

Les limites et les asymptotes

I. Limite d'une fonction en l'infini

Dans toute cette partie, C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère quelconque du plan.

1. Limite finie en l'infini

Définition :

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de \mathbb{R} du type $]a; +\infty[$.
La fonction f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

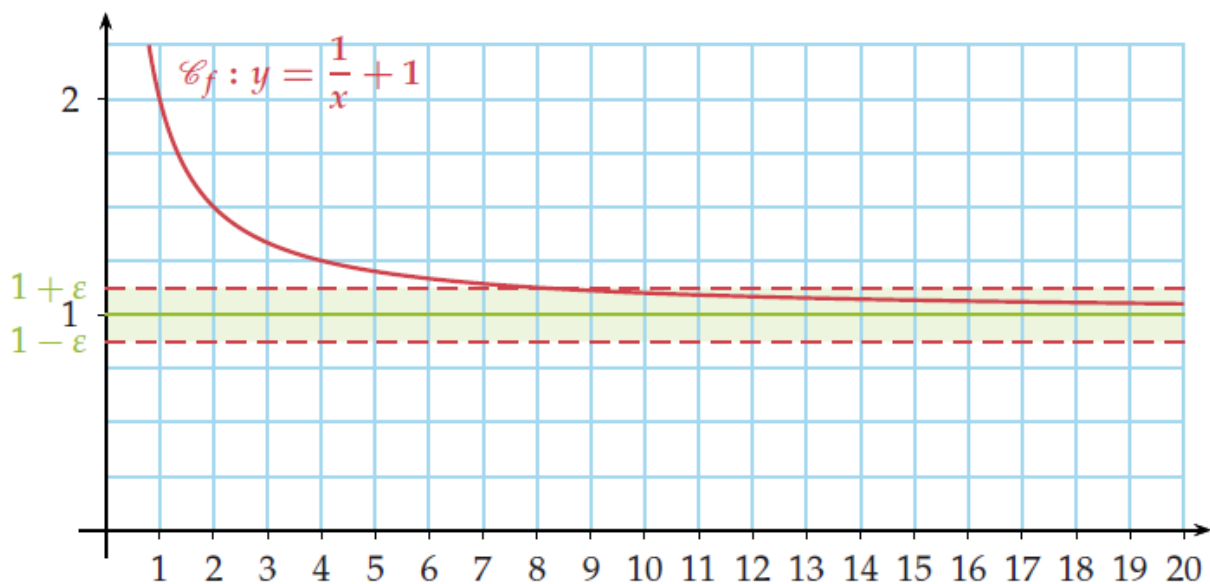
Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$.

En effet, l'inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.

Soit un intervalle ouvert I tel que $1 \in I$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.

Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d'équation $y = 1$ et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle C_f ne sort plus de cette bande.



Asymptote horizontale.

La droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Remarque :

On définit de façon analogue $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ qui caractérise une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$ d'équation $y = l$.

Exemple :

On a vu précédemment que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x} + 1) = 1$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x} + 1) = 1$.
Donc, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Propriété (admise) : limites finies des fonctions usuelles en $\pm \infty$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

II. Limite infinie en l'infini

Définition :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de \mathbb{R} du type $]a; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

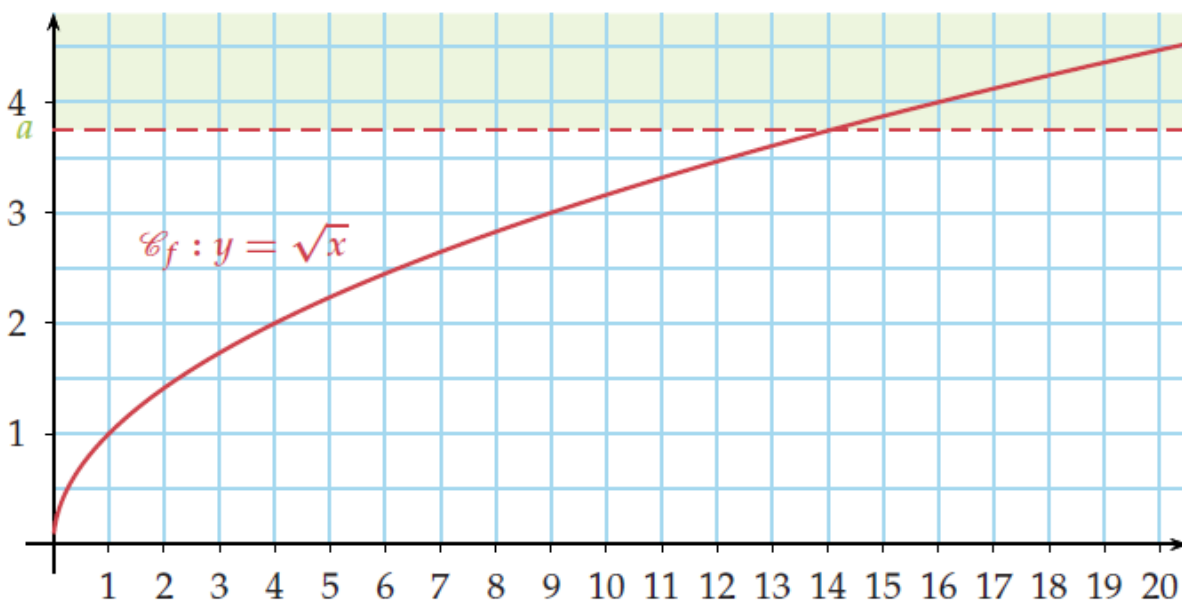
Exemple :

Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

En effet, \sqrt{x} devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.

Soit un intervalle ouvert $I =]a; +\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.

Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au-delà de laquelle C_f ne sort plus de ce demi-plan.



Propriété (admise) : limites infinies des fonctions usuelles en $\pm \infty$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = 0 \text{ (} +\infty \text{ si } n \text{ pair ; } -\infty \text{ si } n \text{ impair)}.$$

2. Limite infinie en un réel

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} du type $]x_0 - \varepsilon; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + \varepsilon[$.

La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de \mathbb{R} du type $]A; +\infty[$ contient toutes

les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de x_0 . On note alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Définition : asymptote verticale.

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à C_f si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Propriété (admise) : limites finies des fonctions usuelles en 0.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ (} +\infty \text{ si } n \text{ pair ; } -\infty \text{ si } n \text{ impair)}.$$

III. Opérations sur les limites.

Propriété : limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions.

■ Limite d'une somme :

f	g	$f + g$
l	l'	$l + l'$
l	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$???

■ Limite d'un produit :

f	g	fg
l	l'	ll'
$l \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

■ Limite d'un quotient :

f	g	f/g
l	$l' \neq 0$	l/l'
$l \neq 0$	0	∞
l	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

IV. Limite d'une fonction composée

1. Fonction composée

Définition :

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F , et soit g une fonction définie sur F .
La composée de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$ définie sur E par
$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Remarque :

Il ne faut pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ qui sont, en général, différentes.

2. Théorème de composition des limites

Théorème :

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et a, b et c trois réels ou $\pm \infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = c$.

V. Limites et comparaison

1. Théorème de comparaison

Théorème :

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ de \mathbb{R} .

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty. \quad \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] -\infty; \beta[$ de \mathbb{R} .

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty. \quad \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]a; \beta[$ de \mathbb{R} et $x_0 \in]a; \beta[$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty. \quad \blacksquare \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

2. Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » ou « sandwich ».

Théorème :

Soit deux réels a et l et trois fonctions f, g et h telles que, pour $x > a$, on a

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.

Remarque :

On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0 .

Exemple :

Déterminons la limite en $-\infty$ de $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$.

La limite de $\cos x$ en $-\infty$ est indéterminée. Donc celle de $f(x)$ aussi.

Cependant pour tout x réel strictement négatif, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $x \leq x \cos x \leq -x$.

Et en divisant membre à membre par $x^2 + 1 > 0$ on a :

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{-x}{x^2+1}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.