La fonction exponentielle

I . Equation différentielle f ’ = f avec f(0) = 1. :

Définition :

Une équation où figure une fonction et sa dérivée est une équation différentielle.

La résoudre sur un intervalle I, c’est trouver toutes les fonctions dérivables sur I qui vérifient l’égalité.

Ici, on cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x :

$$f'(x) = f(x).$$

L’égalité f(0) = 1 est appelée condition initiale.

Propriété :

S’il existe une fonction f dérivable sur I telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s’annule pas sur I.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur I telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

C'est la **fonction exponentielle**, notée e.

II . Propriétés algébriques :

Théorème : Relation fonctionnelle caractéristique.

La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable sur I non nulle qui vérifie les conditions :

Pour tous réels a et b, f(a+b) = f(a).f(b)

f'(0) = 1

Propriétés :

Pour tous réels a et b et pour tout n entier relatif :

1. $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Remarque :

Pour tout réel a :

$$\exp(a)=\exp(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})=\exp(\frac{a}{2}).\exp(\frac{a}{2})=[\exp(\frac{a}{2})]^2>0$$

Donc pour tout réel a , $e^{(a)}>0$.

Notations :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \exp(n)=\exp(n\times 1)=(\exp(1))^n.$$

On pose :

$$e=$$

Par analogie avec les puissances (et leurs règles de calcul) on pose :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \exp(x)=e^x.}$$

Propriétés :

$$\forall a,b\in\mathbb{R},$$

1. $e^{(0)}=1.$
2. $e^{(a+b)}=e^{(a)}\times e^{(b)}.$
3. $e^{(-a)}=\frac{1}{e^{(a)}}.$
4. $e^{(na)}=[e^{(a)}]^n.$

5. $e^{(a-b)} = \frac{e^{(a)}}{e^{(b)}}$.

III . Etude de la fonction exponentielle.

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. .

Propriétés :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $x =$

2. $x < y \Longleftrightarrow e^x < e^y$.

Théorème :

$\lim_{x \to +\infty} e^x =$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

Théorème :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$Pour\ x\ proche\ de\ 0,\ e^x \approx 1 + x.$$

La fonction x $\longrightarrow$ 1+x est l'approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

Théorème :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x =$$

On admet que ce théorème se généralise et qu'à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances.

Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 5x + 1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \times (3x^5 + 5x^3 + 1) = 0.$$