

Les équations différentielles

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 5y = 3$ et $y(0) = 0$.

$$y'e^{5x} + 5ye^{5x} = 3e^{5x}$$

$$(ye^{5x})' = 3e^{5x}$$

$$ye^{5x} = \frac{3}{5}e^{5x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = \frac{3}{5}e^{5x}e^{-5x} + ke^{-5x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = \frac{3}{5}e^0 + ke^{-5x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = \frac{3}{5} + ke^{-5x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

or nous avons $y(0) = 0$.

$$0 = \frac{3}{5} + ke^0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$k = -\frac{3}{5} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Conclusion : $y = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-5x} = \frac{3}{5}(1 - e^{-5x})$

Exercice 2 :

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = e^x$ et $(E_0) \ y' - 2y = 0$.

1. Vérifier que la fonction définie par $u_0(x) = -e^x$ est solution de (E) .

$$(-e^x)' - 2(-e^x) = -e^x + 2e^x = e^x$$

donc u_0 est solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (Eo) .

$$y' - 2y = 0$$

$$y'e^{-2x} - 2ye^{-2x} = 0$$

$$(ye^{-2x})' = 0$$

$$ye^{-2x} = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = ke^{2x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

3. Montrer que u est solution de (E) $\Leftrightarrow u - u_0$ est solution de (Eo) .

à montrer.....

4. En déduire les solutions de (E) .

Les solutions de (E) sont du type : $y = -e^x + ke^{2x} \quad (k \in \mathbb{R})$

5. Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en 1 .

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow -e^0 + ke^0 = 1$$

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow -1 + k = 1$$

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow k =$$

donc

$$y =$$

Exercice 3 :

Déterminer la solution de $2y' + y = 1$ telle que $y(1) = 2$.

$$2y' + y = 1$$

Divisons par 2 chaque membre de cette équation.

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

$$y'e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}y = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$(ye^{\frac{1}{2}x})' = (e^{\frac{1}{2}x})'$$

$$ye^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x} + ke^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = e^0 + ke^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = 1 + ke^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

or nous avons $y(1) = 2$

$$2 = 1 + ke^{-\frac{1}{2} \times 1}$$

$$ke^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$k = 1e^{\frac{1}{2}}$$

$$k =$$

Conclusion :

$$y = 1 + e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = 1 + e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = 1 + e^{\frac{1}{2}(1-x)} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Exercice 4 :

Déterminer la solution de $2y' + y = 1$ telle que $y(1) = 2$.

$$2y' + y = 1$$

Divisons par 2 chaque membre de cette équation.

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

$$y'e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}y = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$(ye^{\frac{1}{2}x})' = (e^{\frac{1}{2}x})'$$

$$ye^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x} + k e^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = e^0 + k e^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = 1 + k e^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

or nous avons $y(1) = 2$

$$2 = 1 + k e^{-\frac{1}{2} \times 1}$$

$$k e^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$k = 1 e^{\frac{1}{2}}$$

$$k =$$

Conclusion :

$$y = 1 + e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = 1 + e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = 1 + e^{\frac{1}{2}(1-x)} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Exercice 5 :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -2y$.

$$y' + 2y = 0$$

$$y' e^{2x} + 2e^{2x} y = 0$$

$$(y e^{2x})' = 0$$

$$y e^{2x} = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$y = k e^{-2x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

2. En déduire la solution de (E) dont la courbe représentative admet, au point d'abscisse 0, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -4x + 1$.

cela signifie que $y'(0) = -4$

$$y'(0) = -2k e^{-2 \times 0} = -4 \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$-2k = -4$$

$$k = \frac{-4}{-2} = 2$$

Conclusion : $y =$

Exercice 6 :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 3y$.

$$y' - 3y = 0$$

$$y'e^{-3x} - 3ye^{-3x} = 0$$

$$(ye^{-3x})' = 0$$

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$ye^{-3x} = k$$

$$y =$$

2. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (2; 3).

$$3 = ke^{3 \times 2}$$

$$3 = ke^6$$

$$k =$$

Conclusion : la solution est $y = 3e^{-6}e^{3x} = 3e^{3x-6}$

Exercice 7 :

1. L'équation différentielle donnée est $y' = 3y$.

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, homogène. On peut donc chercher une solution de la forme $y(t) = Ce^{rt}$, avec C et r à déterminer.

En substituant cette forme dans l'équation différentielle, on a

$$Ce^{rt}' = 3Ce^{rt}.$$

En dérivant le terme de gauche, on obtient

$$rCe^{rt} = 3Ce^{rt}.$$

Comme Ce^{rt} est différent de zéro, on peut diviser des deux côtés par Ce^{rt} , ce qui donne $r = 3$.

Ainsi, toutes les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(t) = Ce^{3t}$, où C est une constante.

2. Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui passe par le point (2,3), on utilise la

condition initiale $y(2) = 3$. On a donc

$$3 = Ce^{3 \cdot 2} = 9C,$$

ce qui donne $C = \frac{1}{3}$. Ainsi, la solution de (E) qui passe par le point $(2,3)$ est donnée par $y(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$.

Exercice 8 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}y' &= y \\ 4y' + y &= 0 \\ y' - 3y &= 2\end{aligned}$$

2. On considère l'équation différentielle : $(E): y' = 2y + 1$.

Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont la courbe passe par le point $A(0;3)$ dans un repère du plan.

Exercice 9 :

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ (E).

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ (E_0).
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.
6. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- b. Tracer C .

Exercice 10 :

On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant t (exprimé en heure).

À l'instant $t = 0$, ce corps dont la température est de 100°C est placé dans une salle à 20°C .

D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle.

On suppose que le coefficient de refroidissement est $-2,08$.

1. Justifier que $q'(t) = -2,08q(t) + 41,6$.

$q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $q'(t) = k(q(t) - 20)$

or le coefficient de proportionnalité k correspond au coefficient de refroidissement.

$$q'(t) = -2,08(q(t) - 20)$$

$$q'(t) = -2,08 \times q(t) + 2,08 \times 20$$

$$q'(t) = -2,08 \times q(t) + 41,6$$

2. En déduire l'expression de $q(t)$.

$$q'(t)e^{2,08t} + 2,08 \times q(t)e^{2,08t} = 41,6e^{2,08t}$$

$$[q(t)e^{2,08t}]' = 41,6e^{2,08t}$$

$$[q(t)e^{2,08t}]' = \left[\frac{41,6}{2,08}e^{2,08t}\right]'$$

Deux dérivées sont égales si et seulement si les fonctions sont égales à une constante près.

$$q(t)e^{2,08t} = \frac{41,6}{2,08}e^{2,08t} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$q(t) = \frac{41,6}{2,08}e^{2,08t}e^{-2,08t} + ke^{-2,08t} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$q(t) = \frac{41,6}{2,08} + ke^{-2,08t} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{or } q(0) = 100$$

$$q(0) = \frac{41,6}{2,08} + ke^0 = 100$$

$$\frac{41,6}{2,08} + k = 100$$

$$k = 100 - \frac{41,6}{2,08} = 80$$

Conclusion : $q(t) = 20 + 80e^{-2,08t}$

3. Déterminer le sens de variation de la fonction q sur $[0; +\infty[$.

q est strictement décroissante, la température va décroître.

4. Calculer la limite de q en $+\infty$.

Interpréter ce résultat.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 20$ la température du corps va se stabiliser et prendre la température initiale de la salle.