

Isométries vectorielles

Exercice 1 : Représentation de formes linéaires

Dans chaque cas, déterminer le vecteur a qui représente la forme linéaire φ , c'est-à-dire tel que $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ pour tout x .

- $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $\varphi(x, y, z) = 2x - y + 3z$.
- $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ et $\varphi(P) = P(0)$. On cherchera a sous la forme $\alpha + \beta X$.
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, et $\varphi(M) = \text{tr}(AM)$.
- On munit maintenant $\mathbb{R}[X]$, qui est de dimension infinie, du même produit scalaire qu'à la question 2. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme A tel que $P(0) = \int_0^1 A(t) P(t) dt$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. On pourra tester $P = XA$.

Exercice 2 : Calcul d'adjoints dans des bases orthonormées ou non

- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'adjoint de $u : (x, y, z) \rightarrow (x + 2y, y - z, 3x + z)$.

2. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire $\langle x, y \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et que la base canonique n'est pas orthonormée.
3. Soit $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Déterminer u^* pour ce produit scalaire. Sa matrice dans la base canonique est-elle la transposée de celle de u ?
4. Construire une base orthonormée $\mathcal{B}'$ pour ce produit scalaire, puis vérifier que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u^*) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)^T$.

Exercice 3 : Adjoint sur un espace de matrices

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N)$. On fixe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'adjoint de $u: M \rightarrow AM$ et celui de $v: M \rightarrow MB$.
2. Déterminer l'adjoint de $w: M \rightarrow M^T$ et celui de $t: M \rightarrow \text{tr}(M) I_n$.
3. Montrer que w est une symétrie orthogonale. En déduire que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. À quelle condition sur A l'endomorphisme u est-il une isométrie ?

Exercice 4 : Propriétés générales de l'adjoint

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension n .

1. Montrer que $\langle u^* u(x), x \rangle = |u(x)|^2$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\ker(u^* \circ u) = \ker u$, puis que $\text{rg}(u^* \circ u) = \text{rg}(u)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ker(u^* - \lambda \text{id}_E) = (\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E))^\perp$. En déduire que u et

u^* ont les mêmes valeurs propres réelles, avec des sous-espaces propres de même dimension.

4. Dans $\mathbb{R}^2$ canonique, on pose $u(x, y) = (y, 0)$. Comparer $\ker u$ et $\ker u^*$. Les sous-espaces propres de u et u^* sont-ils égaux en général ?

Exercice 5 : Plans stables par un endomorphisme de l'espace

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'un sous-espace F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^* .
2. On suppose $\dim E = 3$. Soit n un vecteur non nul et $P = n^\perp$. Montrer que P est stable par u si et seulement si n est un vecteur propre de u^* .
3. Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, soit u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer tous les plans stables par u , en donnant leurs équations.
4. Déterminer les droites stables par u . Vérifier que chaque plan stable trouvé est la somme de deux d'entre elles.

Exercice 6 : Reconnaître une matrice orthogonale

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est orthogonale. Dans l'affirmative, calculer son déterminant et préciser la nature de l'isométrie canoniquement associée (angle d'une rotation, axe d'une réflexion ou d'une rotation).

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Traiter A_1 et A_2 .
2. Traiter A_3 . On donnera l'axe de la réflexion par un vecteur directeur et par son angle polaire.
3. Traiter A_4 . On donnera l'axe et l'angle, en orientant l'axe par $(1, 1, 1)$.
4. Traiter A_5 .

Exercice 7 : Inégalités sur les matrices orthogonales

Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $|a_{ij}| \leq 1$ pour tous i, j .
2. Montrer que $|\operatorname{tr} A| \leq n$, et que $\operatorname{tr} A = n$ si et seulement si $A = I_n$.
3. Soit U la colonne dont tous les coefficients valent 1. En calculant $U^T A U$, montrer que $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$.
4. Montrer que $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.
5. Montrer qu'une matrice orthogonale triangulaire supérieure est diagonale, à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$.

Exercice 8 : Caractérisations des isométries

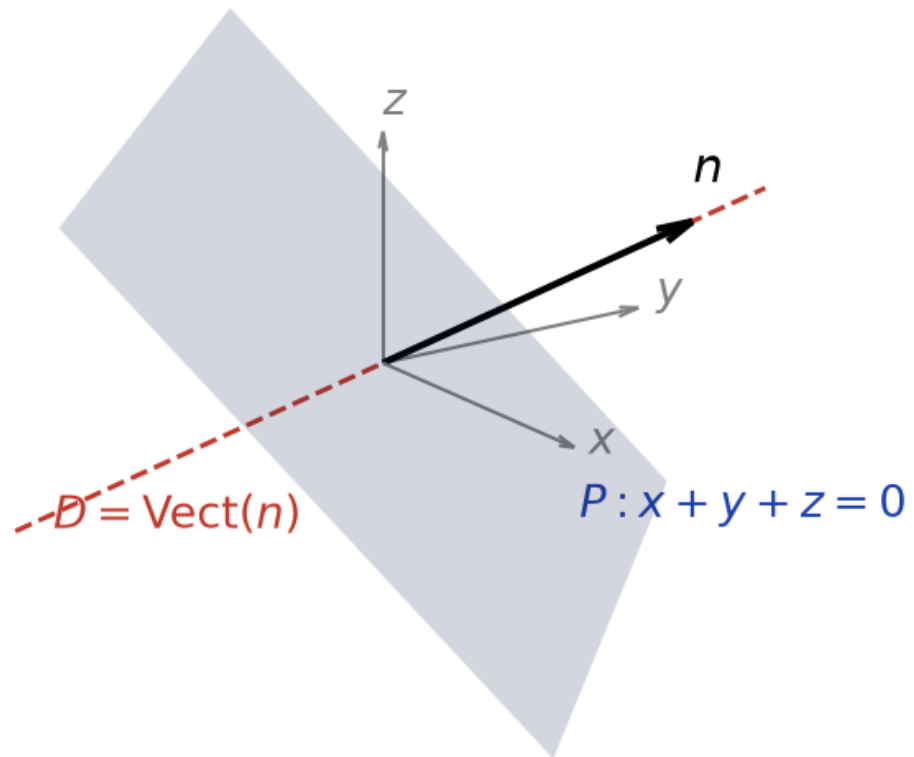
Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|u(x)| = |x|$ pour tout x . Montrer que u conserve le produit scalaire.

2. Soit $f : E \rightarrow E$ une application, non supposée linéaire, telle que $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous x, y . Développer $|f(x + y) - f(x) - f(y)|^2$ et $|f(\lambda x) - \lambda f(x)|^2$. En déduire que f est linéaire, donc que $f \in O(E)$.
3. Soit e un vecteur unitaire. Montrer que $g : x \rightarrow |x| e$ conserve la norme mais n'est pas linéaire.
4. Un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$, est-il nécessairement une isométrie ?

Exercice 9 : Projection et symétrie orthogonales sur un plan

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le plan P d'équation $x + y + z = 0$ et la droite $D = P^\perp$, représentés ci-dessous.



1. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale p sur P , puis celle de la réflexion s par rapport à P .
2. Calculer $p(1, 2, 3)$ et $s(1, 2, 3)$.
3. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s_D par rapport à D . Comparer avec s .
4. Calculer $\det s$ et $\det s_D$. Quelle est la nature géométrique de s_D ?

Exercice 10 : Identifier une réflexion de l'espace

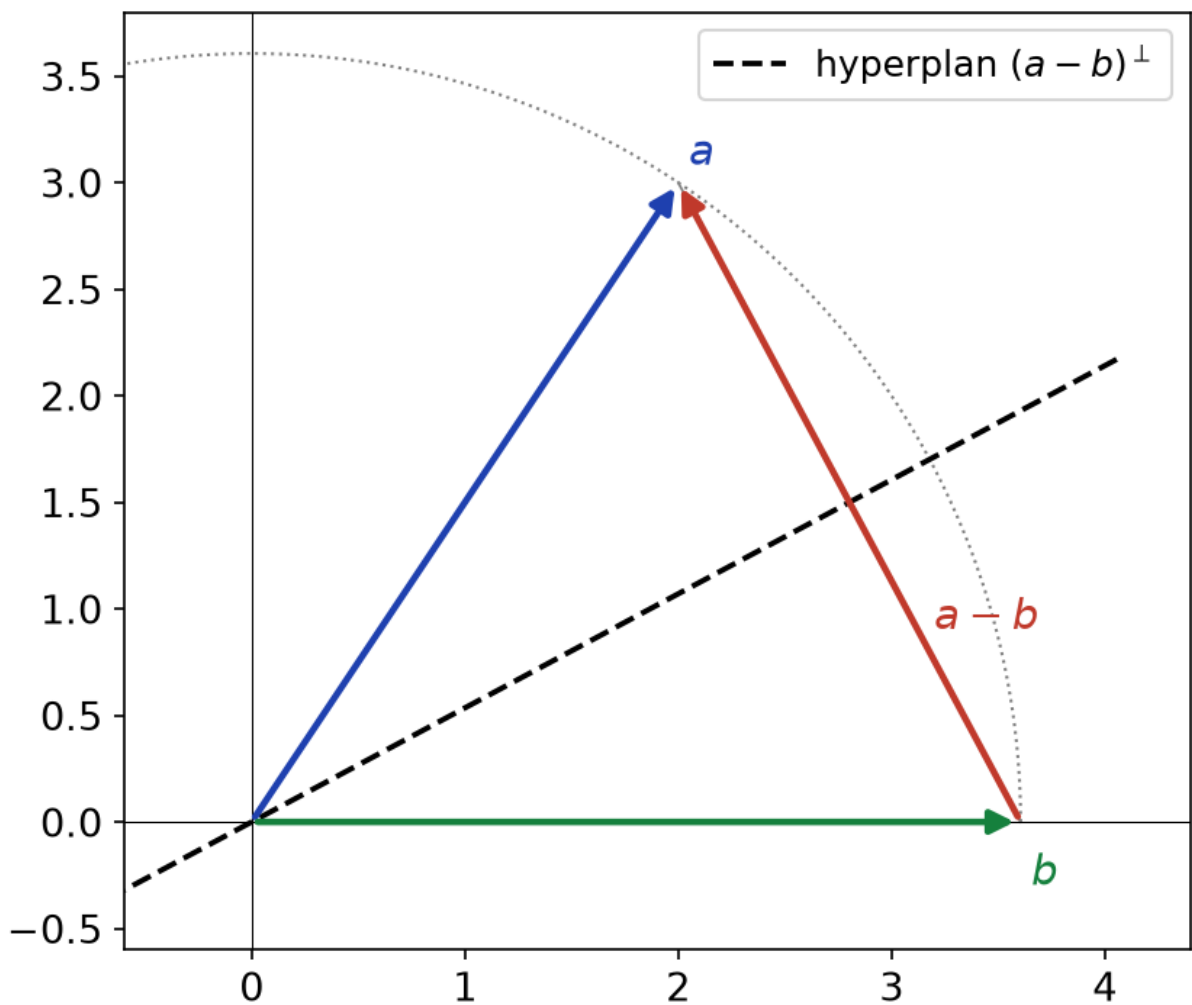
On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est orthogonale et symétrique. En déduire que $M^2 = I_3$.
2. En déduire que M est la matrice d'une symétrie orthogonale, puis, à l'aide de la trace, qu'il s'agit d'une réflexion.
3. Déterminer une équation du plan de cette réflexion.
4. Retrouver M à partir de la formule $I_3 - \frac{2}{N^T N} N N^T$.

Exercice 11 : Réflexion échangeant deux vecteurs

Soit E un espace euclidien et a, b deux vecteurs distincts de même norme. La figure ci-dessous illustre la situation dans le plan.



1. Montrer que $\langle a - b, a + b \rangle = 0$.
2. Soit s la réflexion d'hyperplan $H = (a - b)^\perp$. Montrer que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, on prend $a = (1, 2, 2)$ et $b = (3, 0, 0)$. Donner la matrice de s .
4. Déterminer une rotation $r \in SO_3(\mathbb{R})$ telle que $r(a) = b$. On pourra composer s avec une réflexion bien choisie qui fixe b .

Exercice 12 : Calculs dans le groupe $O_2(\mathbb{R})$

On note, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Démontrer les formules $R(\theta) S(\varphi) = S(\theta + \varphi)$, $S(\varphi) R(\theta) = S(\varphi - \theta)$ et $S(\varphi) S(\psi) = R(\varphi - \psi)$.
2. Montrer que $S(\varphi)$ est la réflexion d'axe dirigé par $\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.
3. Montrer que pour toute réflexion s et toute rotation r du plan, $s \circ r \circ s = r^{-1}$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $R(\theta) = s \circ S(\psi)$. Interpréter géométriquement à l'aide des axes.
5. Déterminer l'ensemble des matrices de $O_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $S(\varphi)$.

Exercice 13 : Rotations du plan et nombres complexes

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par $(x, y) \rightarrow x + iy$. La base canonique $(1, i)$ est orthonormée et définit l'orientation.

1. Montrer que la matrice de $z \rightarrow e^{i\theta} z$ dans la base $(1, i)$ est $R(\theta)$. En déduire que $\Phi : e^{i\theta} \rightarrow R(\theta)$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{U}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de l'unique rotation r telle que $r(3, 4) = (5, 0)$.
3. Déterminer les rotations r du plan telles que $r^6 = \text{id}$.
4. Calculer la matrice de la rotation $R(\theta)$ dans la base orthonormée indirecte (e_2, e_1) .

Exercice 14 : Orientation et bases directes

On oriente $\mathbb{R}^3$ par sa base canonique (e_1, e_2, e_3) .

1. La base $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ est-elle directe ?

2. Montrer que la famille $((1, 2, 0), (2, -1, 0), (0, 0, 1))$ est une base orthogonale indirecte. En déduire une base orthonormée directe en modifiant le moins possible cette famille.
3. Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Montrer que $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$ est directe si et seulement si σ est paire.
4. Soit $u = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ et $v = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$. Calculer $w = u \wedge v$, puis vérifier que (u, v, w) est une base orthonormée directe.

Exercice 15 : Axe et angle d'une rotation de l'espace

On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'axe de la rotation r canoniquement associée. On l'orientera par $k = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$.
3. Déterminer l'angle θ de r .
4. Vérifier que $e'_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ et $e'_2 = k \wedge e'_1$ complètent k en une base orthonormée directe (e'_1, e'_2, k) . Écrire la matrice réduite de r dans cette base, puis calculer M^4 .

Exercice 16 : Rotation d'axe et d'angle donnés

L'espace E est euclidien orienté de dimension 3. Soit k un vecteur unitaire, $\theta \in \mathbb{R}$, et r la rotation d'axe dirigé et orienté par k , d'angle θ .

1. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$r(x) = \cos\theta x + (1 - \cos\theta) \langle x, k \rangle k + \sin\theta k \wedge x.$$

On décomposera $x = \langle x, k \rangle k + y$ avec $y \perp k$, et on utilisera que $(y, k \wedge y)$ est une base orthogonale directe de $k^\perp$ lorsque $y \neq 0$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, on prend $k = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Calculer $r(e_1)$, $r(e_2)$, $r(e_3)$ et la matrice de r .
3. Toujours avec ce k , déterminer la matrice du retournement d'axe $\text{Vect}(k)$, c'est-à-dire de la rotation d'angle π .

Exercice 17 : Nature d'isométries de l'espace

Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques des isométries de $\mathbb{R}^3$ canonique de matrices :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que les trois matrices sont orthogonales et calculer leurs déterminants.
2. Déterminer la nature de N_2 et ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer la nature de N_3 et ses éléments caractéristiques.
4. Montrer que N_1 est la composée commutative d'une rotation d'axe $D = \text{Vect}(1, 1, 1)$ et de la réflexion de plan $D^\perp$. Préciser l'angle de la rotation, l'axe étant orienté par $(1, 1, 1)$, et écrire la forme réduite de N_1 .

Exercice 18 : Réduction d'une matrice de permutation

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ canonique qui envoie $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow e_4 \rightarrow e_1$.

1. Montrer que $P \in O_4(\mathbb{R})$ et calculer $\det P$.
2. Déterminer $\ker(u - \text{id})$ et $\ker(u + \text{id})$.
3. Soit F l'orthogonal de la somme de ces deux sous-espaces. Montrer que F est stable par u , en donner une base orthonormée (f_1, f_2) avec $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, et identifier la restriction de u à F .
4. En déduire une matrice $Q \in O_4(\mathbb{R})$ et la forme réduite D telles que $P = Q D Q^T$. Retrouver ainsi que $P^4 = I_4$.

Exercice 19 : Sous-espaces stables d'une rotation

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et r une rotation d'axe $D = \text{Vect}(k)$ et d'angle θ .

1. On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Déterminer les valeurs propres réelles de r et ses droites stables.
2. Toujours avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer que le seul plan stable par r est $D^\perp$. On utilisera la stabilité de l'orthogonal.
3. On suppose $\theta = \pi$. Déterminer toutes les droites et tous les plans stables par r .

Exercice 20 : Projecteurs orthogonaux et adjoint

Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, c'est-à-dire $p^2 = p$.

1. Montrer que si $p^* = p$, alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux.
2. Réciproquement, montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors $p^* = p$ et $|p(x)| \leq |x|$ pour tout x .
3. On suppose que $|p(x)| \leq |x|$ pour tout x . Soient $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \ker p$. En étudiant $t \rightarrow |x + ty|^2$, montrer que $\langle x, y \rangle = 0$. Conclure.
4. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $q \circ p = 0$, puis que $p + q$ est un projecteur orthogonal.

Exercice 21 : Matrices orthogonales à coefficients entiers

On note $O_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers.

1. Montrer que chaque colonne d'une matrice de $O_n(\mathbb{Z})$ est de la forme $\pm e_k$.
2. En déduire que les matrices de $O_n(\mathbb{Z})$ sont exactement les matrices de permutation dont on a éventuellement changé le signe de certaines colonnes. Calculer le cardinal de $O_n(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que $O_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})$ a exactement la moitié des éléments de $O_n(\mathbb{Z})$. Combien de rotations de $\mathbb{R}^3$ ont une matrice à coefficients entiers ?

Exercice 22 : Transformée de Cayley

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique : $A^T = -A$.

1. Montrer que $X^T A X = 0$ pour toute colonne X . En déduire que $I_n + A$ est inversible.
2. On pose $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Justifier que $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent, puis montrer que $Q \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\det Q = 1$ et que -1 n'est pas valeur propre de Q . On pourra calculer $Q + I_n$.
4. Pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, calculer Q et montrer que c'est la rotation d'angle $-2\arctan t$. Quelles rotations obtient-on ainsi ?

Exercice 23 : Problème, décomposition des isométries en réflexions

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On admet le résultat de l'exercice 11 : si $a \neq b$ ont même norme, la réflexion d'hyperplan $(a - b)^\perp$ échange a et b . Par convention, id_E est le produit de zéro réflexion.

1. Soit $u \in O(E)$ et $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. Soit s la réflexion qui échange x et $u(x)$, et $v = s \circ u$. Montrer que $v(x) = x$, puis que $H = x^\perp$ est stable par v .
2. Soit K un hyperplan de l'espace euclidien H et σ la réflexion de H d'hyperplan K . Montrer que l'endomorphisme $\tilde{\sigma}$ de E , égal à σ sur H et fixant x , est une réflexion de E .
3. En déduire, par récurrence sur n , que toute isométrie de E est la composée d'au plus n réflexions.
4. Montrer que si u est la composée de k réflexions, alors $\det u = (-1)^k$. En déduire qu'en dimension 3, une rotation différente de l'identité est la composée de deux réflexions, et jamais d'une seule ni de trois.
5. Dans $\mathbb{R}^3$, écrire la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme produit de deux matrices de réflexions. Comparer l'angle entre les plans des deux réflexions avec l'angle de la rotation.
6. Montrer que $-I_3$ est la composée de trois réflexions, mais d'aucun nombre plus petit de réflexions.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [isométries vectorielles, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions génératrices](#)
- Chapitre suivant : [Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)