

La dérivée d'une fonction

I. La notion de dérivée d'une fonction

1. Dérivabilité et fonction dérivée

Définition : le nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi que deux nombres réels a et h tel que a et $a+h$ appartiennent à I .

La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$.

Si c'est le cas, le réel l est appelé le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

Définition :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout x de I .

La fonction $f': x \rightarrow f'(x)$ définie sur I est appelée la **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I .

2.Applications à la dérivation

Propriété : tangente en un point à la courbe.

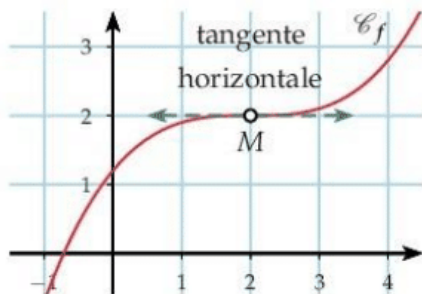
On considère une fonction f dérivable en a et C_f sa courbe dans un repère orthonormé du plan. Une équation de la **tangente à la courbe** C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

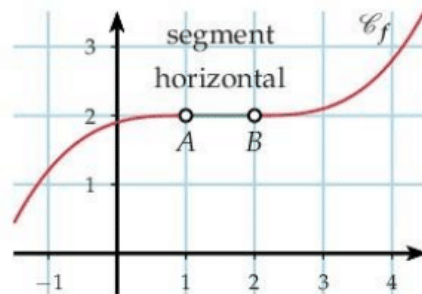
Propriété : passage du signe de $f'(x)$ aux variations de f .

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est **strictement positive** sur I alors f est **strictement croissante** sur I ;
- Si f' est **strictement négative** sur I alors f est **strictement décroissante** sur I ;
- Si f' est nulle sur I alors f est **constante** sur I .



f' est strictement positive sauf en 2 où elle s'annule
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

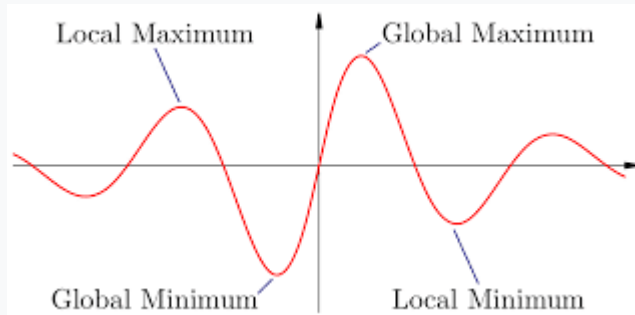


f' est strictement positive sur $] -\infty ; 1[\cup]2 ; \infty [$
donc f n'est pas **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété : extremums locaux d'une fonction.

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f admet un **extremum local** en a alors $f'(a) = 0$.

Si f' **s'annule et change de signe** en a alors f admet un extremum local en a .



3.Calculs de dérivées

Propriétés : dérivée des fonction usuelles.

On note D_f le domaine de définition de la fonction f . Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur D_f à l'exception de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0 .

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Dérivée f'
$f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriétés : opérations sur les fonctions dérivées.

On considère un nombre réel k et deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I . Les fonctions $u+v$, ku et uv sont dérivables sur I ;

Les fonctions $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ sont dérivables sur I sauf là où v s'annule.

Fonction	$u + v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$u' + v'$	ku'	$u'v + uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

II. Dérivées des fonctions composées

Propriété :

- Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I .

- Si c'est le cas, nous avons : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul. Si u est dérivable sur I alors :

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
- La fonction u^{-n} est dérivable sur I sauf là où u s'annule et $(u^{-n})' = -nu^{-n-1}u'$.

Propriété :

On considère deux nombres réels a et b . Si u est dérivable sur I alors :

La fonction $f: x \rightarrow u(ax+b)$ est dérivable là où $(ax+b) \in I$.

Si c'est le cas, $f'(x) = au'(ax+b)$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur I et f une fonction dérivable sur un intervalle J telle que : Pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

La fonction $f \circ u$ **composée de u suivie de f** est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times (f' \circ u)(x) \text{ ou encore } [f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x)).$$