fonction qui tend vers l'infini

1. Comme $f \to +\infty$ en $+\infty$, il existe A_1 tel que $x \geq A_1$ entraîne $f(x) \geq f(0)+1$. De même, il existe A_2 tel que $x \leq -A_2$ entraîne $f(x) \geq f(0)+1$. On pose $A = \max(A_1, A_2, 1) > 0$. **Pour $|x| > A$, on a $f(x) \geq f(0)+1 > f(0)$.**

2. La fonction f est continue sur le segment $[-A, A]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle y admet un minimum $m = f(c)$. Comme $0 \in [-A, A]$, on a $m \leq f(0)$. Pour $|x| > A$, la question 1 donne $f(x) > f(0) \geq m$. Finalement, $f(x) \geq m$ pour tout réel x. **Donc f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$, atteint en c.**

3. La fonction $u : x \to x^2 + \sin(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $u(x) \geq x^2 - 1$, qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Par comparaison, u tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. **La question 2 s'applique : u admet un minimum sur $\mathbb{R}$.**

4. Non. Par exemple, $x \to x^2$ vérifie les hypothèses, mais elle n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. **Une telle fonction n'a pas nécessairement de maximum ; en fait, elle n'en a jamais, puisqu'elle n'est pas majorée.**

Corrigé de l'exercice 17 : Une bijection continue de R sur]-1,1[

1. Le numérateur x et le dénominateur $1+|x|$ sont continus sur $\mathbb{R}$. De plus, $1+|x| \geq 1 > 0$. Par quotient, f est continue. Enfin, $f(-x) = \frac{-x}{1+|x|} = -f(x)$. **La fonction f est continue et impaire.**

2. Pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Pour $x \leq 0$, $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$. Or $1-x$ est strictement décroissante et strictement positive, donc $\frac{1}{1-x}$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. Enfin, si $x < 0 \leq y$, alors $f(x) < 0 \leq f(y)$. **Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

3. En $+\infty$, $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \to 1$. En $-\infty$, $f(x) = -1 + \frac{1}{1-x} \to -1$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection continue, $f(\mathbb{R})$ est l'intervalle ouvert de bornes ces deux limites. **Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.**

4. Soit $y \in [0,1[$. Son antécédent x est positif, puisque f est négative sur $]-\infty,0[$. L'équation $y = \frac{x}{1+x}$ donne $y + yx = x$, donc $x = \frac{y}{1-y}$. Soit maintenant $y \in]-1,0[$. Son antécédent est négatif et $y = \frac{x}{1-x}$ donne $y - yx = x$, donc $x = \frac{y}{1+y}$. Dans les deux cas, $x = \frac{y}{1-|y|}$. Cette expression est continue sur $]-1,1[$, comme quotient de fonctions continues à dénominateur strictement positif. **On a $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ pour $y \in]-1,1[$, et f^{-1} est continue.**

Corrigé de l'exercice 18 : Injectivité et stricte monotonie

1. Si f n'est pas strictement croissante, il existe $x_2 < y_2$ avec $f(x_2) \geq f(y_2)$. Par injectivité, $f(x_2) \neq f(y_2)$, donc $f(x_2) > f(y_2)$. De même, si f n'est pas strictement décroissante, il existe $x_1 < y_1$ avec $f(x_1) \leq f(y_1)$, donc $f(x_1) < f(y_1)$. **Les quatre points demandés existent.**

2. Pour $t \in [0,1]$, le réel $x(t)$ est compris entre x_1 et x_2. Comme I est un intervalle, $x(t) \in I$; de même, $y(t) \in I$. Ensuite,
$$y(t) - x(t) = (1-t)(y_1 - x_1) + t(y_2 - x_2).$$
Les deux termes sont positifs et l'un au moins est strictement positif, car $1-t$ et t ne sont pas nuls simultanément. **Donc $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.**

3. La fonction φ est continue sur $[0,1]$, comme composée de fonctions affines et de f. De plus, $\varphi(0) = f(y_1) - f(x_1) > 0$ et $\varphi(1) = f(y_2) - f(x_2) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_0 avec $\varphi(t_0) = 0$. Alors $f(x(t_0)) = f(y(t_0))$, alors que $x(t_0) \neq y(t_0)$. Cela contredit l'injectivité. **Donc f est strictement monotone sur I.**

4. Sur $[0,2]$, on pose $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(x) = 3 - x$ si $x \geq 1$. Sur $[0,1[$, f est injective, d'image $[0,1[$. Sur $[1,2]$, elle est injective, d'image $[1,2]$. Ces images sont disjointes, donc f est injective. Pourtant $f(0) = 0 < f(1) = 2$ et $f(1) = 2 > f(2) = 1$. **Cette fonction injective, discontinue en 1, n'est pas monotone.**

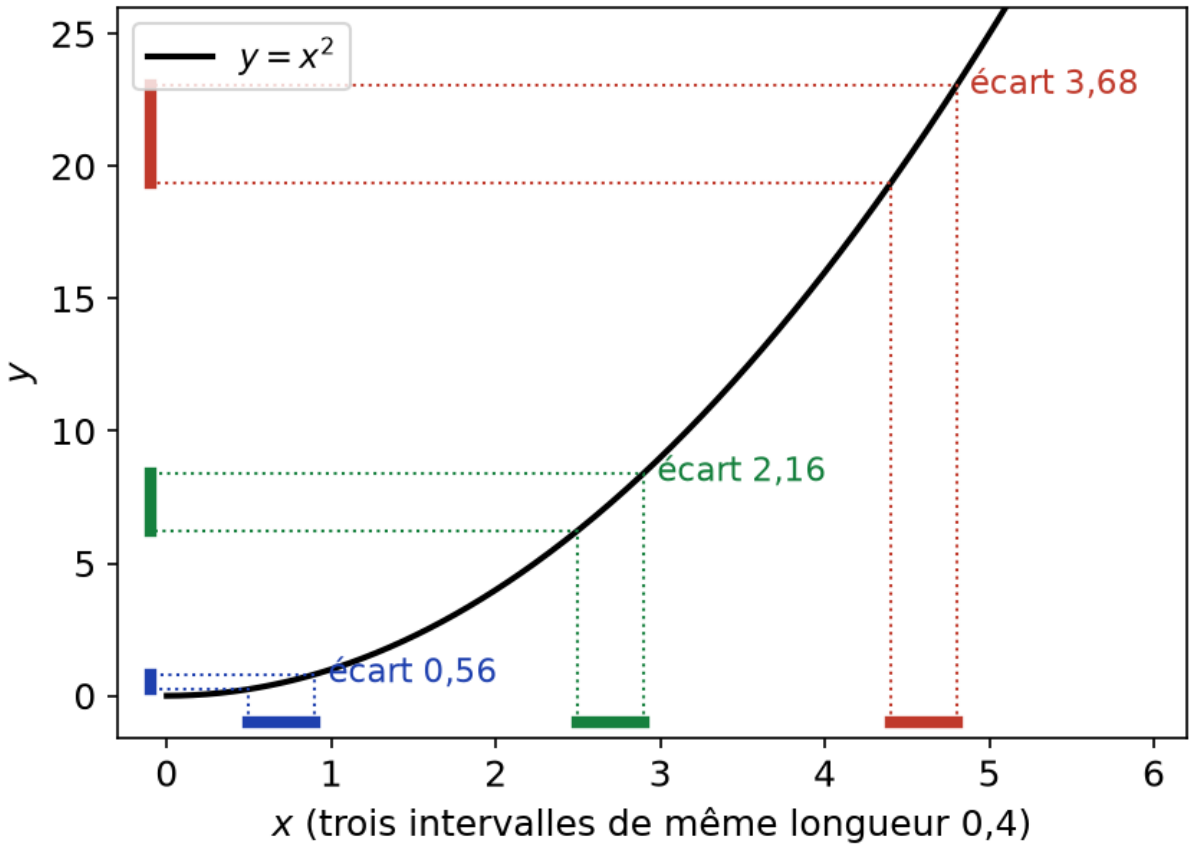
5. La fonction $x \to 1/x$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^*$. Cependant, $f(-1) = -1 < f(1) = 1$, tandis que $f(1) = 1 > f(2) = 1/2$. **Elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 19 : Continuité uniforme du carré et de la racine

1. On pose $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$, pour $n \geq 1$. Alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$. Pourtant, $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. Avec $\varepsilon = 2$, aucun δ ne convient : il suffit de prendre n tel que $1/n \leq \delta$. **Donc $x \to x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

La figure ci-dessous explique ce phénomène. Trois intervalles de même longueur $0{,}4$ ont des images de plus en plus longues : $0{,}56$, puis $2{,}16$, puis $3{,}68$. Un même δ ne peut donc pas convenir partout.



2. Pour $x, y \in [-R, R]$, on a $|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \leq 2R\,|x - y|$. La fonction est donc $2R$-lipschitzienne sur $[-R, R]$. Soit $\varepsilon > 0$; le choix $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$ convient. **Le carré est uniformément continu sur $[-R, R]$.**

3. Soit $0 \leq y \leq x$. On développe :

$$\left(\sqrt{y} + \sqrt{x-y}\right)^2 = y + (x-y) + 2\sqrt{y(x-y)} = x + 2\sqrt{y(x-y)} \geq x.$$

Les deux membres sont positifs, donc la croissance de la racine donne $\sqrt{y} + \sqrt{x-y} \geq \sqrt{x}$. Ainsi $0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$. Par symétrie des rôles, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ **pour tous** $x, y \geq 0$**.**

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon^2$. Si $x, y \geq 0$ et $|x-y| \leq \delta$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$. **La racine carrée est uniformément continue sur** $[0, +\infty[$ **.**

Corrigé de l'exercice 20 : Fonctions lipschitziennes

1. Soit f k-lipschitzienne sur D et $\varepsilon > 0$. Si $k = 0$, f est constante et tout δ convient. Sinon, on pose $\delta = \varepsilon / k$. Pour $|x-y| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq k\delta = \varepsilon$. **Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.**

2. Sur $[0, \pi/2]$, la fonction $\psi(u) = u - \sin u$ a pour dérivée $1 - \cos u \geq 0$ et vérifie $\psi(0) = 0$. Donc $\sin u \leq u$, c'est-à-dire $|\sin u| \leq |u|$. Si $u > \pi/2$, alors $|\sin u| \leq 1 < \pi/2 < u$. Par imparité, l'inégalité vaut aussi pour $u < 0$. Ensuite, la formule de factorisation donne

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\tfrac{x-y}{2}\right| \left|\cos\tfrac{x+y}{2}\right| \leq 2 \cdot \tfrac{|x-y|}{2} = |x-y|.$$

Le sinus est 1-lipschitzien sur $\mathbb{R}$**.**

3. Sur $]0, 1]$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2n}$. Alors $x_n - y_n = \frac{1}{2n} \to 0$, mais $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{x_n} = 2n - n = n \geq 1$. Par la caractérisation par les suites, $1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$. En revanche, pour $x, y \geq 1$, on a $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq |x-y|$. **La fonction** $1/x$ **n'est pas uniformément continue sur** $]0, 1]$**, mais elle l'est sur** $[1, +\infty[$ **, car 1-lipschitzienne.**

4. La racine carrée est continue sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue (l'exercice 19 le montre aussi directement). Supposons-la k-lipschitzienne sur $[0, 1]$. Pour $0 < x \leq 1$, on aurait $\sqrt{x} = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq kx$, donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$. C'est faux pour $x < \min(1, 1/k^2)$, avec $k > 0$. **La racine est uniformément continue sur** $[0, 1]$ **sans y être lipschitzienne.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 21 : Limite en l'infini et continuité uniforme

1. Par définition de la limite, il existe $A \geq 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \geq A$. Pour $x, y \geq A$, l'inégalité triangulaire donne
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq \varepsilon.$$
Le seuil A convient.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et A donné par la question 1. La fonction f est continue sur le segment $[0, A+1]$. D'après le théorème de Heine, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta_1$ entraîne $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ sur ce segment. On pose $\delta = \min(\delta_1, 1)$. Soit $x, y \geq 0$ avec $|x - y| \leq \delta$. Si x et y sont dans $[0, A+1]$, la conclusion vient de δ_1. Sinon, l'un d'eux dépasse $A + 1$. Comme $|x - y| \leq 1$, l'autre dépasse A, et la question 1 conclut. **Donc f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.**

3. L'arctangente est continue et tend vers $\pi/2$ en $+\infty$. Ensuite, $x \to \frac{\sin x}{1+x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $\left|\frac{\sin x}{1+x}\right| \leq \frac{1}{1+x}$. Par encadrement, elle tend vers 0 en $+\infty$. **La question 2 s'applique aux deux fonctions : elles sont uniformément continues sur $[0, +\infty[$.**

4. Non. La fonction $x \to x$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$, mais elle n'a pas de limite finie en $+\infty$. Le sinus fournit un autre contre-exemple. **La réciproque est fausse.**

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : fonctions continues périodiques

1. Par définition de la partie entière, $k \leq x/T < k + 1$. En multipliant par $T > 0$, on obtient $kT \leq x < kT + T$, donc $x - kT \in [0, T[$. Ensuite, la relation $f(x + T) = f(x)$ donne aussi $f(x - T) = f(x)$. Par récurrence, $f(x + jT) = f(x)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. **En particulier, $f(x) = f(x - kT)$.**

2. La fonction f est continue sur le segment $[0,T]$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $c,d \in [0,T]$ tels que $f(c) \leq f(t) \leq f(d)$ pour tout $t \in [0,T]$. Soit x réel. D'après la question 1, $f(x) = f(x-kT)$ avec $x-kT \in [0,T[$. Donc $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. **Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}$ et y atteint son minimum en c et son maximum en d.**

3. Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Heine sur $[0,2T]$ fournit $\delta_0 > 0$ adapté à ε sur ce segment. On pose $\delta = \min(\delta_0, T)$. Soit $x \leq y$ avec $y - x \leq \delta$, et $k = E(x/T)$. On note $x' = x - kT \in [0,T[$ et $y' = y - kT$. Alors $x' \leq y' \leq x' + T < 2T$, donc $x', y' \in [0,2T]$. De plus, $|x' - y'| = |x - y| \leq \delta_0$. Par périodicité, $|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$. **Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

4. Soit x réel. La suite $x_n = x + nT$ tend vers $+\infty$. Par caractérisation séquentielle, $f(x_n) \to \ell$. Or $f(x_n) = f(x)$ pour tout n, donc cette suite constante tend vers $f(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = \ell$. **La fonction f est constante, égale à ℓ.**

5. Soit x réel. Pour tout n, $f(x) = f(x+nT) \geq -g(x+nT)$. Quand $n \to +\infty$, $x + nT \to +\infty$, donc $g(x+nT) \to 0$ par caractérisation séquentielle. En passant à la limite dans l'inégalité, $f(x) \geq 0$. **Donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.**

6. Première méthode : le sinus est continu et 2π-périodique, et $g : x \to \frac{1}{1+x^2}$ est continue de limite 0 en $+\infty$. Si $\sin + g$ était positive, la question 5 donnerait $\sin \geq 0$. Or $\sin(3\pi/2) = -1$. Seconde méthode : en $x = 3\pi/2$, on obtient $-1 + \frac{1}{1+9\pi^2/4}$. Cette quantité est strictement négative, car la fraction est strictement inférieure à 1. **La fonction $x \to \sin x + \frac{1}{1+x^2}$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$.**

Point de méthode : pour une fonction périodique, on ramène toujours l'étude à une période, sur laquelle les théorèmes des segments s'appliquent. Les suites $(x+nT)$ servent ensuite à relier la périodicité au comportement en $+\infty$.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : limites et continuité, cours de maths en L1

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- Les énoncés : exercices de maths en L1 sur limites et continuité
- À maîtriser avant : Suites numériques
- Chapitre précédent : Suites numériques
- Chapitre suivant : Dérivation et accroissements finis
- Le même thème en maths sup : limites et continuité, exercices de maths sup
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L1 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L1 et la licence de maths de L1 à L3