

Les fonctions sinus et cosinus

Exercice 1 :

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = x + \cos(x)$

b) $g(x) = x \cos(x)$

Exercice 2 :

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

b) $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Exercice 3 :

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

a. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4 :

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

b. $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$

Exercice 5 :

1. Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2. On étudie la fonction **Balayage** ci-dessous, écrite en langage Python.

```
1 from math import *
2
3 def Balayage(p):
4     a=0
5     while cos(a)>a:
6         a=a+p
7     return a-p,a
```

a) Exécuter pas à pas ce programme et compléter un tableau de suivi de la de variable a pour $p = 0,1$.

Faire apparaître également $\cos(a)$ dans ce tableau.

Arrondir au centième.

Quelles sont les valeurs obtenues ?

b) Expliquer le rôle de ce programme.

c) Saisir ce programme et l'exécuter avec $p = 0,0001$.

Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 6 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\sin(x).$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) La fonction f est paire.

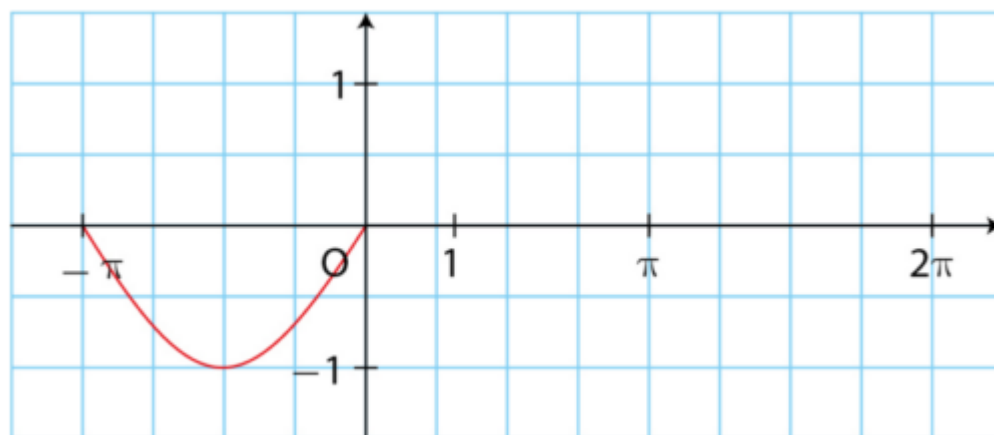
(2) La fonction f est impaire.

(3) La fonction f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 7 :

Voici la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-\pi ; 0]$ dans un repère.

Expliquer oralement comment compléter cette courbe pour l'obtenir sur $[-\pi ; 2\pi]$.



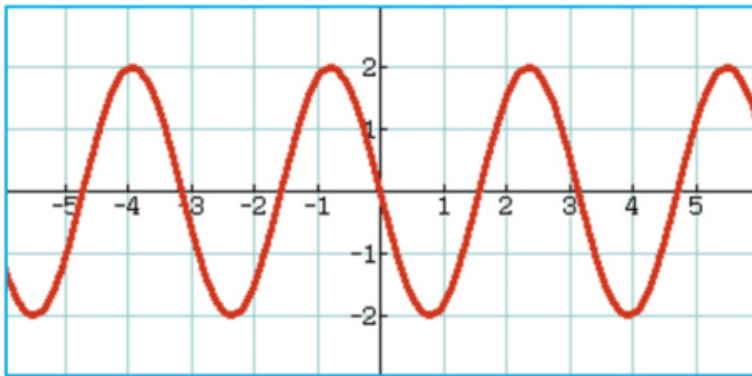
Exercice 8 :

Voici la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\sin(2x)$.

1. a) Conjecturer graphiquement la parité de g.

b) Exprimer $g(-x)$ en fonction de x et démontrer cette conjecture.

2. Exprimer $g(x + \pi)$ en fonction de x et démontrer que la fonction g est périodique de période π .



Exercice 9 :

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sin(x) + \sin(2x).$$

- Démontrer que la fonction h est impaire.
- Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative (φ) dans un repère ?
- Afficher la courbe (φ) à l'écran de la calculatrice et vérifier cette conjecture.

Exercice 10 :

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur I .

$$a) g(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad I =]0; +\infty[$$



Exercice 11 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x).$$

- Montrer que pour tout x , $f'(x) = 2(\sin(x) + 1)\cos(x)$.
- a) Expliquer pourquoi $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$ sur $[0; \pi]$.

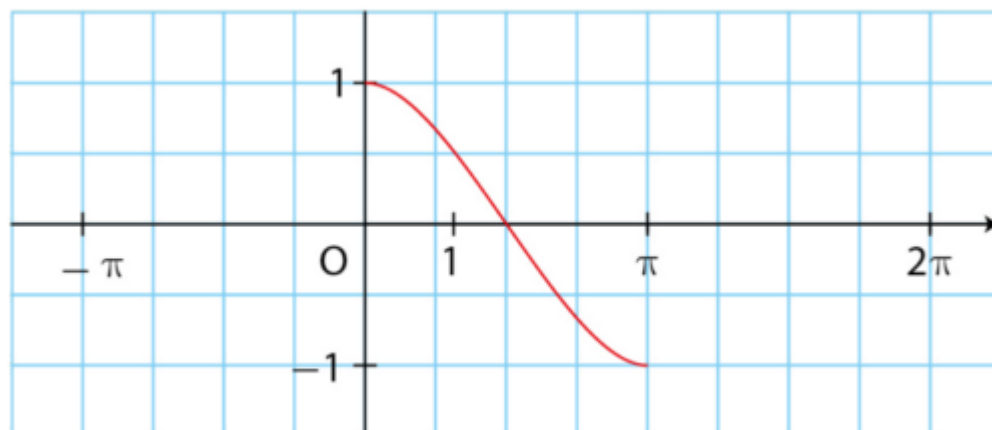
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.

- Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.

Exercice 12 :

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Expliquer oralement comment compléter cette courbe pour l'obtenir sur $[-\pi; 2\pi]$.



Exercice 13 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(3x).$$

Voici ci-dessous un écran de calcul formel.

1	$f(x) := \cos(2x) + \cos(3x)$
☐	$\rightarrow f(x) := \cos(2x) + \cos(3x)$
2	$f(-x)$
☐	$\rightarrow \cos(2x) + \cos(3x)$
3	$f(x + 2\pi)$
☐	$\rightarrow \cos(2x) + \cos(3x)$

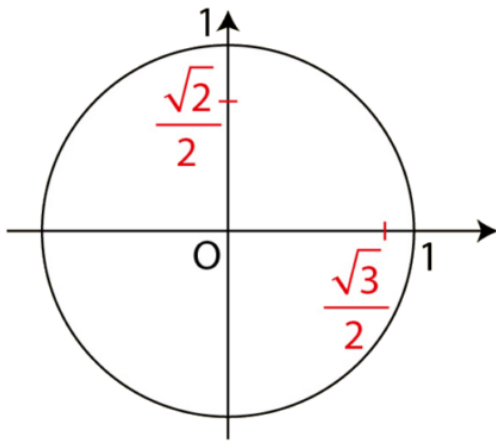
- a) Vérifier les résultats.
- b) Quelles propriétés de la fonction f observe-t-on ainsi ?
- c) Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?

Exercice 14 :

S'aider de ce cercle trigonométrique pour indiquer mentalement les solutions dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ de l'équation :

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

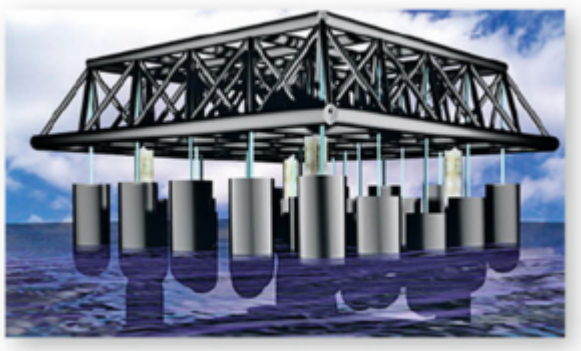
b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Exercice 15 :

L'Université de Manchester a mis au point une plate-forme équipée de flotteurs pour capturer l'énergie des vagues.

L'oscillation de la houle à la surface de l'eau induit l'oscillation verticale des flotteurs.



La distance d du fond marin au centre de flottaison d'un flotteur est donnée en fonction du temps t sur $[0;4]$ par :

$$d(t) = 1,5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 50$$

où $d(t)$ est exprimé en mètre et t en seconde.

1. Déterminer l'amplitude du mouvement du flotteur.

2. a) Déterminer $d'(t)$ sur $[0;4]$.

b) Expliquer pourquoi $d'(t)$ est négatif sur $[0;2]$ et positif sur $[2;4]$.

c) Dresser le tableau de variations de d sur $[0;4]$.

d) Sur quel intervalle de temps le flotteur monte-t-il ?

3. On se propose de déterminer à quel(s) instant(s) de l'intervalle $[0;4]$, la vitesse du flotteur est maximum.

On rappelle que la vitesse à l'instant t est $v(t) = d'(t)$.

a) Déterminer la dérivée seconde $d''(t)$ sur $[0;4]$.

b) Donner un encadrement de $\frac{\pi}{2}t$ pour $t \in [0;4]$, puis résoudre l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$ dans cet intervalle.

c) Dresser le tableau de variations de la vitesse du flotteur sur $[0;4]$.

En déduire l'instant t de $[0;4]$ où la vitesse du flotteur est maximum.