

La fonction exponentielle

I . Equation différentielle $f' = f$ avec $f(0) = 1$. :

Définition :

Une équation où figure une fonction et sa dérivée est une équation différentielle.

La résoudre sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur I qui vérifient l'égalité.

Ici, on cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x :

$$f'(x) = f(x) .$$

L'égalité $f(0) = 1$ est appelée condition initiale.

Propriété :

S'il existe une fonction f dérivable sur I telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur I.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur I telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

C'est la **fonction exponentielle**, notée e .

II . Propriétés algébriques :

Théorème : Relation fonctionnelle caractéristique.

La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable sur I non nulle qui vérifie les conditions :

Pour tous réels a et b , $f(a+b) = f(a).f(b)$

$f'(0) = 1$

Propriétés :

Pour tous réels a et b et pour tout n entier relatif :

1. $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

2. $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

3. $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Remarque :

Pour tout réel a :

$$\exp(a) = \exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \exp\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{a}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Donc pour tout réel a , $e^{(a)} > 0$.

Notations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n.$$

On pose :

$$e =$$

Par analogie avec les puissances (et leurs règles de calcul) on pose :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x.}$$

Propriétés :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},$$

1. $e^{(0)} = 1.$
2. $e^{(a+b)} = e^{(a)} \times e^{(b)}.$
3. $e^{(-a)} = \frac{1}{e^{(a)}}.$
4. $e^{(na)} = [e^{(a)}]^n.$

$$5. e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}.$$

III . Etude de la fonction exponentielle.

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$1. x =$$

$$2. x < y \iff e^x < e^y.$$

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+.$$

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pour x proche de 0, $e^x \approx 1+x$.

La fonction $x \rightarrow 1+x$ est l'approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x =$$

On admet que ce théorème se généralise et qu'à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 5x + 1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \times (3x^5 + 5x^3 + 1) = 0.$$