

Isométries et théorème spectral

Exercice 1 : Reconnaître des matrices orthogonales

On considère les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & - & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est orthogonale. Donner A^{-1} sans calcul, puis calculer $\det A$.
2. La matrice B est-elle orthogonale ? Déterminer les réels k tels que kB soit orthogonale.
3. Montrer que C est orthogonale, calculer $\det C$ et C^3 .
4. Déterminer les réels a, b, c tels que $D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & b & \\ 2 & -2 & c \end{pmatrix}$ appartienne à $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Adjoint pour un produit scalaire non canonique

On munit $\mathbb{R}^2$ de $\varphi(x, y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$. Soit u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2) .

1. Vérifier que φ est un produit scalaire et donner une base orthonormée $\mathcal{B}'$ pour φ .

2. Déterminer la matrice B de l'adjoint u^* (pour φ) dans la base canonique, en revenant à la définition. Contrôler le résultat à l'aide de B' .
3. L'endomorphisme u est-il symétrique pour φ ? Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont l'endomorphisme associé est symétrique pour φ .

Exercice 3 : Noyau et image de l'adjoint

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker(u^* \circ u) = \ker u$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(u^* \circ u) = \operatorname{rg} u$, puis que $\operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im} u^*$.
3. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u^*$, la somme étant orthogonale.
4. Application : dans $\mathbb{R}^3$ canonique, u a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\ker u$, $\operatorname{Im} u$, $\ker u^*$ et $\operatorname{Im} u^*$, et vérifier les relations d'orthogonalité du cours.

Exercice 4 : Adjoints dans l'espace des matrices

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(X^T Y)$. On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les adjoints de $L_M : X \rightarrow MX$ et de $R_M : X \rightarrow XM$.
2. Montrer que $\tau : X \rightarrow X^T$ est à la fois symétrique et orthogonale. En déduire que τ est une symétrie orthogonale, puis que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
3. Soit $\operatorname{ad}_M : X \rightarrow MX - XM$. Montrer que $(\operatorname{ad}_M)^* = \operatorname{ad}_{M^T}$.

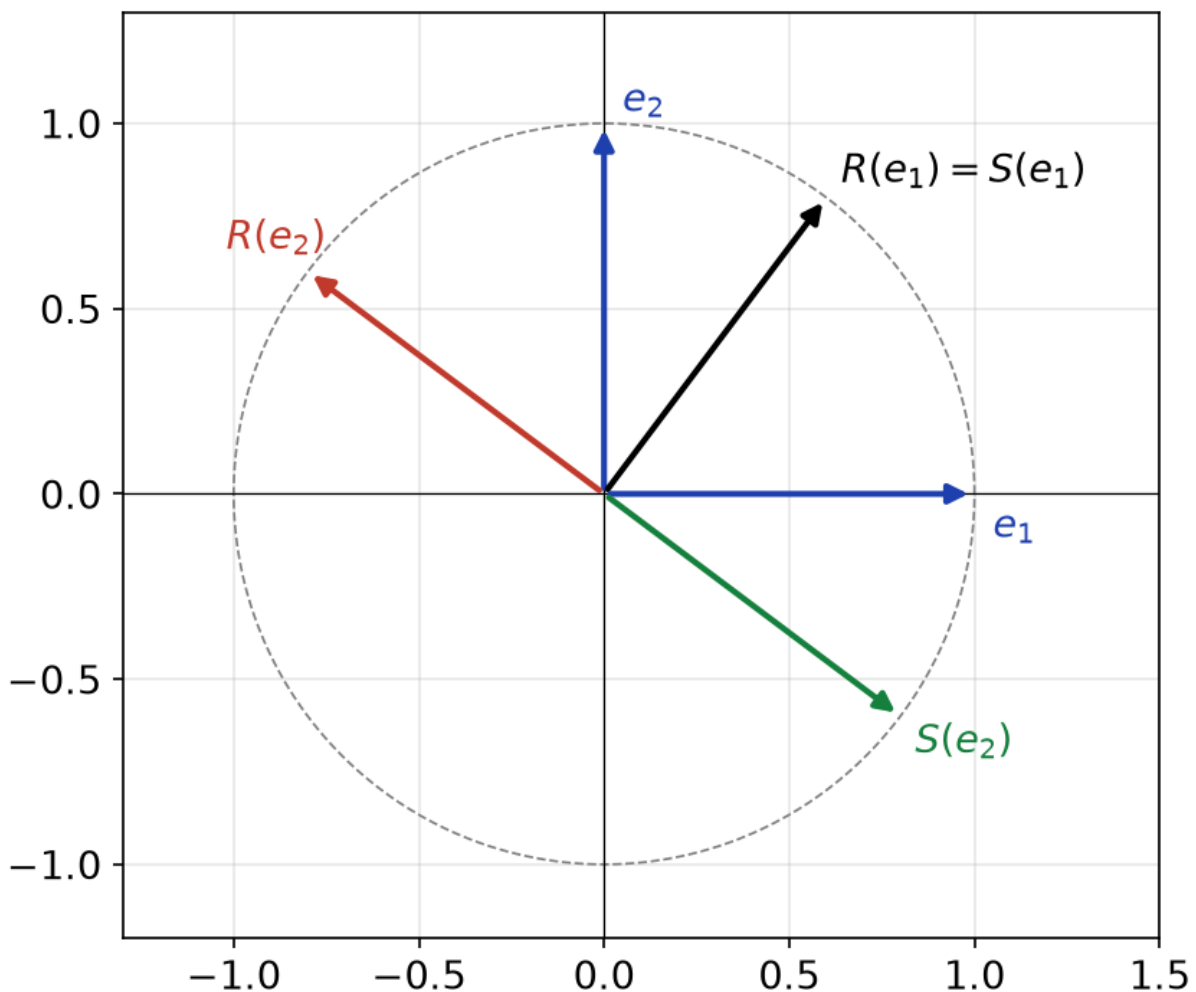
4. On suppose M symétrique. Montrer que Im ad_M est l'orthogonal de l'ensemble des matrices qui commutent avec M . En déduire que M n'appartient pas à Im ad_M si $M \neq 0$.

Exercice 5 : Rotation et réflexion du plan

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on considère

$$R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

La figure ci-dessous représente les vecteurs de la base canonique et leurs images par R et S .



1. Montrer que R et S sont orthogonales et préciser leur nature. On notera $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le réel tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$.
2. Déterminer l'axe de S : on donnera un vecteur directeur à coordonnées entières.
3. Calculer RS et SR et préciser leur nature et leur axe.
4. Calculer R^2 et S^2 .

Exercice 6 : Nature de quatre isométries de l'espace

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par la base canonique.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de matrices

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Traiter A et B , en remarquant qu'elles s'écrivent à l'aide de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.
2. Traiter C : axe orienté et angle.
3. Traiter D : on l'écrira comme la composée d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe.

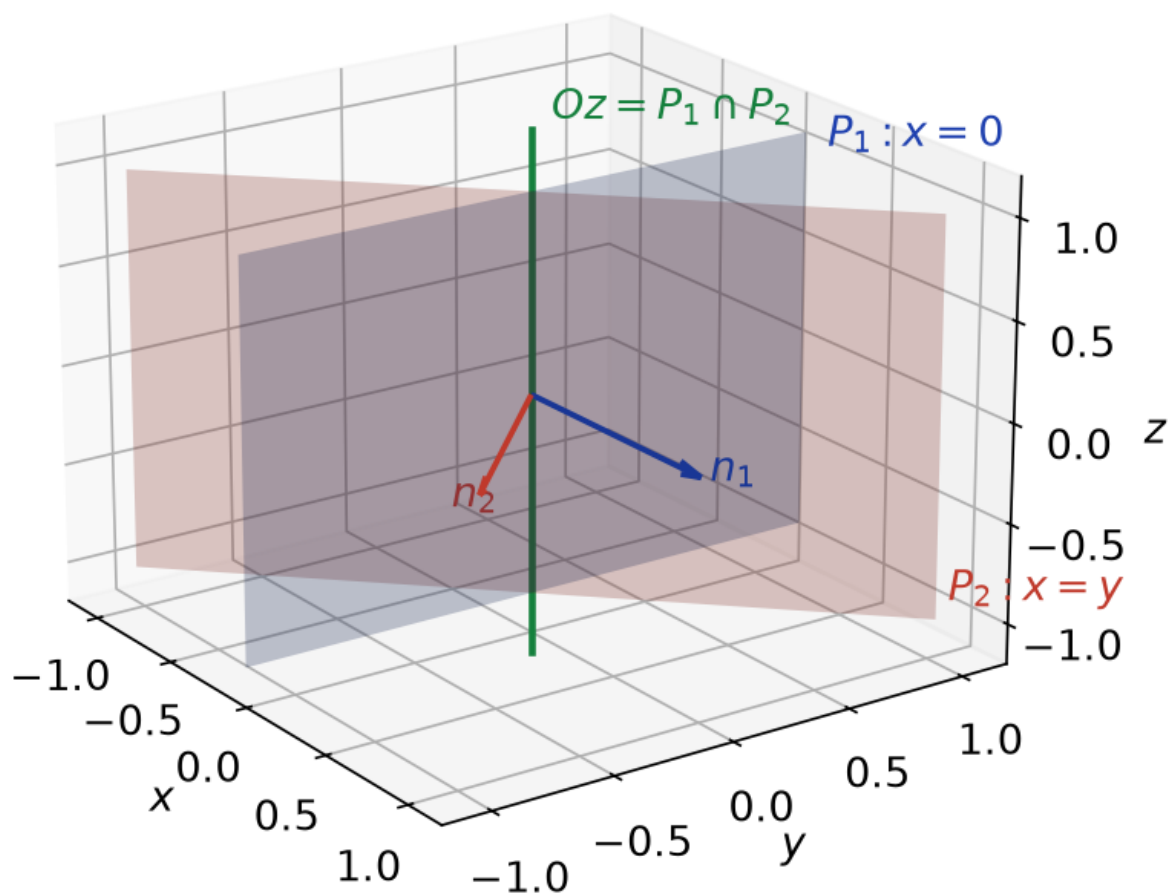
Exercice 7 : Matrice d'une rotation donnée par son axe et son angle

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, soit r la rotation d'axe dirigé et orienté par $w = (1, 1, 0)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. À l'aide de la formule $r(x) = \cos\theta \, x + (1 - \cos\theta) \langle x, n \rangle n + \sin\theta \, n \wedge x$, où $n = \frac{w}{|w|}$, calculer $r(e_1)$, $r(e_2)$, $r(e_3)$. En déduire la matrice R de r .
2. Vérifier que R est orthogonale, de déterminant 1, et que sa trace est cohérente avec l'angle.
3. Calculer R^2 . Reconnaître l'isométrie obtenue.

Exercice 8 : Composée de deux réflexions de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on note s_1 la réflexion par rapport au plan $P_1 : x = 0$ et s_2 la réflexion par rapport au plan $P_2 : x = y$, représentés sur la figure ci-dessous.



1. Écrire les matrices de s_1 et s_2 à l'aide de la formule $s_a(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{|a|^2} a$.
2. Calculer les matrices de $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$, et reconnaître ces isométries.
3. Plus généralement, soient $P_1 \neq P_2$ deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la composée des réflexions associées est une rotation d'axe $P_1 \cap P_2$.
4. Réciproquement, soit r une rotation d'axe D et P un plan contenant D . Montrer que $s_P \circ r$ est une réflexion, puis que r est la composée de deux réflexions.

Exercice 9 : Isométries symétriques et projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in O(E)$. Montrer que u est symétrique si et seulement si u est une symétrie orthogonale.
2. Soit P un projecteur de E . Montrer que P est une projection orthogonale si et seulement si P est symétrique.
3. Application : montrer que $H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une réflexion de $\mathbb{R}^4$ et déterminer l'hyperplan associé.

Exercice 10 : Diagonalisation d'une matrice symétrique en base orthonormée

Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(1, 2, 1)$, $(1, 0, -1)$ et $(1, -1, 1)$ sont des vecteurs propres de S .
2. En déduire une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $S = P D P^T$.
3. Montrer que S est définie positive. Déterminer le minimum de $X^T S X$ lorsque $|X| = 1$, et les vecteurs où il est atteint.
4. Calculer $\det S$ et S^{-1} .

Exercice 11 : Matrice symétrique à valeur propre double

Soit $S = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(1, 0, -1)$ et $(1, 1, 1)$ sont des vecteurs propres de S pour la même valeur propre.
2. Déterminer le spectre de S à l'aide de la trace, puis une base orthonormée de vecteurs propres.
3. Montrer que $S = 6I_3 + v v^T$ avec $v = (1, -2, 1)^T$.
4. En déduire, pour tout entier $k \geq 1$, une expression de S^k en fonction de I_3 et de $v v^T$.

Exercice 12 : Matrices définies positives et critère de Sylvester

1. Soit $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire $X^T S X$ comme une somme de quatre carrés et en déduire que S est définie positive. Retrouver ce résultat par le critère de Sylvester.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles S_a est définie positive.
3. Vérifier que $(1, 0, -1)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$ et $(1, -\sqrt{2}, 1)$ sont vecteurs propres de S_a . Pour quelles valeurs de a la matrice S_a est-elle positive ?
4. Montrer qu'une matrice symétrique dont un coefficient diagonal est négatif ou nul n'est pas définie positive.

Exercice 13 : Formes quadratiques du plan et lignes de niveau

On considère $q_1(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ et $q_2(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$.

1. Écrire les matrices symétriques S_1 et S_2 de q_1 et q_2 , puis les diagonaliser dans une base orthonormée.
2. Déterminer la nature de la courbe $q_1(x, y) = 36$ et ses demi-axes.
3. Déterminer le maximum et le minimum de q_1 sur le cercle unité, et les points où ils sont atteints.
4. Déterminer la nature de la courbe $q_2(x, y) = 3$, ses sommets et ses asymptotes.

Exercice 14 : Matrices de Gram

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est symétrique positive et que $\ker(A^T A) = \ker A$. En déduire que $A^T A$ est définie positive si et seulement si $\text{rg } A = n$.
2. Montrer que $A^T A$ et $A A^T$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
3. Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^T A$ et $A A^T$, leurs spectres et des vecteurs propres.
4. Réciproquement, montrer que toute $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ s'écrit $S = B^T B$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que B est inversible si S est définie positive.

Exercice 15 : Racines carrées d'une matrice symétrique positive

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser S dans une base orthonormée.
2. Déterminer une matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.
3. Déterminer toutes les matrices symétriques T telles que $T^2 = S$.
4. Dans le cas général, soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$. Montrer que R laisse stable chaque sous-espace propre de S , puis que R est unique.

Exercice 16 : Matrices hermitiennes et normales de taille 2

On munit $\mathbb{C}^2$ du produit hermitien canonique $\langle X, Y \rangle = \overline{X}^T Y$. Soient $H = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que H est hermitienne. Déterminer son spectre et une matrice unitaire U telle que $U^* H U$ soit diagonale.
2. Montrer que N est normale, mais ni symétrique ni orthogonale. La diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$.
3. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}} N$ est unitaire et vérifier que ses valeurs propres sont de module 1.

Exercice 17 : Propriétés des endomorphismes normaux

Soit E un espace hermitien et u un endomorphisme normal de E : $u u^* = u^* u$.

1. Montrer que $|u(x)| = |u^*(x)|$ pour tout x , puis que $\ker u = \ker u^*$.
2. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ker(u - \lambda \text{id}) = \ker(u^* - \bar{\lambda} \text{id})$.
3. Montrer que deux sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
4. Montrer que $\text{Im } u = (\ker u)^\perp$, puis que $\ker u^2 = \ker u$.
5. Déterminer toutes les matrices réelles $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $M M^T = M^T M$.

Exercice 18 : Transformation de Cayley

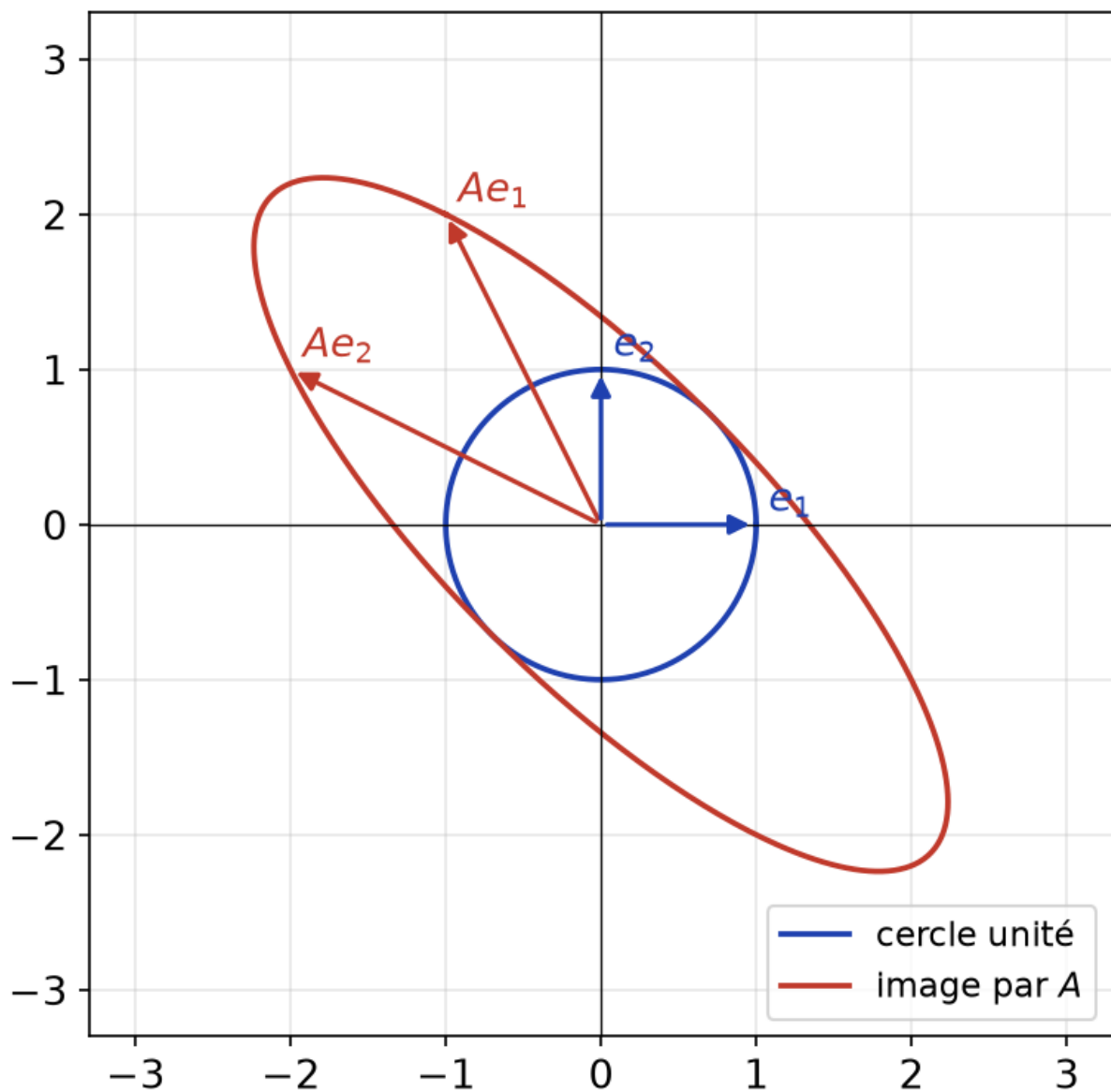
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique : $A^T = -A$.

1. Montrer que $X^T A X = 0$ pour tout X , puis que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.
2. On pose $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent, puis que Q est orthogonale.
3. Montrer que $\det Q = 1$ et que -1 n'est pas valeur propre de Q .
4. Réciproquement, soit $Q \in O_n(\mathbb{R})$ dont -1 n'est pas valeur propre. Montrer que $A = (I_n - Q)(I_n + Q)^{-1}$ est antisymétrique et que $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.
5. Cas $n = 2$: pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, calculer Q . Quelles rotations obtient-on ?

Exercice 19 : Décomposition polaire d'une matrice inversible

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est symétrique définie positive.
2. Soit S l'unique matrice symétrique définie positive telle que $S^2 = A^T A$. Montrer que $O = A S^{-1}$ est orthogonale. On obtient ainsi $A = OS$.
3. Montrer l'unicité du couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
4. Application : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$. Déterminer S et O (on pourra utiliser l'exercice 15). Interpréter la figure ci-dessous, qui montre l'image du cercle unité par A , et donner les demi-axes de l'ellipse obtenue.



Exercice 20 : Problème : quotient de Rayleigh et norme d'une matrice

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pour $X \neq 0$, on pose $\rho_S(X) = \frac{X^T S X}{X^T X}$.

1. Montrer que $\lambda_1 \leq \rho_S(X) \leq \lambda_n$, avec égalité à droite si et seulement si X est vecteur propre associé à λ_n . En déduire $\lambda_n = \max_{|X|=1} X^T S X$ et $\lambda_1 = \min_{|X|=1} X^T S X$.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|A| = \sup_{X \neq 0} \frac{|AX|}{|X|}$. Montrer que $|A| = \sqrt{\mu}$, où μ est la plus grande valeur propre de $A^T A$.
3. Montrer que si S est symétrique, alors $|S| = \max_i |\lambda_i|$.
4. Calculer $|A|$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur unitaire X tel que $|AX| = |A|$. Comparer avec $\max |\lambda|$ pour les valeurs propres λ de A .
5. Soient $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec T positive. Montrer que la plus grande valeur propre de $S + T$ est supérieure ou égale à celle de S , et de même pour les plus petites.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [isométries et théorème spectral, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#), [Valeurs propres et diagonalisation](#)
- Chapitre précédent : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Chapitre suivant : [Séries de Fourier](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)

