La récurrence

EXERCICE 1

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que :

Invalid Equation

EXERCICE 2

Soit (U_n) . la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que :

Invalid Equation

EXERCICE 3

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\,.$$

a. Calculer $S_1\ S_2\,,\ S_3\,,\ S_4$.

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

c. Démontrer par récurrence que :

Invalid Equation

EXERCICE 4 - DÉMONSTRATION AVEC DEUX VARIABLES

On note x et y deux réels .

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $x^{n+1} - y^{n+1} = y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$.

2. Exprimer $x^k y^{n-k}$ en fonction de x , si k = n .

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors $x^n - y^n = (x - y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

EXERCICE 5 - RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION DE PROPRIÉTÉS

Démontrer les propriétés ci-dessous :

1. Si $a \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $a + x \notin \mathbb{Q}$.

2. Si $a \in \mathbb{Q}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $a \times x \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 6 - DÉMONTRER PAR RÉCURRENCE UNE SOMME

On note x un réel différent de 1.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

EXERCICE 7 - CALCUL D'UNE SOMME

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

on a $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$.

EXERCICE 8 - RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE ET PUISSANCE

On note x un réel positif .

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

EXERCICE 9 - RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSÉE

On note $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de cet exercice est de montrer par contraposée la propriété suivante :

Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors l'entier n est pair .

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente .

2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$

avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 2, 3\}$ (à justifier).Prouver la contraposée .

3. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 10 - SOMME DES CUBES

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. En déduire la valeur de $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 10^3$

Multiples

Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3 .

EXERCICE 11 - MONTRER QUE C'EST UN MULTIPLE

1. Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5 .

EXERCICE 12 - DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n,on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2.$$

Rappel : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.