

Limites de fonctions

Exercice 1 :

Déterminer dans chaque cas $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1. $f(x) = \frac{\sin x + 1}{2x}$ $D = \mathbb{R}^*$.

Il n'y a pas de forme indéterminée.

En $+\infty$, le numérateur est majoré par 2 et minoré par 0 et le dénominateur tend vers $+\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sin(3x+1)$; $D = \mathbb{R}^+$.

Il n'y a pas de forme indéterminée ici le sinus est borné entre -1 et +1

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$

Exercice 2 :

Déterminer le domaine de définition D de f puis étudier les limites de f aux bornes de D.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4x+2}}$$

Il faut que $\frac{x-1}{4x+2} \geq 0$ et $4x+2 \neq 0$

ce qui revient à $(x-1)(4x+2) \geq 0$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

Conclusion : $D_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$

Exercice 3 :

Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de :

$$g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{2x^4 + 3x^2 - 5}$$

C'est une fonction rationnelle donc la limite en l'infini correspond au quotient des limites en plus l'infini des termes de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

et de même :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

Exercice 4 :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} - 1 \right) = -1$

Exercice 5 :

1. La fonction $f(x) = x^3 - 3x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

On résout l'équation $f'(x) = 0$:

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont $x = -1$ et $x = 1$.

2. Pour qu'une tangente à la courbe C_f soit horizontale, il faut que sa pente (c'est-à-dire la valeur de sa dérivée) soit nulle. Ainsi, les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les tangentes horizontales sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0$, c'est-à-dire les points de coordonnées

$(x, f(x))$ où $x = -1$ ou $x = 1$. Ces points sont donc $A(-1, 2)$ et $B(1, -2)$.

3. Les points d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. On a :

$$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$. Les coordonnées de ces points sont donc $P(\sqrt{3}, 0)$, $Q(0, 0)$ et $R(-\sqrt{3}, 0)$.

4. On veut l'équation de la tangente à C_f en $P(\sqrt{3}, 0)$. La pente de cette tangente est donnée par la dérivée de f en $x = \sqrt{3}$, c'est-à-dire :

$$f'(\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3})^2 - 3 = 6$$

Ainsi, l'équation de la tangente en P est de la forme $y = 6x + b$. Comme la tangente passe par le point $P(\sqrt{3}, 0)$, on a :

$$0 = 6\sqrt{3} + b$$

$$\Leftrightarrow b = -6\sqrt{3}$$

L'équation de la tangente en P est donc :

$$y = 6x - 6\sqrt{3}$$

Exercice 6 :

1. Pour étudier les limites de $f(x)$, on peut utiliser la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ (pour la limite en $+\infty$) et la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (pour la limite en 2). On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 2$$

On a utilisé ici la règle de de L'Hôpital (en faisant tendre le numérateur et le dénominateur vers l'infini).

Pour la limite en 2 , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\frac{3}{x-2}}{1} = 2$$

La limite en 2 du côté droit est donc égale à 2 .

2. On calcule la dérivée de f en utilisant la formule du quotient ($\frac{u'v - uv'}{v^2}$) :

$$f'(x) = \frac{(2)(x-2) - (2x-5)(1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

La dérivée $f'(x)$ est donc strictement négative pour tout $x \neq 2$. En effet, le dénominateur est toujours positif, et le numérateur est négatif, donc la fraction est négative.

Exercice 7 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty$

Exercice 8 :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{-x} = -\infty$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{-5x^3} = 0$

Exercice 9 :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -3} -x + 3 = 0 +$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} 2 - x^2 = -2$
4. $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{1}{2x-6} = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{-7}{6-2x} = +\infty$

Exercice 10 :

Déterminer les limites de sommes ou de différences suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x + 5 = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - 3x - x^2 = -\infty$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = 3$$

Exercice 11 :

Déterminer les limites de quotients et racines carrées suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 6x - 5}{x^3} = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 + 2x - 1}{x - 2} = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 6^-} 5x + 6 - \frac{7}{x - 6} = +\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4 - x^2}{(x + 3)^2} = -\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 6^+} \sqrt{2x - 12} = 0 +$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{1}{3 - x}} = +\infty$$

7. Elle n'existe pas.

Exercice 12 :

Préciser la limite des formes indéterminées suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 5 = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 + x^3 = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 5x - 1 = +\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 9}{5x^2 - 1} = \frac{3}{5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^6 - 9}{5x^4 - 3} = +\infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = +\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x} = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - x} - \sqrt{4 - x} = 0$$

