Isométries vectorielles

Corrigé de l'exercice 1 : Représentation de formes linéaires

1. La base canonique est orthonormée. Les coordonnées de a sont donc les images des vecteurs de base : $\varphi(e_1) = 2$, $\varphi(e_2) = -1$, $\varphi(e_3) = 3$. **Ainsi** $a = (2, -1, 3)$**.**

2. On cherche $a = \alpha + \beta X$ tel que $\langle a, P \rangle = P(0)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Par linéarité, il suffit de le vérifier sur la base $(1, X)$. Pour $P = 1$, on obtient $\int_0^1 (\alpha + \beta t)\,\mathrm{d}t = \alpha + \frac{\beta}{2} = 1$. Pour $P = X$, on obtient $\int_0^1 (\alpha t + \beta t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0$. La seconde équation donne $\alpha = -\frac{2\beta}{3}$. En reportant, $-\frac{2\beta}{3} + \frac{\beta}{2} = -\frac{\beta}{6} = 1$, donc $\beta = -6$ et $\alpha = 4$. **Le vecteur cherché est** $a = 4 - 6X$**.** Vérification : $\int_0^1 (4 - 6t)\,\mathrm{d}t = 4 - 3 = 1$ et $\int_0^1 (4t - 6t^2)\,\mathrm{d}t = 2 - 2 = 0$.

3. On a $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}\big((A^T)^T M\big) = \langle A^T, M \rangle$. Par unicité du vecteur représentant, φ **est représentée par** $a = A^T$**.**

4. Supposons qu'un tel A existe. Pour $P = XA$, on a $P(0) = 0$, donc $\int_0^1 t\,A(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \to t\,A(t)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle : elle est donc nulle sur $[0, 1]$. Ainsi A s'annule sur $]0, 1]$, qui est infini, donc $A = 0$. Mais alors, avec $P = 1$, on obtient $1 = P(0) = 0$, ce qui est absurde. **Aucun polynôme ne représente** φ **sur** $\mathbb{R}[X]$**.** Le théorème de représentation utilise donc vraiment la dimension finie.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 2 : Calcul d'adjoints dans des bases orthonormées ou non

1. La base canonique est orthonormée pour le produit scalaire canonique. La matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc celle de u^* est $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Ainsi** $u^*(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y, -y + z)$.

2. L'application est bilinéaire et symétrique. De plus, $\langle x, x \rangle = 2x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. C'est donc un produit scalaire. En revanche, $|e_1|^2 = 2 \neq 1$: **la base canonique est orthogonale mais pas orthonormée.**

3. On calcule $\langle u(x), y \rangle = 2(x_1 + x_2)\, y_1 + x_2\, y_2 = 2\, x_1\, y_1 + x_2\, (2y_1 + y_2)$. On cherche à l'écrire $2\, x_1\, z_1 + x_2\, z_2$: il suffit de prendre $z_1 = y_1$ et $z_2 = 2y_1 + y_2$. Par unicité, $u^*(y_1, y_2) = (y_1, 2y_1 + y_2)$. Sa matrice canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors que la transposée de celle de u vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elles diffèrent, car la base n'est pas orthonormée. On retrouve d'ailleurs la formule $S^{-1}\, A^T\, S$ avec $S = \mathrm{diag}(2, 1)$.

4. Posons $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$ et $\varepsilon_2 = e_2$. Alors $|\varepsilon_1|^2 = \frac{2}{2} = 1$, $|\varepsilon_2|^2 = 1$ et $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0$: $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est orthonormée. Ensuite, $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ et $u(\varepsilon_2) = e_1 + e_2 = \sqrt{2}\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. De même, $u^*(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 2) = \varepsilon_1 + \sqrt{2}\ \varepsilon_2$ et $u^*(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

La seconde matrice est bien la transposée de la première.

Point de méthode : avant de transposer une matrice pour obtenir un adjoint, vérifiez toujours que la base est orthonormée pour le produit scalaire considéré.

Corrigé de l'exercice 3 : Adjoints sur un espace de matrices

1. Pour M, N quelconques, $\langle AM, N \rangle = \mathrm{tr}(M^T A^T N) = \langle M, A^T N \rangle$. Ensuite, par invariance de la trace par permutation circulaire, $\langle MB, N \rangle = \mathrm{tr}(B^T M^T N) = \mathrm{tr}(M^T N B^T) = \langle M, N B^T \rangle$. **Ainsi** $u^*(N) = A^T N$ **et** $v^*(N) = N B^T$**.**

2. On a $\langle M^T, N \rangle = \mathrm{tr}(MN)$. De même, $\langle M, N^T \rangle = \mathrm{tr}(M^T N^T) = \mathrm{tr}\big((NM)^T\big) = \mathrm{tr}(NM) = \mathrm{tr}(MN)$. Donc $w^* = w$. Par ailleurs, $\langle \mathrm{tr}(M)\, I_n, N \rangle = \mathrm{tr}(M)\, \mathrm{tr}(N)$, expression symétrique en M et N. **Donc** $w^* = w$ **et** $t^* = t$**.**

3. On a $w^2 = \mathrm{id}$, donc w est une symétrie. Or $w^* = w$, donc d'après le cours w est une symétrie orthogonale. Ses sous-espaces $\ker(w - \mathrm{id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\ker(w + \mathrm{id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux. **Par conséquent,** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ **avec une somme orthogonale.**

4. u est une isométrie si et seulement si $u^* \circ u = \mathrm{id}$, soit $A^T A M = M$ pour tout M. En prenant $M = I_n$, on obtient $A^T A = I_n$, et la réciproque est immédiate. **Donc** u **est une isométrie si et seulement si** $A \in O_n(\mathbb{R})$**.**

Corrigé de l'exercice 4 : Propriétés générales de l'adjoint

1. Par définition de l'adjoint, $\langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = |u(x)|^2$. D'abord, $\ker u \subset \ker(u^* \circ u)$ est évident. Inversement, si $u^*(u(x)) = 0$, alors $|u(x)|^2 = 0$, donc $x \in \ker u$. **Ainsi** $\ker(u^* \circ u) = \ker u$, et le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(u^* \circ u) = n - \dim \ker u = \mathrm{rg}(u)$.

2. On a toujours $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}\ u^*$. De plus, $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$, puisqu'en base orthonormée les matrices sont transposées. D'après la question 1, les deux sous-espaces ont donc la même dimension. **Par inclusion et égalité des dimensions,** $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}\ u^*$**.**

3. Posons $v = u - \lambda\, \mathrm{id}_E$. Par linéarité de l'adjonction, $v^* = u^* - \lambda\, \mathrm{id}_E$. Le cours donne $\ker v^* = (\mathrm{Im}\ v)^\perp$, ce qui est l'égalité demandée. En passant aux dimensions, $\dim \ker(u^* - \lambda\ \mathrm{id}) = n - \mathrm{rg}(u - \lambda\ \mathrm{id}) = \dim \ker(u - \lambda\ \mathrm{id})$. **Donc** λ **est valeur propre de** u **si et seulement si elle l'est de** u^***, avec des sous-espaces propres de**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

même dimension.

4. On a $u(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, donc $\ker u = \mathrm{Vect}(e_1)$. La matrice de u est $\left([\text{\ray?}]\begin{matrix}0 \& 1\\ 0 \& 0\end{matrix},\right)$, donc $u^*(x,y) = (0,x)$ et $\ker u^* = \mathrm{Vect}(e_2)$. **Les deux noyaux, sous-espaces propres pour la valeur propre 0, sont distincts :** seules les dimensions coïncident en général. On vérifie au passage que $\ker u^* = (\mathrm{Im}\ u)^\perp = \mathrm{Vect}(e_1)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 5 : Plans stables par un endomorphisme de l'espace

1. Si F est stable par u, le cours montre que $F^\perp$ est stable par u^*. Réciproquement, si $F^\perp$ est stable par u^*, le même résultat appliqué à u^* montre que $(F^\perp)^\perp = F$ est stable par $(u^*)^* = u$. **D'où l'équivalence.**

2. On a $P^\perp = \mathrm{Vect}(n)$. D'après la question 1, P est stable par u si et seulement si $\mathrm{Vect}(n)$ est stable par u^*. Or une droite est stable si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre. **Donc P est stable par u si et seulement si n est vecteur propre de u^*.**

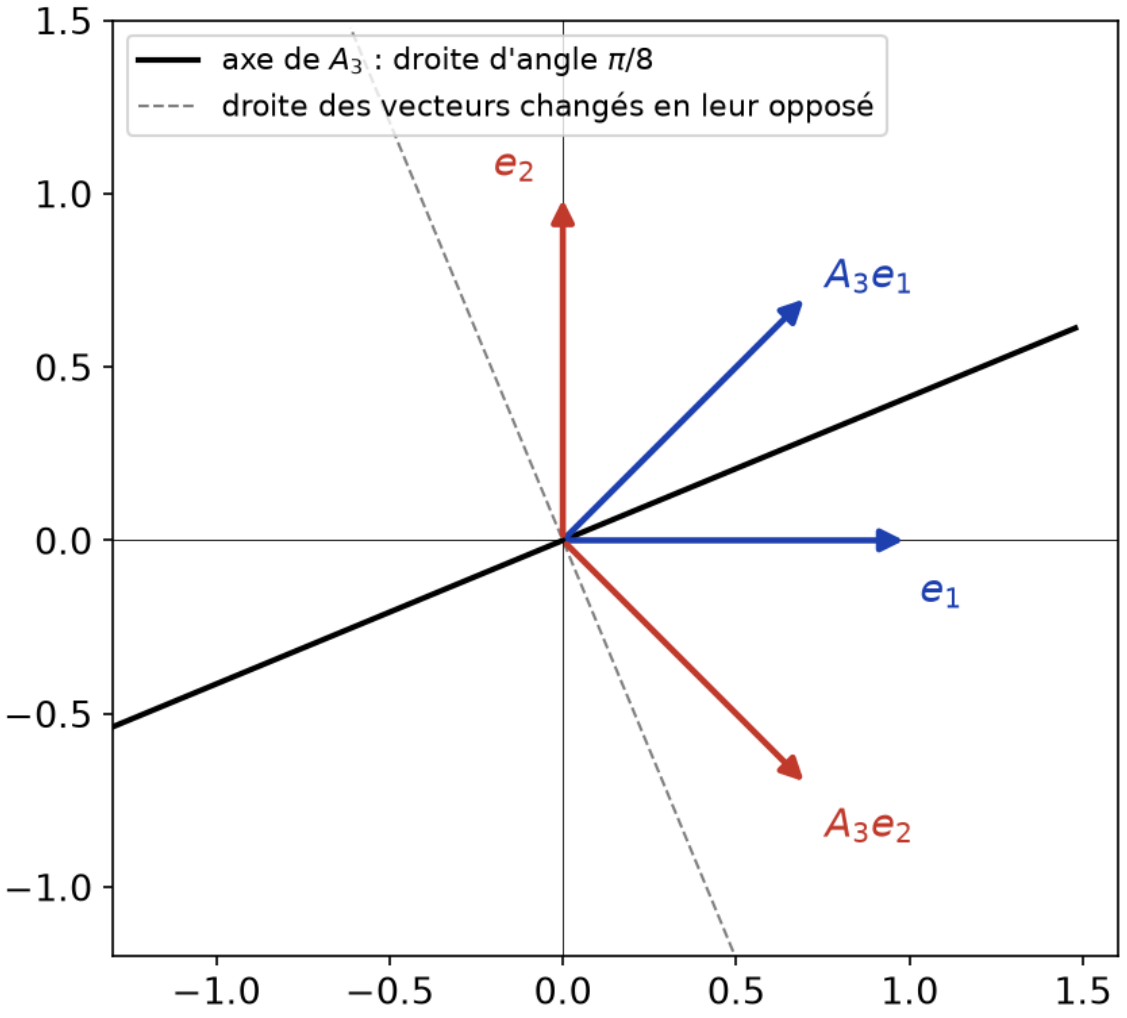
3. En base canonique, u^* a pour matrice $A^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, triangulaire de valeurs propres $1, 2, 3$. Pour $\lambda = 1$, le système $(A^T - I_3)X = 0$ donne $x + y = 0$ et $x + y + 2z = 0$, donc $n_1 = (1,-1,0)$. Pour $\lambda = 2$, on obtient $x = 0$ et $x + y + z = 0$, donc $n_2 = (0,1,-1)$. Pour $\lambda = 3$, on obtient $x = 0$ et $x - y = 0$, donc $n_3 = (0,0,1)$. Les valeurs propres sont simples, donc il n'y a pas d'autre direction propre. **Les plans stables sont exactement $x - y = 0$, $y - z = 0$ et $z = 0$.** Vérification sur le premier : $A(a,a,c) = (2a + c, \ ,2a + c, \ ,3c)$ a bien deux premières coordonnées égales.

4. Les droites stables par u sont engendrées par les vecteurs propres de A. On trouve $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1,0,0)$, $\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1,1,0)$ et $\ker(A - 3I_3) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. Ensuite, $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(1,1,0)\big)$ est le plan $z = 0$. De même, $\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(1,1,1)\big)$ est le plan $y = z$, et $\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,1,1)\big)$ est le plan $x = y$. **On retrouve bien les trois plans stables de la question 3.**

Corrigé de l'exercice 6 : Reconnaître une matrice orthogonale

1. La matrice A_1 s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{3}\right)$. **Elle est orthogonale, de déterminant 1 : c'est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.** En revanche, la première colonne de A_2 a pour norme $\sqrt{2} \neq 1$. **Donc A_2 n'est pas orthogonale** ; en fait $A_2 = \sqrt{2}\, R\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ est une similitude.

2. Les colonnes de A_3 sont $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$: elles sont unitaires et orthogonales. De plus, $\det A_3 = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$. On reconnaît $A_3 = S\left(\frac{\pi}{4}\right)$, qui est une réflexion. Son axe est la droite d'angle polaire $\frac{\pi}{8}$. On le retrouve en résolvant $A_3 X = X$: la première ligne donne $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0$, soit $y = (\sqrt{2}-1)\, x$. **L'axe est dirigé par $(1, \sqrt{2}-1)$, et $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ confirme l'angle $\frac{\pi}{8}$.** La figure ci-dessous montre que e_1 et $A_3\, e_1$ sont symétriques par rapport à cet axe.



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Les colonnes de A_4 sont e_2, e_3, e_1 : elles forment une base orthonormée, donc $A_4 \in O_3(\mathbb{R})$. Son déterminant est la signature du 3-cycle, soit 1. C'est donc une rotation. L'équation $A_4 X = X$ s'écrit $(z, x, y) = (x, y, z)$, soit $x = y = z$: l'axe est $\mathrm{Vect}(1,1,1)$. Ensuite, $\mathrm{tr}\ A_4 = 0 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Enfin, avec $a = (1,1,1)$ et $A_4\, e_1 = e_2$,

$$\det(a, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

donc $\sin\theta > 0$. A_4 **est la rotation d'axe orienté par** $(1,1,1)$ **et d'angle** $\frac{2\pi}{3}$**.**

4. Les deux premières colonnes de A_5 ont pour produit scalaire $\frac{1}{9}(2+2+4) = \frac{8}{9} \neq 0$. **Donc** A_5 **n'est pas orthogonale**, bien que ses colonnes soient unitaires.

Corrigé de l'exercice 7 : Inégalités sur les matrices orthogonales

1. La colonne j de A est unitaire : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. Chaque terme est donc majoré par 1. **Ainsi** $|a_{ij}| \leq 1$**.**

2. Par l'inégalité triangulaire et la question 1, $|\mathrm{tr}\ A| \leq \sum_i |a_{ii}| \leq n$. Si $\mathrm{tr}\ A = n$, alors chaque a_{ii}, qui est au plus 1, vaut exactement 1. La colonne i est alors unitaire avec un coefficient diagonal égal à 1 : ses autres coefficients sont nuls. **Donc** $\mathrm{tr}\ A = n$ **si et seulement si** $A = I_n$**.**

3. On a $U^T A\, U = \sum_{i,j} a_{ij}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|U^T(AU)| \leq |U|\ |AU|$. Or A conserve la norme, donc $|AU| = |U| = \sqrt{n}$. **Ainsi** $\left|\sum_{i,j} a_{ij}\right| \leq n$**.**

4. Pour chaque colonne j, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $(|a_{1j}|, \ldots, |a_{nj}|)$ et $(1, \ldots, 1)$ donne $\sum_i |a_{ij}| \leq \sqrt{n}\,(\sum_i a_{ij}^2)^{1/2} = \sqrt{n}$. En sommant sur les n colonnes, **on**

obtient $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ **.**

5. Si A est triangulaire supérieure et inversible, son inverse est aussi triangulaire supérieure. Or $A^{-1} = A^T$ est triangulaire inférieure. Donc A^T, puis A, est diagonale. Enfin, les colonnes $a_{ii}\, e_i$ sont unitaires, donc $a_{ii}^2 = 1$. **Ainsi** $A = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$**.**

Point de méthode : la question 5 est le point clé de l'unicité dans la décomposition QR : deux décompositions ne diffèrent que par une matrice diagonale de signes.

Corrigé de l'exercice 8 : Caractérisations des isométries

1. Par l'identité de polarisation et la linéarité de u :

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \tfrac{1}{2}\left(|u(x+y)|^2 - |u(x)|^2 - |u(y)|^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right).$$

Ce dernier terme vaut $\langle x, y \rangle$**, donc** u **conserve le produit scalaire.**

2. On développe le carré en utilisant la conservation du produit scalaire par f :

$$\begin{aligned} |f(x+y) - f(x) - f(y)|^2 &= |x+y|^2 + |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x+y, x \rangle - 2\langle x+y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle \\ &= |(x+y) - x - y|^2 = 0. \end{aligned}$$

En effet, les deux lignes s'obtiennent par le même développement, l'une avec f, l'autre sans. De même, $|f(\lambda x) - \lambda f(x)|^2 = |\lambda x - \lambda x|^2 = 0$. Ainsi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. **Donc** f **est linéaire, et elle conserve la norme :** $f \in O(E)$ **.**

3. On a $|g(x)| = |x|\,|e| = |x|$. Cependant, pour $x \neq 0$, $g(-x) = |x|\, e = g(x) \neq -g(x)$. **Donc** g **conserve la norme sans être linéaire** : l'hypothèse de linéarité est indispensable dans la définition.

4. Non. Par exemple, $u = 2\,\mathrm{id}_E$ conserve l'orthogonalité, puisque $\langle 2x, 2y \rangle = 4\langle x, y \rangle$. **Pourtant** $|u(x)| = 2|x|$**, donc** u **n'est pas une isométrie.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 9 : Projection et symétrie orthogonales sur un plan

1. Le vecteur $n = (1,1,1)$ est normal à P et $|n|^2 = 3$. Avec N la colonne de n, on a $N\,N^T = J$, la matrice dont tous les coefficients valent 1. Donc $p = I_3 - \frac{1}{3}J$ et $s = 2p - I_3 = I_3 - \frac{2}{3}J$:
$$\mathrm{Mat}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \mathrm{Mat}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour $x = (1,2,3)$, on a $\langle x, n \rangle = 6$. Ainsi $p(x) = x - \frac{6}{3}n = (-1,0,1)$ et $s(x) = x - 4n = (-3,-2,-1)$. **Donc $p(1,2,3) = (-1,0,1)$ et $s(1,2,3) = (-3,-2,-1)$.** On vérifie que $p(x) \in P$ et que $p(x)$ est le milieu de x et $s(x)$.

3. La projection sur D a pour matrice $\frac{1}{3}J$, donc $s_D = \frac{2}{3}J - I_3$. **On obtient** $\mathrm{Mat}(s_D) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{Mat}(s)$.

4. La réflexion s a pour déterminant -1. Ensuite, $\det s_D = \det(-s) = (-1)^3 \det s = 1$. **Ainsi s_D est une rotation : c'est le retournement d'axe D, c'est-à-dire la rotation d'angle π autour de D.**

Corrigé de l'exercice 10 : Identifier une réflexion de l'espace

1. La matrice est symétrique : $m_{12} = m_{21} = -\frac{4}{9}$, $m_{13} = m_{31} = \frac{8}{9}$, $m_{23} = m_{32} = \frac{4}{9}$. Les colonnes $(1,-4,8)$, $(-4,7,4)$, $(8,4,1)$ ont toutes pour carré de norme 81. Leurs produits scalaires valent $-4 - 28 + 32 = 0$, $8 - 16 + 8 = 0$ et $-32 + 28 + 4 = 0$. Après division par 9, les colonnes sont orthonormées, donc $M \in O_3(\mathbb{R})$. **Par suite, $M^2 = M^T M = I_3$.**

2. L'endomorphisme associé vérifie $s^2 = \mathrm{id}$ et s est une isométrie : c'est une symétrie orthogonale. Ses valeurs propres sont 1 et -1, de multiplicités p et q, avec $p + q = 3$. Or $\mathrm{tr}\ M = \frac{1+7+1}{9} = 1 = p - q$. Donc $p = 2$ et $q = 1$. **C'est une réflexion, par rapport à un plan.**

3. On a $9(M - I_3) = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & & 4_4 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Toutes les lignes sont proportionnelles à $(2, 1, -2)$. **Le plan de la réflexion a pour équation $2x + y - 2z = 0$.**

4. Avec $N = (2, 1, -2)^T$, on a $N^T N = 9$ et $N N^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Donc $I_3 - \frac{2}{9} N N^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **On retrouve exactement M.**

Corrigé de l'exercice 11 : Réflexion échangeant deux vecteurs

1. Par bilinéarité et symétrie, $\langle a - b, a + b \rangle = |a|^2 - |b|^2 = 0$. **Donc $a + b \in H$.**

2. Par définition, $s(a - b) = -(a - b)$ et, d'après la question 1, $s(a + b) = a + b$. On écrit $a = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)$. Par linéarité, $s(a) = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) = b$. **De même, $s(b) = a$.**

3. On a $|a| = |b| = 3$ et $a - b = (-2, 2, 2) = 2(-1, 1, 1)$. On peut prendre $n = (-1, 1, 1)$, avec $|n|^2 = 3$. La formule $I_3 - \frac{2}{3} N N^T$ donne

$$\mathrm{Mat}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & , & -2 \\ 2 & -2 & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : la première ligne appliquée à a donne $\frac{1 + 4 + 4}{3} = 3$, les deux autres donnent 0 : on a bien $s(a) = b$.

4. La réflexion σ de plan $z = 0$ fixe $b = (3, 0, 0)$; sa matrice est $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$. Posons $r = \sigma \circ s$. Alors $r(a) = \sigma(b) = b$ et $\det r = (-1)(-1) = 1$. **On obtient la rotation r de matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -,-1 \end{pmatrix}$.** Elle n'est pas unique : on peut la composer à droite par n'importe quelle rotation d'axe $\mathrm{Vect}(a)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 12 : Calculs dans le groupe O_2(R)

1. Notons $c_\theta = \cos\theta$ et $s_\theta = \sin\theta$. Par produit matriciel et formules d'addition :

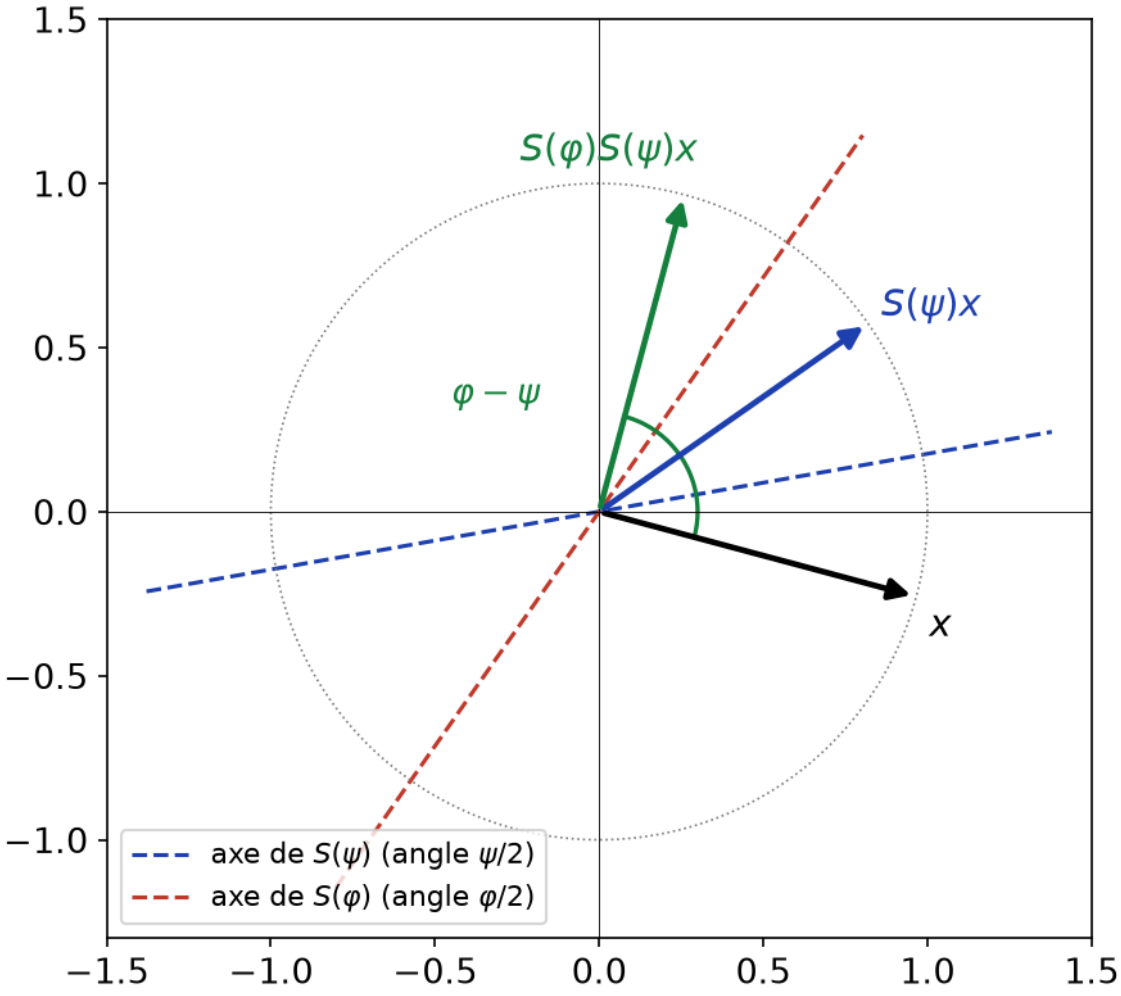
$$R(\theta)\,S(\varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta\,c_\varphi - s_\theta\,s_\varphi & c_\theta\,s_\varphi + s_\theta\,c_\varphi \\ s_{[\backslash\text{tta?}]}\,c_\varphi + c_\theta\,s_{s\varphi} & s_\theta\,s_{[\backslash\text{vahi?}]} - c_\theta\,c_\varphi \end{pmatrix} = S(\theta+\varphi).$$

   De même, $S(\varphi)\,R(\theta)$ a pour première colonne $(c_\varphi\,c_\theta + s_\varphi\,s_\theta,$ $,s_\varphi\,c_\theta - c_\varphi\,s_\theta) = (\cos(\varphi-\theta), \sin(\varphi-\theta))$. Son déterminant vaut -1, donc c'est $S(\varphi-\theta)$. Enfin, $S(\varphi)\,S(\psi)$ a pour première colonne $(\cos(\varphi-\psi), \sin(\varphi-\psi))$ et pour déterminant 1. **C'est donc $R(\varphi-\psi)$.**

2. On calcule $S(\varphi)\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\cos(\varphi-\frac{\varphi}{2}), \sin(\varphi-\frac{\varphi}{2})\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$. De plus, $S(\varphi)$ est symétrique orthogonale de déterminant -1 : c'est une réflexion. **Son axe est la droite dirigée par $\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.**

3. Avec $s = S(\varphi)$ et $r = R(\theta)$, on obtient $S(\varphi)\,R(\theta)\,S(\varphi) = S(\varphi-\theta)\,S(\varphi) = R(-\theta)$. **Ainsi** $s \circ r \circ s = r^{-1}$: conjuguer une rotation par une réflexion change son angle en l'opposé.

4. Comme $S(\psi)^2 = I_2$, l'égalité $R(\theta) = s\,S(\psi)$ équivaut à $s = R(\theta)\,S(\psi) = S(\theta+\psi)$. **La réflexion $s = S(\theta+\psi)$ existe et elle est unique.** Géométriquement, les axes de s et de $S(\psi)$ ont pour angles $\frac{\theta+\psi}{2}$ et $\frac{\psi}{2}$. Ils font donc un angle $\frac{\theta}{2}$: composer deux réflexions d'axes faisant un angle α donne la rotation d'angle 2α, comme le montre la figure ci-dessous.



5. Si $M = R(\theta)$, alors $R(\theta)\,S(\varphi) = S(\theta+\varphi)$ et $S(\varphi)\,R(\theta) = S(\varphi-\theta)$. L'égalité impose $2\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $M = \pm I_2$. Si $M = S(\psi)$, alors $S(\psi)\,S(\varphi) = R(\psi-\varphi)$ et $S(\varphi)\,S(\psi) = R(\varphi-\psi)$. L'égalité impose $2(\psi-\varphi) \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\psi = \varphi$ ou $\psi = \varphi+\pi$ modulo 2π. **Les matrices cherchées sont I_2, $-I_2$, $S(\varphi)$ et $S(\varphi+\pi) = -S(\varphi)$.** La dernière est la réflexion d'axe perpendiculaire à celui de $S(\varphi)$.

Corrigé de l'exercice 13 : Rotations du plan et nombres complexes

1. Pour $z = x+iy$, on a $e^{i\theta}\,z = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$. La matrice dans la base $(1,i)$ est donc $R(\theta)$. Ensuite, Φ est bien définie, car $e^{i\theta}$ détermine θ modulo 2π. Elle transforme produit en composée, puisque $z \to e^{i\theta}\,e^{i\theta'}\,z$ est la composée des deux

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

multiplications. Elle est surjective d'après la description de $SO_2(\mathbb{R})$. Enfin, $R(\theta) = I_2$ impose $e^{i\theta} = 1$. **Donc Φ est un isomorphisme de groupes.**

2. On cherche $e^{i\theta}$ tel que $e^{i\theta}(3+4i) = 5$. Donc $e^{i\theta} = \frac{5}{3+4i} = \frac{5(3-4i)}{25} = \frac{3-4i}{5}$, qui est bien de module 1. **La rotation cherchée a pour matrice** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$**.**
   Vérification : $\begin{matrix} \frac{1}{5}(9+16, \\ ,-12+12) = (5,0) \end{matrix}$.

3. Pour $r = R(\theta)$, on a $r^6 = R(6\theta)$. Donc $r^6 = \mathrm{id}$ si et seulement si $6\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. **Ce sont les six rotations** $R(\frac{k\pi}{3})$**,** $0 \leq k \leq 5$, images par Φ des racines sixièmes de l'unité.

4. La matrice de passage de (e_1, e_2) à (e_2, e_1) est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S(\frac{\pi}{2})$, orthogonale et égale à son inverse. D'après l'exercice 12, $P\,R(\theta)\,P = R(-\theta)$. **Dans la base indirecte** (e_2, e_1)**, la matrice de la rotation est** $R(-\theta)$**.**

Corrigé de l'exercice 14 : Orientation et bases directes

1. Le déterminant dans la base canonique vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(1-0) - 0 + 1\cdot(1-0) = 2 > 0.$$

   La base est directe.

2. On a $\langle (1,2,0), (2,-1,0) \rangle = 2 - 2 = 0$, et les deux vecteurs sont orthogonaux à e_3. Le déterminant vaut $(1\cdot(-1) - 2\cdot 2)\cdot 1 = -5 < 0$: la base orthogonale est indirecte. On normalise les deux premiers vecteurs, de norme $\sqrt{5}$, et on change le signe du troisième. **La base** $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), (0,0,-1)\right)$ **est orthonormée directe.**

3. Par définition du déterminant, $\det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma)\det(e_1, e_2, e_3) = \varepsilon(\sigma)$. **La base est directe si et seulement si** $\varepsilon(\sigma) = 1$**, c'est-à-dire si** σ **est paire.** Par exemple, (e_2, e_3, e_1) est directe, mais (e_2, e_1, e_3) est indirecte.

4. Les vecteurs u et v sont unitaires, car $\frac{1+4+4}{9} = 1$, et orthogonaux, car $\frac{2+2-4}{9} = 0$. On calcule

$$u \wedge v = \tfrac{1}{9}(2\cdot(-2) - 2\cdot 1,$$
$$,2\cdot 2 - 1\cdot(-2),$$
$$,1\cdot 1 - 2\cdot 2) = \tfrac{1}{9}(-6, 6, -3).$$

Donc $w = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$**.** Ce vecteur est unitaire et orthogonal à u et v. Enfin, $\det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle = \|w\|^2 = 1 > 0$, donc la base orthonormée (u, v, w) est directe.

Corrigé de l'exercice 15 : Axe et angle d'une rotation de l'espace

1. Les colonnes de $9M$ sont $(1, 8, -4)$, $(-4, 4, 7)$ et $(8, 1, 4)$, de carré de norme 81. Leurs produits scalaires valent $-4 + 32 - 28 = 0$, $8 + 8 - 16 = 0$ et $-32 + 4 + 28 = 0$. Donc $M \in O_3(\mathbb{R})$. Ensuite, en développant selon la première ligne, $\det(9M) = 1\cdot 9 + 4\cdot 36 + 8\cdot 72 = 729 = 9^3$. **Ainsi** $\det M = 1$ **et** $M \in SO_3(\mathbb{R})$**.**

2. On a $9(M - I_3) = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ 8 & -, & 1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$, de rang 2 car les deux premières lignes ne sont pas proportionnelles. Le vecteur $(1, 2, 2)$ annule chaque ligne : $-8 - 8 + 16 = 0$, $8 - 10 + 2 = 0$, $-4 + 14 - 10 = 0$. **L'axe est** $D = \mathrm{Vect}(1, 2, 2)$, orienté par $k = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$.

3. On a $\mathrm{tr}\, M = \frac{1+4+4}{9} = 1 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = 0$. Pour le signe, on prend $x = e_1$, avec $M e_1 = \frac{1}{9}(1, 8, -4)$. En développant selon la deuxième colonne :

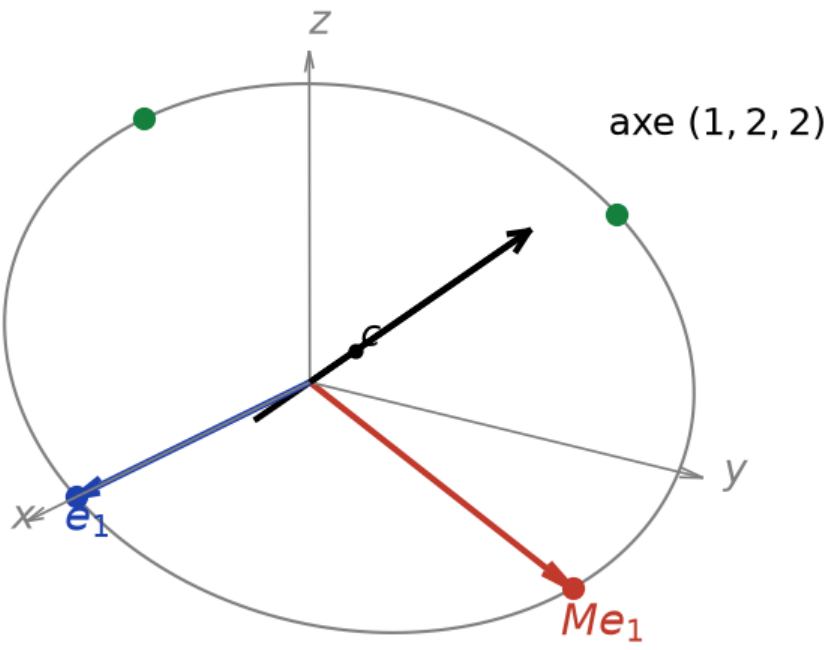
$$\det(k, e_1, Me_1) = \tfrac{1}{27}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ , & 8 & \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{27}\cdot(-1)\cdot(-8-16) = \tfrac{24}{27} > 0.$$

Donc $\sin\theta > 0$. **La rotation a pour angle** $\theta = \frac{\pi}{2}$ **autour de l'axe orienté par** k**.**

4. Le vecteur e_1' est unitaire et $\langle e_1', k \rangle = \frac{2-4+2}{9} = 0$. Ensuite, $e_2' = k \wedge e_1' = \frac{1}{9}(6, 3, -6) = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$. Ce vecteur est unitaire et orthogonal à k et e_1'

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

. De plus, $\det(e_1', e_2', k) = \det(k, e_1', e_2') = |e_2'|^2 = 1$: la base est directe. On vérifie que $M\, e_1' = \frac{1}{27}(18, 9, -18) = e_2'$, ce qui confirme l'angle $\frac{\pi}{2}$. **La matrice réduite est** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, et** $M^4 = I_3$ puisque $R(\frac{\pi}{2})^4 = R(2\pi) = I_2$. La figure ci-dessous montre l'orbite de e_1 : quatre points sur un cercle centré sur l'axe.



Corrigé de l'exercice 16 : Rotation d'axe et d'angle donnés

1. Posons $y = x - \langle x, k \rangle k$, orthogonal à k. Comme $r(k) = k$, on a $r(x) = \langle x, k \rangle k + r(y)$. Si $y = 0$, alors x est colinéaire à k, $k \wedge x = 0$, et la

formule donne bien $r(x) = x$. Sinon, posons $\varepsilon_1 = \frac{y}{|y|}$ et $\varepsilon_2 = k \wedge \varepsilon_1$. Ce vecteur est unitaire, orthogonal à k et à ε_1. De plus, $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, k) = \langle k \wedge \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 1 > 0$. Ainsi $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, k)$ est orthonormée directe, et $r(\varepsilon_1) = \cos\theta\ \varepsilon_1 + \sin\theta\ \varepsilon_2$. Par linéarité, $r(y) = \cos\theta\ y + \sin\theta\ k \wedge y$. Enfin, $k \wedge y = k \wedge x$ car $k \wedge k = 0$. **On obtient $r(x) = \langle x, k \rangle k + \cos\theta\,(x - \langle x, k \rangle k) + \sin\theta\ k \wedge x$, qui est la formule annoncée.**

2. Ici $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\langle e_1, k \rangle k = \frac{1}{3}(1,1,1)$. De plus, $k \wedge e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1)$. Donc

$$r(e_1) = -\tfrac{1}{2}(1,0,0) + \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{3}(1,1,1) + \tfrac{1}{2}(0,1,-1) = (0,1,0) = e_2.$$

Le même calcul, avec $k \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1)$, donne $r(e_2) = e_3$. Par permutation circulaire des coordonnées, $r(e_3) = e_1$. **La matrice de r est** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire la matrice A_4 de l'exercice 6.

3. Pour $\theta = \pi$, la formule devient $r(x) = -x + 2\langle x, k \rangle k$. Matriciellement, $r = 2\,K\,K^T - I_3 = \frac{2}{3}J - I_3$, où J est la matrice remplie de 1. **Le retournement a pour matrice** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & & 2 \\ 2 & 2 & -,-1 \end{pmatrix}$, ce qui redonne la symétrie s_D de l'exercice 9.

Corrigé de l'exercice 17 : Nature d'isométries de l'espace

1. Les colonnes de N_1 sont $-e_2, -e_3, -e_1$, et celles de N_2 sont $e_2, e_1, -e_3$: ce sont des bases orthonormées. Pour N_3, les colonnes $(2,1,2)$, $(1,2,-2)$, $(2,-2,-1)$ ont pour carré de norme 9 et des produits scalaires nuls : $2+2-4=0$, $4-2-2=0$, $2-4+2=0$. Ensuite, $N_1 = -A_4$, donc $\det N_1 = (-1)^3 \cdot 1 = -1$. Pour N_2, l'échange de deux vecteurs et le signe de e_3 donnent $\det N_2 = (-1)(-1) = 1$. **Enfin,** $\det N_3 = -1$, comme le confirmera la question 3.

2. N_2 est orthogonale et symétrique : c'est une symétrie orthogonale. Son déterminant vaut 1 et sa trace -1, donc ses valeurs propres sont $1, -1, -1$. Le système $N_2 X = X$ donne $y = x$ et $z = 0$. N_2 **est le retournement d'axe** $\mathrm{Vect}(1,1,0)$**.**

3. N_3 est orthogonale et symétrique, de trace $\frac{2+2-1}{3} = 1$. Ses valeurs propres sont donc $1, 1, -1$: c'est une réflexion, de déterminant -1. On a $3(N_3 - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, dont les lignes sont proportionnelles à $(1,-1,-2)$. N_3 **est la réflexion par rapport au plan**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$x - y - 2z = 0$. On vérifie que $N_3\,(1,-1,-2)^T = (-1,1,2)^T$.

4. On a $-N_1 = A_4$, la rotation d'axe D orienté par $(1,1,1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (exercice 6). Notons s_P la réflexion de plan $P = D^\perp$ et s_D le retournement d'axe D. Sur D, $s_P\, s_D = -\mathrm{id}$, et sur P, $s_P\, s_D = -\mathrm{id}$ aussi : donc $-I_3 = s_P \circ s_D$. Ainsi $N_1 = s_P \circ (s_D \circ A_4)$. Or $s_D \circ A_4$ est la rotation d'axe D et d'angle $\pi + \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}$. De plus, s_P commute avec toute rotation d'axe D, car les deux stabilisent D et P. **Donc N_1 est la composée commutative de la rotation d'axe orienté par $(1,1,1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ avec la réflexion de plan $x + y + z = 0$.** Dans une base orthonormée directe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, k)$ avec $k = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, sa forme réduite est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\&\&\ 0} & \\ & 0\ \&\ 0\ \&\ -1 & \end{pmatrix}.$$

Contrôle : la trace vaut $0 = \mathrm{tr}\ N_1$.

Corrigé de l'exercice 18 : Réduction d'une matrice de permutation

1. Les colonnes de P sont e_2, e_3, e_4, e_1 : elles forment une base orthonormée, donc $P \in O_4(\mathbb{R})$. Le déterminant est la signature du 4-cycle, qui est $(-1)^3$. **Ainsi $\det P = -1$.**

2. On a $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_3)$. L'équation $u(x) = x$ donne $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. L'équation $u(x) = -x$ donne $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2$ et $x_4 = -x_3$. **Donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1,1,1,1)$ et $\ker(u + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1,-1,1,-1)$.**

3. La somme G de ces deux droites est stable par u. Comme u est une isométrie, $F = G^\perp$ est stable par u. Les équations de F sont $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, soit $x_3 = -x_1$ et $x_4 = -x_2$. Posons $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)$: c'est une base orthonormée de F. Ensuite, $u(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4) = f_2$ et $u(f_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_1) = -f_1$. **La restriction de u à F est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans la base (f_1, f_2).**

4. On prend pour Q la matrice dont les colonnes sont $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, f_1 et f_2. Ces quatre vecteurs forment une base orthonormée, donc $Q \in O_4(\mathbb{R})$. **On obtient** $P = Q\,D\,Q^T$ **avec** $D = \mathrm{diag}(1,-1,R(\frac{\pi}{2}))$**.** On retrouve $\det D = -1$. Enfin, $D^4 = \mathrm{diag}(1,1,R(2\pi)) = I_4$, donc $P^4 = Q\,D^4\,Q^T = I_4$.

Corrigé de l'exercice 19 : Sous-espaces stables d'une rotation

1. Les valeurs propres réelles d'une isométrie valent ± 1. Dans une base orthonormée directe adaptée, r a pour matrice $\mathrm{diag}(R(\theta),1)$, de polynôme caractéristique $(X-1)(X^2-2\cos\theta\ X+1)$. Le second facteur a un discriminant $4\cos^2\theta - 4 < 0$, car $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. **La seule valeur propre réelle est** 1**, de sous-espace propre** D **: la seule droite stable est l'axe** D**.**

2. Soit P un plan stable par r. Comme r est une isométrie, $P^\perp$ est stable par r. C'est une droite stable, donc $P^\perp = D$ d'après la question 1. Réciproquement, $D^\perp$ est stable, puisque D l'est. **Le seul plan stable est** $D^\perp$, et les sous-espaces stables sont $\{0\}$, D, $D^\perp$ et E.

3. Pour $\theta = \pi$, la matrice réduite est $\mathrm{diag}(-1,-1,1)$. Les droites stables sont engendrées par des vecteurs propres : ce sont D et toutes les droites de $D^\perp$. Un plan P est stable si et seulement si $P^\perp$ est une droite stable. **Les plans stables sont donc** $D^\perp$ **et tous les plans contenant** D**.**

Point de méthode : pour une isométrie, trouver les plans stables revient à trouver les droites stables, grâce à la stabilité de l'orthogonal.

Corrigé de l'exercice 20 : Projecteurs orthogonaux et adjoint

1. Soient $x \in \mathrm{Im}\ p$ et $y \in \ker p$. Comme p est un projecteur, $x = p(x)$. Donc $\langle x, y\rangle = \langle p(x), y\rangle = \langle x, p^*(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle = 0$. **Ainsi** $\ker p \perp \mathrm{Im}\ p$**.**

2. Supposons $\ker p \perp \mathrm{Im}\ p$. Pour $x, y \in E$, on écrit $y = p(y) + (y - p(y))$, avec

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$y - p(y) \in \ker p$. Donc $\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$. Cette expression est symétrique en x et y, d'où $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ et $p^* = p$. De plus, le théorème de Pythagore donne $|x|^2 = |p(x)|^2 + |x - p(x)|^2$. **Donc** $p^* = p$ **et** $|p(x)| \leq |x|$ **.**

3. Pour tout réel t, on a $p(x + ty) = x$, donc $|x|^2 \leq |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2 |y|^2$. Ainsi $2t\langle x, y \rangle + t^2|y|^2 \geq 0$ pour tout t. Pour $t > 0$, on divise par t et on fait tendre t vers 0 : $\langle x, y \rangle \geq 0$. Pour $t < 0$, on obtient de même $\langle x, y \rangle \leq 0$. **Donc** $\langle x, y \rangle = 0$ **et** p **est un projecteur orthogonal.** En conclusion, pour un projecteur, les trois propriétés « orthogonal », « $p^* = p$ » et « $|p(x)| \leq |x|$ » sont équivalentes.

4. D'après la question 2, $p^* = p$ et $q^* = q$. Alors $q \circ p = q^* \circ p^* = (p \circ q)^* = 0$. Ensuite, $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$, donc $p + q$ est un projecteur. Enfin, $(p + q)^* = p + q$. **D'après la question 1,** $p + q$ **est un projecteur orthogonal.**

Corrigé de l'exercice 21 : Matrices orthogonales à coefficients entiers

1. Une colonne d'une matrice orthogonale est unitaire : la somme des carrés de ses coefficients vaut 1. Ce sont des entiers, donc leurs carrés sont des entiers positifs. **Un seul coefficient vaut** ± 1**, les autres sont nuls : la colonne est** $\pm e_k$ **.**

2. Écrivons la colonne j sous la forme $\pm e_{\sigma(j)}$. Deux colonnes distinctes sont orthogonales, donc $\sigma(j) \neq \sigma(j')$ pour $j \neq j'$. Ainsi σ est injective, donc c'est une permutation. Réciproquement, une telle matrice a des colonnes orthonormées. Il y a $n!$ choix de σ et 2^n choix de signes. **Donc** $\operatorname{card} O_n(\mathbb{Z}) = 2^n\, n!$**.**

3. On a $I_n \in O_n(\mathbb{Z})$. Le produit de deux matrices à coefficients entiers est à coefficients entiers. Enfin, l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée, qui reste à coefficients entiers. **Donc** $O_n(\mathbb{Z})$ **est un sous-groupe de** $O_n(\mathbb{R})$ **.**

4. Soit $\Delta = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1) \in O_n(\mathbb{Z})$. L'application $A \to \Delta A$ est une bijection de $O_n(\mathbb{Z})$ sur lui-même, car elle est involutive. Elle change le signe du déterminant. Elle échange donc les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1. **Il y a** $2^{n-1}\, n!$ **matrices dans** $O_n(\mathbb{Z}) \cap SO_n(\mathbb{R})$**, soit** $4 \times 6 = 24$ **pour** $n = 3$ **.** Ce sont les rotations qui conservent le cube $[-1, 1]^3$.

Corrigé de l'exercice 22 : Transformée de Cayley

1. Le réel $X^T A X$ est égal à sa transposée $X^T A^T X = -X^T A X$, donc il est nul. Soit X tel que $(I_n + A) X = 0$. Alors $0 = X^T (I_n + A) X = X^T X + X^T A X = |X|^2$, donc $X = 0$. **Ainsi $I_n + A$ est inversible.**

2. Les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, car leur produit vaut $I_n - A^2$ dans les deux ordres. En multipliant $(I_n - A)(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)$ à gauche et à droite par $(I_n + A)^{-1}$, on obtient que $I_n - A$ commute avec $(I_n + A)^{-1}$. Ensuite, $Q^T = \big((I_n + A)^{-1}\big)^T (I_n - A)^T = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$, car $A^T = -A$. Par conséquent,

$$Q^T Q = (I_n - A)^{-1} (I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n.$$

Ici $I_n - A$ est inversible, par la question 1 appliquée à l'antisymétrique $-A$. **Donc $Q \in O_n(\mathbb{R})$.**

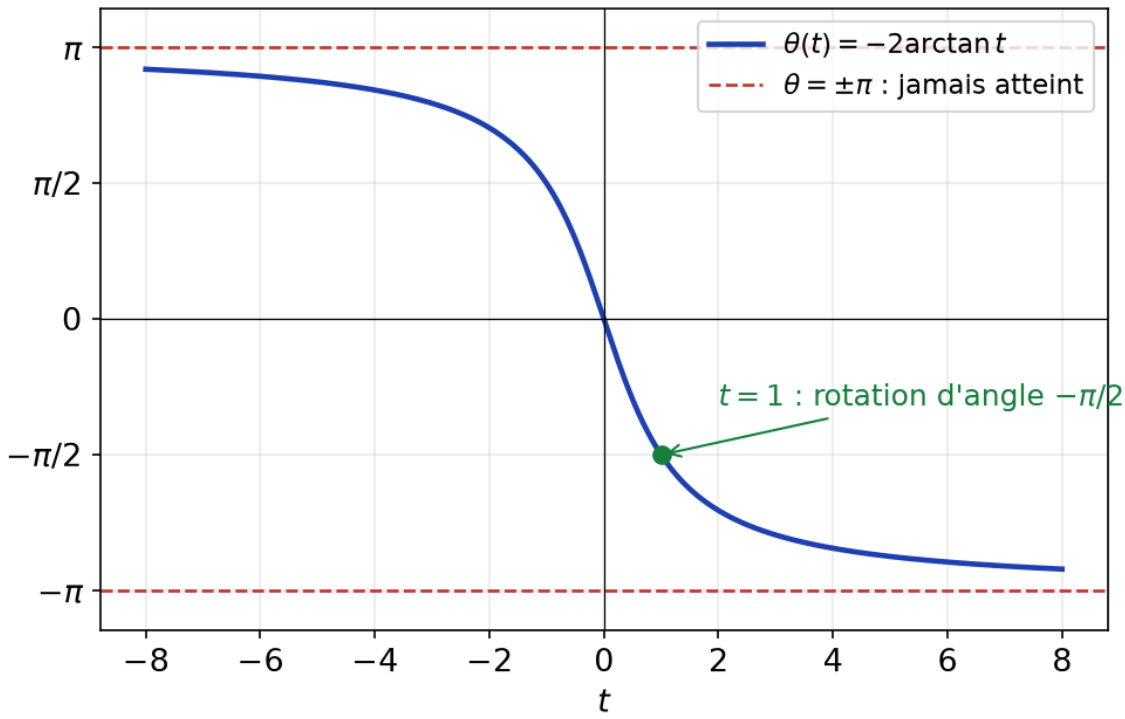
3. On a $\det(I_n - A) = \det\big((I_n - A)^T\big) = \det(I_n + A)$, donc $\det Q = 1$. Ensuite, $Q + I_n = \big((I_n - A) + (I_n + A)\big)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1}$, qui est inversible. **Ainsi $Q \in SO_n(\mathbb{R})$ et -1 n'est pas valeur propre de Q.**

4. On a $(I_2 + A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$Q = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

Posons $\alpha = \arctan t$. Les formules de l'arc moitié donnent $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$. **Donc $Q = R(-2\arctan t)$.** Quand t décrit $\mathbb{R}$, l'angle $-2\arctan t$ décrit $]-\pi, \pi[$. On obtient ainsi toutes les rotations du plan sauf $-I_2$, comme l'illustre la figure ci-dessous.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Corrigé de l'exercice 23 : Problème, décomposition des isométries en réflexions

1. Comme u est une isométrie, $\|u(x)\| = \|x\|$, et $u(x) \neq x$: la réflexion s existe. Alors $v(x) = s(u(x)) = x$. Ensuite, v est une isométrie, composée de deux isométries. Elle stabilise $\mathrm{Vect}(x)$, donc aussi son orthogonal. **Ainsi $v(x) = x$ et $H = x^\perp$ est stable par v.**

2. Notons ℓ la droite orthogonale à K dans H. On a $E = K \oplus \ell \oplus \mathrm{Vect}(x)$, somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux. L'endomorphisme σ vaut l'identité sur $K \oplus \mathrm{Vect}(x)$, qui est un hyperplan de E. Il vaut $-\mathrm{id}$ sur ℓ, qui est orthogonal à cet hyperplan. **Donc σ est la réflexion de E d'hyperplan $K \oplus \mathrm{Vect}(x)$.**

3. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $O(E) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, et $-\mathrm{id}$ est la réflexion d'hyperplan $\{0\}$. Supposons le résultat vrai en dimension $n-1$. Soit $u \in O(E)$. Si $u = \mathrm{id}$, c'est un produit de zéro réflexion. Sinon, on choisit x avec $u(x) \neq x$, et on reprend les notations de la question 1. La restriction de v à H est une isométrie de H. Par hypothèse de récurrence, elle s'écrit $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ avec $k \leq n-1$. D'après la question 2, v et

$\tilde{\sigma}_1 \circ \ldots \circ \tilde{\sigma}_k$ coïncident sur H et en x, donc sur E. Enfin, $s^2 = \mathrm{id}$, donc $u = s \circ v$. **Ainsi** $u = s \circ \tilde{\sigma}_1 \circ \ldots \circ \tilde{\sigma}_k$ **est un produit d'au plus** n **réflexions.**

4. Une réflexion a pour déterminant -1, et le déterminant est multiplicatif : $\det u = (-1)^k$. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$, $r \neq \mathrm{id}$. D'après la question 3, r est un produit de $k \leq 3$ réflexions. Comme $\det r = 1$, k est pair, donc $k \in \{0, 2\}$. Or $k = 0$ donnerait $r = \mathrm{id}$. **Donc** r **est la composée de deux réflexions, et jamais d'une ou de trois, pour des raisons de déterminant.**

5. On a $A_4(x, y, z) = (z, x, y)$. Soit s_1 la réflexion qui échange les deux premières coordonnées, de plan $x = y$, de vecteur normal $n_1 = (1, -1, 0)$. Soit s_2 celle qui échange les deux dernières, de plan $y = z$, de vecteur normal $n_2 = (0, 1, -1)$. Alors $s_2(x, y, z) = (x, z, y)$, puis $s_1(x, z, y) = (z, x, y)$. **Donc** $A_4 = S_1 S_2$**, avec** $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.** Les deux plans contiennent l'axe $\mathrm{Vect}(1, 1, 1)$. De plus, $\cos(n_1, n_2) = \frac{-1}{2}$: les normales font un angle $\frac{2\pi}{3}$, donc les plans font un angle $\frac{\pi}{3}$. On retrouve le phénomène plan de l'exercice 12 : l'angle de la rotation, $\frac{2\pi}{3}$, est le double de l'angle entre les plans.

6. Le déterminant de $-I_3$ vaut -1, donc le nombre k de réflexions est impair, et $k \leq 3$. Si $k = 1$, $-I_3$ serait une réflexion et fixerait un plan, alors qu'il ne fixe que 0. Donc $k = 3$. **Concrètement,** $-I_3$ **est le produit des trois réflexions de plans** $x = 0$**,** $y = 0$ **et** $z = 0$**.**

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : isométries vectorielles, cours de maths spé
- Les énoncés : exercices de maths spé sur isométries vectorielles
- À maîtriser avant : Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton
- Chapitre précédent : Fonctions génératrices

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- Chapitre suivant : Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral
- Tester vos connaissances : QCM de maths spé par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths spé et les chapitres de maths sup