

Isométries et théorème spectral

Corrigé de l'exercice 1 : Reconnaître des matrices orthogonales

1. Les colonnes de $7A$ sont $c_1 = (2, 3, 6)$, $c_2 = (6, 2, -3)$ et $c_3 = (3, -6, 2)$. D'abord, $|c_1|^2 = 4 + 9 + 36 = 49$, et de même $|c_2|^2 = |c_3|^2 = 49$. Ensuite, $c_1 \cdot c_2 = 12 + 6 - 18 = 0$, $c_1 \cdot c_3 = 6 - 18 + 12 = 0$ et $c_2 \cdot c_3 = 18 - 12 - 6 = 0$. Les colonnes de A forment donc une base orthonormée : A est orthogonale et

$$A^{-1} = A^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par développement selon la première ligne,

$$\det(7A) = 2(4 - 18) - 6(6 + 36) + 3(-9 - 12) = -28 - 252 - 63 = -343.$$

Comme $\det(7A) = 7^3 \det A = 343 \det A$, on obtient $\det A = -1$.

2. Les colonnes $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ de B sont orthogonales, mais de norme $\sqrt{2}$. En effet, $B^T B = 2I_2$. Donc B n'est pas orthogonale. Ensuite, $(kB)^T(kB) = 2k^2 I_2$, qui vaut I_2 si et seulement si $k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Les colonnes de C sont e_2 , e_3 et e_1 : elles forment une base orthonormée, donc C est orthogonale. En développant selon la première ligne, $\det C = (+1) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. Par ailleurs, $C e_1 = e_2$, $C e_2 = e_3$ et $C e_3 = e_1$. Ainsi C^3 fixe chaque vecteur de base : $\det C = 1$ et $C^3 = I_3$.
4. Les deux premières colonnes $u = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ et $v = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ sont unitaires, car $1 + 4 + 4 = 9$. De plus, elles sont orthogonales : $2 + 2 - 4 = 0$. La troisième colonne doit être unitaire et orthogonale à u et v : c'est donc $\pm u \wedge v$. Or

$$(1, 2, 2) \wedge (2, 1, -2) = (-4 - 2, 4 + 2, 1 - 4) = (-6, 6, -3),$$

donc $u \wedge v = \frac{1}{9}(-6, 6, -3) = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$. Enfin, $\det(u, v, u \wedge v) = |u \wedge v|^2 = 1$, tandis que le choix opposé donne -1 . Par conséquent, $(a, b, c) = (-2, 2, -1)$.

Corrigé de l'exercice 2 : Adjoint pour un produit scalaire non canonique

1. La forme φ est bilinéaire et symétrique. De plus, $\varphi(x, x) = 2x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. C'est donc un produit scalaire. Comme $\varphi(e_1, e_1) = 2$, $\varphi(e_2, e_2) = 1$ et $\varphi(e_1, e_2) = 0$, la famille $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, e_2\right)$ est orthonormée pour φ .

2. Notons $G = \text{diag}(2, 1)$ la matrice de Gram, de sorte que $\varphi(x, y) = X^T G Y$. D'une part, $\varphi(u(x), y) = X^T A^T G Y$. D'autre part, $\varphi(x, u^*(y)) = X^T G B Y$. L'égalité pour tous X, Y équivaut à $A^T G = G B$, donc à $B = G^{-1} A^T G$. On calcule

$$A^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Contrôlons avec $\mathcal{B}'$. La matrice de passage est $P = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, donc

$A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Comme $\mathcal{B}'$ est orthonormée, la matrice de u^* dans $\mathcal{B}'$ est A'^T . En revenant à la base canonique,

$$P A'^T P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{On retrouve bien } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Comme $B \neq A$, u n'est pas symétrique pour φ . Plus généralement, l'endomorphisme de matrice M est symétrique si et seulement si $M^T G = G M$, c'est-à-dire si GM est une matrice symétrique. Or $GM = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix}$. La condition s'écrit donc $c = 2b$: les matrices cherchées sont les $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & d \end{pmatrix}$.

Point de méthode : dans une base qui n'est pas orthonormée, la matrice de l'adjoint n'est pas la transposée ; il faut passer par la matrice de Gram.

Corrigé de l'exercice 3 : Noyau et image de l'adjoint

1. D'abord, $\ker u \subset \ker(u^* u)$ est immédiat. Réciproquement, si $u^* u(x) = 0$, alors

$$|u(x)|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^* u(x) \rangle = 0.$$

Donc $u(x) = 0$. Ainsi $\ker(u^* u) = \ker u$.

2. Par le théorème du rang, $\operatorname{rg}(u^* u) = n - \dim \ker(u^* u) = n - \dim \ker u = \operatorname{rg} u$.

De plus, $\operatorname{Im}(u^* u) \subset \operatorname{Im} u^*$ et $\operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u$. Les deux espaces ont donc la même dimension, d'où $\operatorname{Im}(u^* u) = \operatorname{Im} u^*$.

3. D'après le cours, $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$. Or $E = F \oplus F^\perp$ pour tout sous-espace F . Par conséquent $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u^*$, somme orthogonale.

4. Le système $AX = 0$ s'écrit $x + y = 0$, $y + z = 0$, la troisième équation étant la somme des deux premières. Donc $\ker u = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ et $\operatorname{rg} u = 2$. Ensuite, la troisième colonne $(0, 1, 1)$ est la différence des deux premières. Ainsi $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 2))$, plan de vecteur normal $(1, 0, 1) \wedge (1, 1, 2) = (-1, -1, 1)$. Par ailleurs, $A^T X = 0$ s'écrit $x + z = 0$, $x + y + 2z = 0$, $y + z = 0$, d'où $\ker u^* = \mathbb{R}(1, 1, -1)$. Enfin, $\operatorname{Im} u^*$ est engendrée par les lignes $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ de A , qui sont orthogonales à $(1, -1, 1)$. En résumé :

$$\ker u = \mathbb{R}(1, -1, 1), \operatorname{Im} u : x + y - z = 0, \ker u^* = \mathbb{R}(1, 1, -1), \operatorname{Im} u^* : x - y + z = 0.$$

On vérifie bien que $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 4 : Adjoint dans l'espace des matrices

1. Pour X, Y quelconques, $\langle MX, Y \rangle = \operatorname{tr}(X^T M^T Y) = \langle X, M^T Y \rangle$. De même, grâce à $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$,

$$\langle XM, Y \rangle = \operatorname{tr}(M^T X^T Y) = \operatorname{tr}(X^T Y M^T) = \langle X, Y M^T \rangle.$$

Par unicité de l'adjoint, $L_M^* = L_{M^T}$ et $R_M^* = R_{M^T}$.

2. D'une part, $\langle X^T, Y \rangle = \text{tr}(XY)$. D'autre part,
 $\langle X, Y^T \rangle = \text{tr}(X^T Y^T) = \text{tr}((YX)^T) = \text{tr}(YX) = \text{tr}(XY)$. Donc $\tau^* = \tau$.
 Ensuite, $|X^T|^2 = \sum_{i,j} x_{ji}^2 = |X|^2$, donc τ est orthogonale. Par conséquent
 $\tau^2 = \tau^* \tau = \text{id}$: τ est une symétrie. Ses sous-espaces propres $\ker(\tau - \text{id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
 et $\ker(\tau + \text{id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux, car τ est symétrique. Ainsi τ **est la**
symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Comme $\text{ad}_M = L_M - R_M$ et que l'adjoint est linéaire, $(\text{ad}_M)^* = L_{M^T} - R_{M^T}$. On
 obtient $(\text{ad}_M)^* = \text{ad}_{M^T}$.
4. Si M est symétrique, alors ad_M est symétrique. D'après le cours,
 $\text{Im ad}_M = (\ker \text{ad}_M^*)^\perp = (\ker \text{ad}_M)^\perp$. Or $\ker \text{ad}_M$ est exactement l'ensemble
 $\mathcal{C}(M)$ des matrices qui commutent avec M . Donc $\text{Im ad}_M = \mathcal{C}(M)^\perp$. Enfin,
 $M \in \mathcal{C}(M)$ et $\langle M, M \rangle = |M|^2 > 0$ si $M \neq 0$. Par conséquent $M \notin \mathcal{C}(M)^\perp$:
 M n'est pas dans l'image de ad_M .

Corrigé de l'exercice 5 : Rotation et réflexion du plan

1. Les colonnes de R sont $\frac{1}{5}(3, 4)$ et $\frac{1}{5}(-4, 3)$: elles sont unitaires, car $9 + 16 = 25$, et
 orthogonales, car $-12 + 12 = 0$. De plus, $\det R = \frac{9+16}{25} = 1$. Ainsi $R = R_\theta$ **est la**
rotation d'angle θ . De même, les colonnes de S sont orthonormées et
 $\det S = \frac{-9-16}{25} = -1$. Donc $S = S_\theta$ **est une réflexion**.
2. L'axe de S_θ est dirigé par $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$. Or $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{4}{5}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{5}$, avec
 $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Donc $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$. Vérification :
 $S(2, 1) = \frac{1}{5}(6 + 4, 8 - 3) = (2, 1)$ et $S(1, -2) = \frac{1}{5}(3 - 8, 4 + 6) = -(1, -2)$. **L'axe**
de S est $\mathbb{R}(2, 1)$.
3. Un calcul direct donne

$$RS = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9-16 & 12+12 \\ 12+12 & 16-9 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}, \quad SR = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}.$$

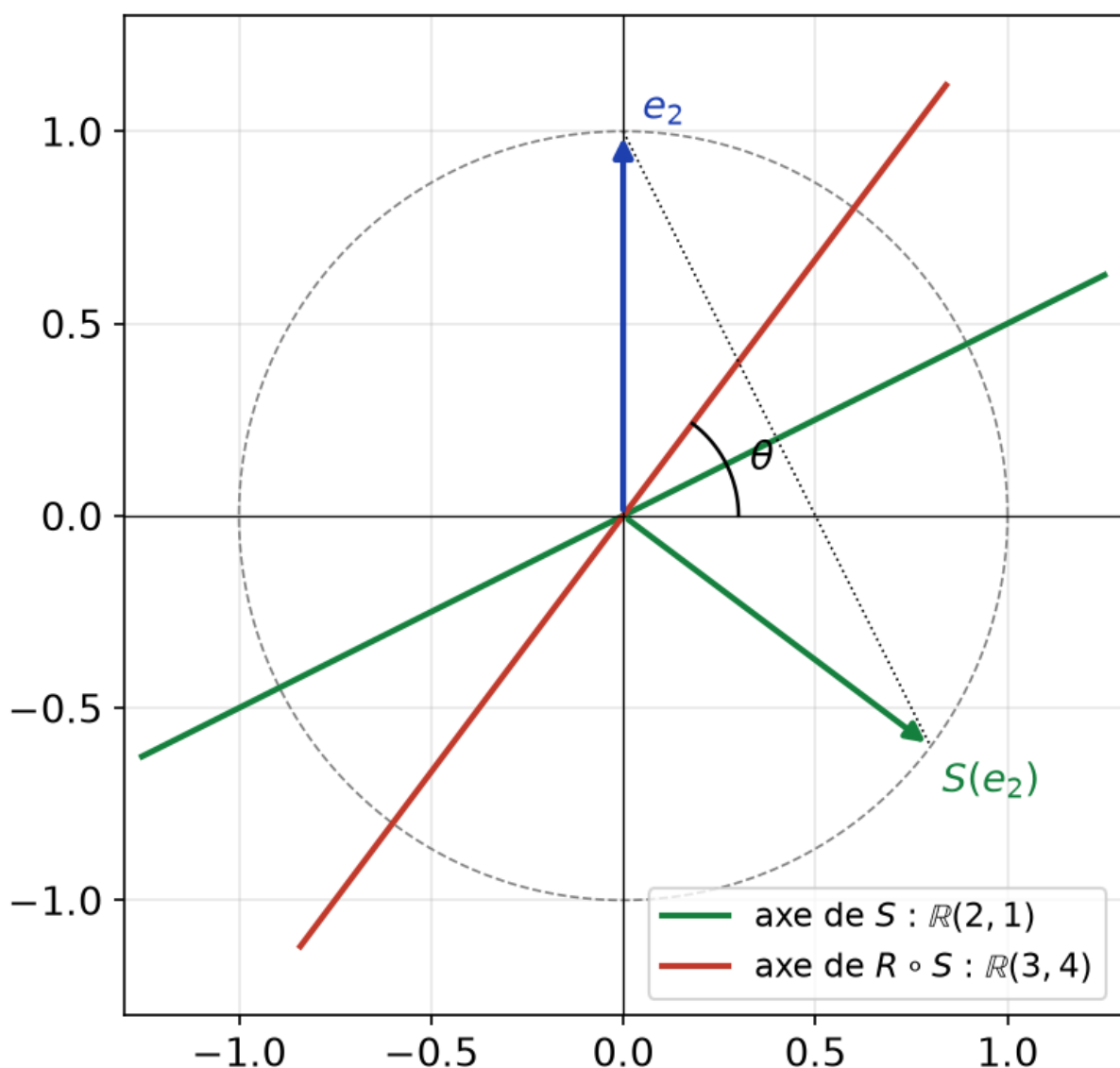
Ce résultat est conforme aux formules $R_\theta S_\theta = S_{2\theta}$ et $S_\theta R_\theta = S_0$. Ainsi **RS est la**
réflexion d'axe $\mathbb{R}(\cos \theta, \sin \theta) = \mathbb{R}(3, 4)$; on vérifie que

$$RS(3, 4) = \frac{1}{25}(75, 100) = (3, 4). \text{ De son côté, } SR \text{ est la réflexion d'axe } \mathbb{R} e_1. \text{ La}$$

composition n'est donc pas commutative.

4. On trouve $R^2 = R_{2\theta} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$, rotation d'angle 2θ , et $S^2 = I_2$, comme pour toute réflexion.

La figure ci-dessous montre les deux axes obtenus. On y voit aussi que $S(e_2)$ est le symétrique de e_2 par rapport à l'axe $R(2, 1)$.



Corrigé de l'exercice 6 : Nature de quatre isométries de l'espace

1. On remarque que $A = \frac{2}{3}J - I_3$ et $B = I_3 - \frac{2}{3}J = -A$. La matrice J vérifie $J(1, 1, 1)^T = 3(1, 1, 1)^T$ et s'annule sur le plan $\Pi : x + y + z = 0$. Par conséquent, A fixe $(1, 1, 1)$ et vaut $-\text{id}$ sur Π , qui est orthogonal à $(1, 1, 1)$. Dans une base orthonormée adaptée, A a pour matrice $\text{diag}(1, -1, -1)$. Ainsi **A est le retournement (rotation d'angle π) d'axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$** . De même, B vaut -1 sur $(1, 1, 1)$ et 1 sur Π : **B est la réflexion par rapport au plan $x + y + z = 0$** . On retrouve d'ailleurs la formule $s_a = I_3 - \frac{2}{|a|^2} a a^T$ avec $a = (1, 1, 1)$.

2. Les colonnes de $3C$ sont $(2, -1, -2)$, $(2, 2, 1)$ et $(1, -2, 2)$, toutes de norme 3 . Leurs produits scalaires valent $4 - 2 - 2 = 0$, $2 + 2 - 4 = 0$ et $2 - 4 + 2 = 0$. Donc C est orthogonale. Ensuite,

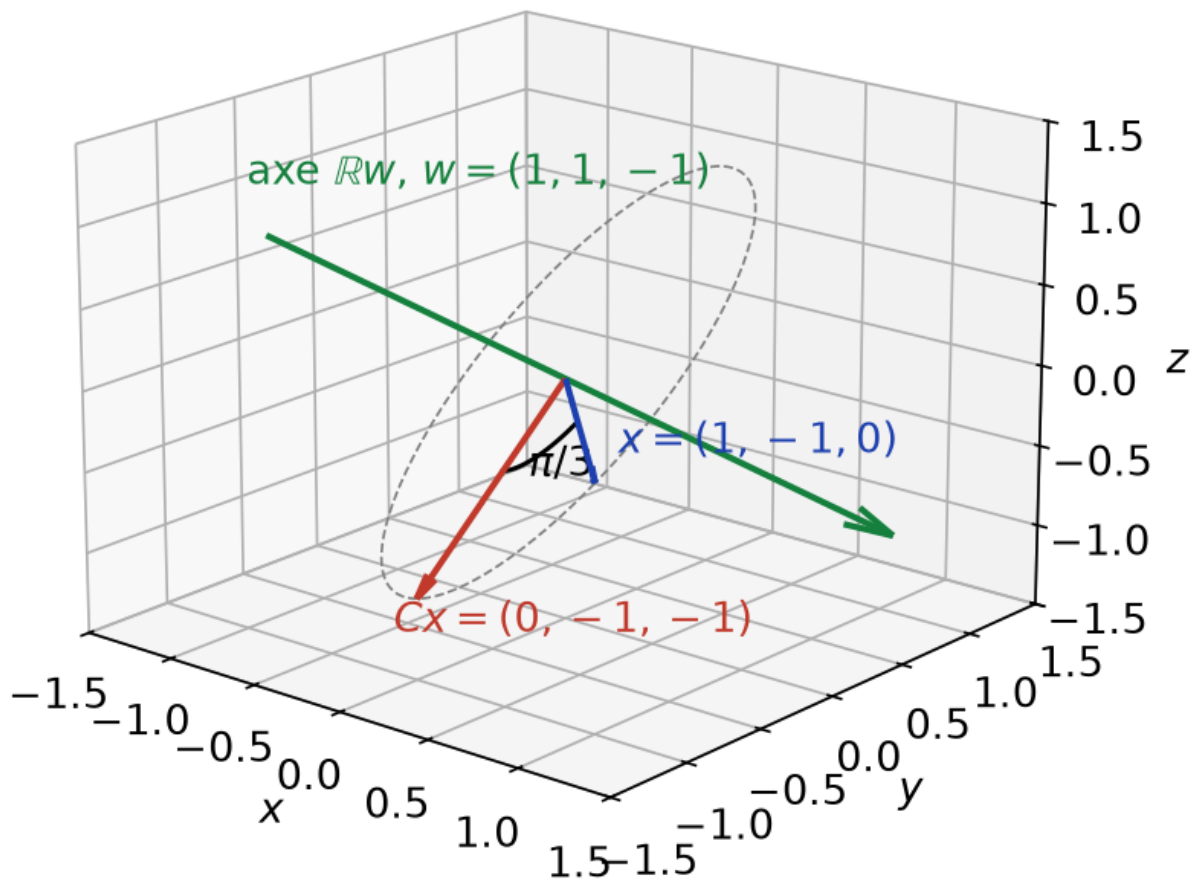
$$\det(3C) = 2(4 + 2) - 2(-2 - 4) + 1(-1 + 4) = 27,$$

donc $\det C = 1$: C est une rotation. Cherchons l'axe. Le système $(3C - 3I_3)X = 0$ donne $-x + 2y + z = 0$ et $-x - y - 2z = 0$. En soustrayant, $3y + 3z = 0$, donc $y = -z$, puis $x = -z$. L'axe est dirigé par $w = (1, 1, -1)$; on vérifie que $Cw = \frac{1}{3}(3, 3, -3) = w$. Puis $\text{tr } C = 2 = 1 + 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Enfin, prenons $x = (1, -1, 0)$, orthogonal à w . On obtient $Cx = (0, -1, -1)$, puis

$$\det(x, Cx, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (1 + 1) + 1 \times (1 - 0) = 3 > 0.$$

Donc $\sin\theta > 0$ et **C est la rotation d'axe orienté par $(1, 1, -1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$** . Le produit scalaire $\langle x, Cx \rangle = 1 = |x|^2 \cos\theta$ confirme ce résultat.

La figure ci-dessous représente cette rotation. Le vecteur x et son image Cx sont dans le plan orthogonal à l'axe, et forment un angle de $\frac{\pi}{3}$.



3. Les colonnes de $3D$ sont $(-2, 1, -2)$, $(-2, -2, 1)$ et $(1, -2, -2)$, de norme 3 . Leurs produits scalaires valent $4 - 2 - 2 = 0$, $-2 - 2 + 4 = 0$ et $-2 + 4 - 2 = 0$. Donc D est orthogonale. Ensuite,

$$\det(3D) = -2(4 + 2) + 2(-2 - 4) + 1(1 - 4) = -27,$$

donc $\det D = -1$. D'après le cours, il existe une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de D est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{[\pi]} \end{pmatrix}$, en écriture par blocs. Or

$D(1, 1, 1)^T = (-1, -1, -1)^T$, donc on prend e_1 colinéaire à $w = (1, 1, 1)$. Puis $\text{tr } D = -2 = -1 + 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Avec $x = (1, -1, 0)$, on trouve $Dx = (0, 1, -1)$ et

$$\det(x, Dx, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (1 + 1) + 1 \times (1 - 0) = 3 > 0.$$

Donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Finalement, $D = r \circ s = s \circ r$, où r est la rotation d'axe orienté par $(1, 1, 1)$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et s la réflexion par rapport au plan $x + y + z = 0$.

Point de méthode : pour une isométrie de déterminant -1 , on cherche l'axe dans $\ker(A + I_3)$ et l'on utilise $\text{tr } A = -1 + 2\cos\theta$.

Corrigé de l'exercice 7 : Matrice d'une rotation donnée par son axe et son angle

1. Ici $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc la formule devient $r(x) = \langle x, n \rangle n + n \wedge x$. Pour e_1 , on a $\langle e_1, n \rangle n = \frac{1}{2}(1, 1, 0)$ et $n \wedge e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1)$. Pour e_2 , on a $\langle e_2, n \rangle n = \frac{1}{2}(1, 1, 0)$ et $n \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1)$. Enfin, $\langle e_3, n \rangle = 0$ et $n \wedge e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. On obtient

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de R sont $r(e_1)$, $r(e_2)$, $r(e_3)$ ci-dessus.

2. Chaque colonne a pour carré de norme $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ (ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ pour la troisième). Les produits scalaires valent $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$, $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$ et $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$. Donc R est orthogonale. En développant selon la troisième ligne,

$$\det R = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Enfin, $\text{tr } R = 1 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2}$. **Tout est cohérent.**

3. Le calcul ligne par colonne donne

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ vaut $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ et le coefficient $(3, 3)$ vaut $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1$. Cette matrice est symétrique, orthogonale et de déterminant 1 . Elle fixe $(1, 1, 0)$ et change en leur opposé $(1, -1, 0)$ et e_3 . **R^2 est le retournement d'axe** $\mathbb{R}(1, 1, 0)$, ce qui est logique : deux quarts de tour font un demi-tour.

Corrigé de l'exercice 8 : Composée de deux réflexions de l'espace

1. Pour P_1 , un vecteur normal est $a_1 = e_1$, donc $s_1 = I_3 - 2 e_1 e_1^T = \text{diag}(-1, 1, 1)$.
 Pour P_2 , un vecteur normal est $a_2 = (1, -1, 0)$, avec $|a_2|^2 = 2$. Ainsi

$$s_2 = I_3 - a_2 a_2^T = I_3 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La réflexion s_2 échange les deux premières coordonnées.

2. On obtient

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$s_1 \circ s_2$ est la rotation d'axe Oz orienté par e_3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$; $s_2 \circ s_1$ est sa réciproque, d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On remarque que l'angle entre les plans vaut $\frac{\pi}{4}$, soit la moitié de l'angle de la rotation.

3. Posons $f = s_1 \circ s_2$. D'abord, f est une isométrie de déterminant $(-1)^2 = 1$, donc une rotation. Ensuite, $D = P_1 \cap P_2$ est une droite, car les plans sont distincts. Chaque vecteur de D est fixé par s_1 et par s_2 , donc par f . De plus, $f \neq \text{id}$: sinon $s_1 = s_2^{-1} = s_2$, et les plans $P_i = \ker(s_i - \text{id})$ seraient égaux. Or une rotation différente de l'identité fixe

exactement les vecteurs de son axe. **Donc f est une rotation d'axe $P_1 \cap P_2$.**

4. Posons $g = s_P \circ r$. C'est une isométrie de déterminant -1 qui fixe chaque vecteur de D , car $D \subset P$. Par conséquent, g laisse stable le plan $D^\perp$. Sa restriction à $D^\perp$ est une isométrie plane de déterminant -1 , c'est-à-dire une réflexion d'axe une droite $L \subset D^\perp$. Ainsi g fixe le plan $Q = D \oplus L$ et vaut $-\text{id}$ sur la droite $Q^\perp$: $g = s_Q$ **est une réflexion**. Enfin, comme $s_P^2 = \text{id}$, on obtient $r = s_P \circ s_Q$.

Corrigé de l'exercice 9 : Isométries symétriques et projecteurs orthogonaux

- Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, de sorte que $u^* = u^{-1}$. Si u est symétrique, alors $u^2 = u u^* = \text{id}$: u est une symétrie. De plus, ses sous-espaces propres $\ker(u - \text{id})$ et $\ker(u + \text{id})$ sont orthogonaux, d'après le lemme du cours sur les endomorphismes symétriques. Donc u est une symétrie orthogonale. Réciproquement, une symétrie orthogonale par rapport à F a pour matrice $\text{diag}(I_p, -I_{n-p})$ dans une base orthonormée adaptée à $E = F \oplus F^\perp$. Cette matrice est symétrique et orthogonale. **Les isométries symétriques sont donc exactement les symétries orthogonales.**
- Si p est la projection orthogonale sur F , sa matrice dans une base orthonormée adaptée est $\text{diag}(I_p, 0)$, qui est symétrique. Réciproquement, si p est symétrique, alors $\ker p = \ker p^* = (\text{Im } p)^\perp$. Le projecteur p projette donc sur $\text{Im } p$ parallèlement à son orthogonal. **Ainsi p est orthogonal si et seulement si $p = p^*$.**
- La matrice H est symétrique. Ses lignes $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ et $\frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$ sont unitaires et deux à deux orthogonales ; par exemple, $\frac{1}{4}(1 - 1 - 1 + 1) = 0$. Donc H est orthogonale et symétrique : c'est une symétrie orthogonale. Ses valeurs propres valent ± 1 . Notons p la dimension de $\ker(H - I_4)$. Alors $\text{tr } H = 2 = p - (4 - p)$, d'où $p = 3$. Par ailleurs, pour $v = (1, -1, -1, -1)$, on calcule $Hv = \frac{1}{2}(-2, 2, 2, 2) = -v$. **H est la réflexion par rapport à l'hyperplan $v^\perp$ d'équation $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$.** On vérifie d'ailleurs que $H = I_4 - \frac{1}{2} v v^T$.

Corrigé de l'exercice 10 : Diagonalisation d'une matrice symétrique en base orthonormée

1. Calculons : $S(1, 2, 1)^T = (3 - 2, -1 + 4 - 1, -2 + 3)^T = (1, 2, 1)^T$, puis $S(1, 0, -1)^T = (3, 0, -3)^T$ et $S(1, -1, 1)^T = (4, -4, 4)^T$. **Les valeurs propres associées sont 1, 3 et 4.**

2. Les trois valeurs propres sont distinctes, donc les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux ; on le vérifie directement. Il suffit de les normer :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, 3, 4).$$

On a alors $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $S = P D P^T$.

3. Toutes les valeurs propres sont strictement positives, donc **S est définie positive**. D'après l'encadrement du cours, $X^T S X \geq \lambda_1 |X|^2 = 1$ pour $|X| = 1$. L'égalité a lieu si et seulement si X est un vecteur propre unitaire associé à 1. **Le minimum vaut 1, atteint en $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.**

4. On a $\det S = 1 \times 3 \times 4 = 12$. La comatrice (symétrique) donne

$$S^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vérification sur la première colonne : $3 \times 5 - 3 = 12$, $-5 + 6 - 1 = 0$ et $-3 + 3 = 0$.
 $\det S = 12$.

Corrigé de l'exercice 11 : Matrice symétrique à valeur propre

double

1. On calcule $S(1, 0, -1)^T = (6, 0, -6)^T$ et $S(1, 1, 1)^T = (6, 6, 6)^T$. Ces deux vecteurs sont propres pour la valeur propre 6.
2. Comme E_6 contient deux vecteurs non colinéaires, 6 est valeur propre de multiplicité au moins 2. De plus, $S \neq 6 I_3$, donc $\dim E_6 = 2$. La troisième valeur propre vaut $\text{tr } S - 12 = 24 - 12 = 12$. D'après le théorème spectral, $E_{12} = E_6^\perp$, qui est dirigé par $(1, 0, -1) \wedge (1, 1, 1) = (1, -2, 1)$. On vérifie que $S(1, -2, 1)^T = (12, -24, 12)^T$. Enfin, $(1, 0, -1)$ et $(1, 1, 1)$ sont déjà orthogonaux. **Le spectre est $\{6, 6, 12\}$, et une base orthonormée de vecteurs propres est $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.**
3. On a $v v^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. En ajoutant $6 I_3$, on retrouve exactement S . Donc $S = 6 I_3 + v v^T$.
4. Posons $\Pi = \frac{1}{6} v v^T$. Comme $v^T v = 6$, on a $\Pi^2 = \frac{1}{36} v (v^T v) v^T = \Pi$, et Π est symétrique : c'est la projection orthogonale sur $\mathbb{R} v$. Alors $S = 6(I_3 - \Pi) + 12 \Pi$. Or Π et $I_3 - \Pi$ sont des projecteurs de produit nul. Par récurrence, $S^k = 6^k (I_3 - \Pi) + 12^k \Pi$. En développant,

$$S^k = 6^k I_3 + \frac{12^k - 6^k}{6} v v^T.$$

Autrement dit, $S^k = 6^k I_3 + 6^{k-1}(2^k - 1) v v^T$; pour $k = 1$, on retrouve bien S .

Corrigé de l'exercice 12 : Matrices définies positives et critère de Sylvester

1. Avec $X = (x, y, z)$, on a $X^T S X = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz$. En développant le membre de droite, on vérifie que

$$X^T S X = x^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2.$$

Cette quantité est positive. Elle est nulle si et seulement si $x = 0$, $x = y$, $y = z$ et $z = 0$, c'est-à-dire si $X = 0$. Donc S est définie positive. Par ailleurs, les mineurs principaux dominants valent $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3$ et $\Delta_3 = 2(4 - 1) + (-2) = 4$. **Ils sont strictement positifs, ce qui confirme le résultat.**

2. Les mineurs de S_a valent $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1 - a^2$ et

$$\Delta_3 = 1 \times (1 - a^2) - a \times (a - 0) = 1 - 2a^2.$$

D'après le critère de Sylvester, S_a est définie positive si et seulement si $a^2 < 1$ et $a^2 < \frac{1}{2}$.

La condition est $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. D'abord, $S_a(1, 0, -1)^T = (1, 0, -1)^T$. Ensuite, $S_a(1, \sqrt{2}, 1)^T = (1 + a\sqrt{2}, 2a + \sqrt{2}, 1 + a\sqrt{2})^T = (1 + a\sqrt{2})(1, \sqrt{2}, 1)^T$. De même, $(1, -\sqrt{2}, 1)$ est associé à $1 - a\sqrt{2}$. Le spectre est donc $\left\{ \begin{matrix} 1, 1 \\ a\sqrt{2}, 1 - a\sqrt{2} \end{matrix} \right\}$. La matrice est positive si et seulement si ces trois nombres sont positifs ou nuls, soit $|a| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ce résultat est cohérent avec la question précédente.

4. Si $s_{ii} \leq 0$, alors $e_i^T S e_i = s_{ii} \leq 0$ avec $e_i \neq 0$. **La matrice S n'est donc pas définie positive.**

Point de méthode : pour une matrice à paramètre, le critère de Sylvester évite de calculer les valeurs propres.

Corrigé de l'exercice 13 : Formes quadratiques du plan et lignes de niveau

1. On a $S_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, de trace 13 et de déterminant 36. Son polynôme caractéristique vaut $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$. Ensuite, E_4 est donné par $x - 2y = 0$, soit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$. De même, E_9 est donné par $-4x - 2y = 0$, soit $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$. Par ailleurs, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 3 et -1, de vecteurs propres $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. **Ainsi $S_1 = P_1 \text{diag}(4, 9) P_1^T$ et $S_2 = P_2 \text{diag}(3, -1) P_2^T$, où P_1 et P_2 ont pour colonnes (u_1, u_2) et**

(v_1, v_2) .

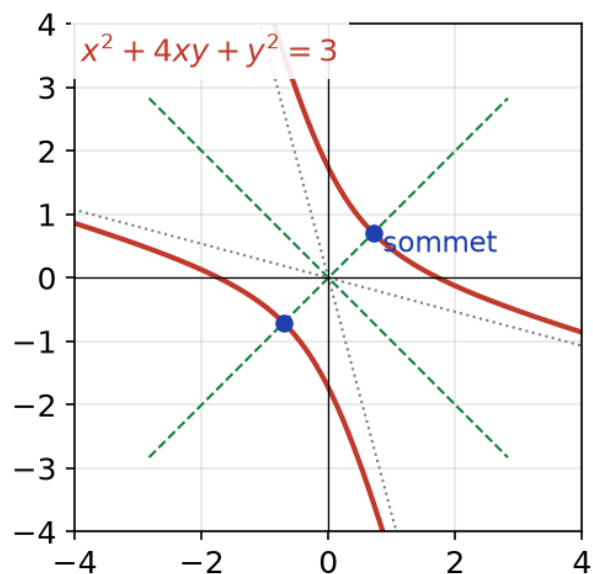
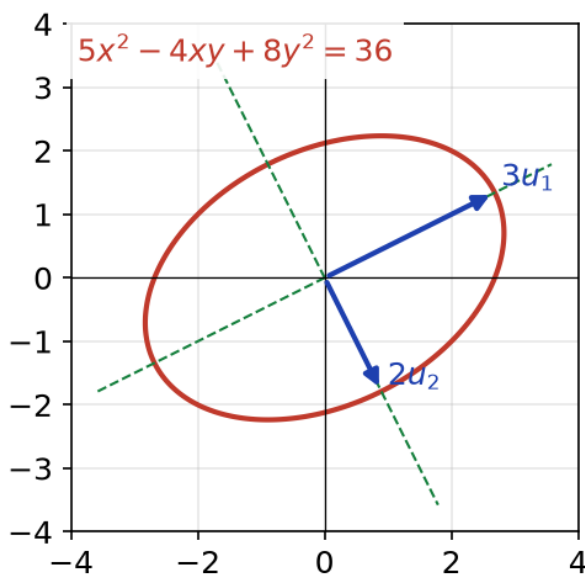
2. Notons (X, Y) les coordonnées dans la base orthonormée (u_1, u_2) . Le changement de base est orthogonal, donc $q_1 = 4X^2 + 9Y^2$. L'équation $q_1 = 36$ devient $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$.

C'est une ellipse de centre O , de demi-grand axe 3 dirigé par u_1 et de demi-petit axe 2 dirigé par u_2 . Vérification : $q_1(3u_1) = \frac{1}{5}(5 \times 36 - 4 \times 18 + 8 \times 9) = 36$.

3. Sur le cercle unité, $X^2 + Y^2 = 1$, donc $q_1 = 4 + 5Y^2 \in [4, 9]$. **Le maximum vaut 9, atteint en $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$; le minimum vaut 4, atteint en $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.**

4. Dans la base (v_1, v_2) , $q_2 = 3X^2 - Y^2$. L'équation $q_2 = 3$ s'écrit $X^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$: c'est une hyperbole d'axe focal $\mathbb{R} v_1$. Ses sommets correspondent à $X = \pm 1, Y = 0$, c'est-à-dire aux points $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Ses asymptotes sont $Y = \pm \sqrt{3} X$. Avec $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, la droite $Y = \sqrt{3} X$ s'écrit $x - y = \sqrt{3}(x + y)$. On en tire $y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x = (\sqrt{3}-2)x$. De même, $Y = -\sqrt{3} X$ donne $y = -(2+\sqrt{3})x$. **Les asymptotes sont $y = (\sqrt{3}-2)x$ et $y = -(2+\sqrt{3})x$.**

La figure ci-dessous représente les deux courbes. À gauche, l'ellipse a ses axes portés par les vecteurs propres. À droite, l'hyperbole a ses sommets sur la droite $y = x$.



Corrigé de l'exercice 14 : Matrices de Gram

1. D'abord, $(A^T A)^T = A^T A$. Ensuite, $X^T A^T A X = |AX|^2 \geq 0$, donc $A^T A$ est positive. Si $A^T A X = 0$, alors $|AX|^2 = X^T (A^T A X) = 0$, donc $AX = 0$; l'inclusion réciproque est claire. Ainsi $\ker(A^T A) = \ker A$. Enfin, une matrice symétrique positive est définie positive si et seulement si 0 n'est pas valeur propre, c'est-à-dire si elle est inversible. **Donc $A^T A$ est définie positive si et seulement si $\ker A = \{0\}$, soit $\operatorname{rg} A = n$.**
2. Soit $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$ tels que $A^T A X = \lambda X$. Posons $Y = AX$. Alors $Y \neq 0$, sinon $\lambda X = 0$. De plus, $A A^T Y = A(A^T A X) = \lambda Y$. Donc λ est valeur propre de $A A^T$. En échangeant les rôles de A et A^T , on obtient la réciproque. **Les valeurs propres non nulles coïncident.**
3. On calcule $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 3 (vecteur $(1, 1)$) et 1 (vecteur $(1, -1)$). Ensuite,

$$A A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 2, $A(1, 1)^T = (2, 1, 1)^T$ est propre pour 3 et $A(1, -1)^T = (0, 1, -1)^T$ est propre pour 1. Comme $\operatorname{rg}(A A^T) = \operatorname{rg} A^T = 2$, la dernière valeur propre est 0. Son sous-espace propre est $\ker A^T$, donné par $x + y = 0$ et $x + z = 0$. **Le spectre de $A A^T$ est $\{3, 1, 0\}$, avec $\ker(A A^T) = \mathbb{R}(1, -1, -1)$.**

4. Écrivons $S = P D P^T$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \geq 0$. Posons $B = P \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i}) P^T$. Alors B est symétrique et $B^T B = B^2 = S$. Si S est définie positive, alors $\det B = \prod \sqrt{\lambda_i} > 0$. **Toute matrice symétrique positive est donc une matrice de Gram $B^T B$, avec B inversible dans le cas défini positif.**

Corrigé de l'exercice 15 : Racines carrées d'une matrice symétrique positive

1. La matrice S a pour trace 10 et pour déterminant 9, donc pour valeurs propres 9 et 1. Les vecteurs propres associés sont $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Ainsi $S = P \operatorname{diag}(9, 1) P^T$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Pour tous réels α, β , un calcul direct donne $P \operatorname{diag}(\alpha, \beta) P^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$. Avec $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, on obtient $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique, de valeurs propres 3 et 1, donc positive. De plus, $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = S$.
3. Soit T symétrique telle que $T^2 = S$. Alors $TS = T^3 = ST$. Par conséquent, si $Sx = \lambda x$, alors $S(Tx) = \lambda Tx$: T laisse stable chaque droite propre de S . Ainsi $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont vecteurs propres de T , de valeurs propres α et β . En appliquant $T^2 = S$ à ces vecteurs, on obtient $\alpha^2 = 9$ et $\beta^2 = 1$. Réciproquement, ces quatre choix conviennent. **Les racines carrées symétriques de S sont $\pm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; seule la première est positive.**
4. Comme R commute avec $S = R^2$, le même argument montre que R laisse stable chaque sous-espace propre $E_\lambda(S)$. Notons R_λ la restriction de R à $E_\lambda(S)$. Elle est symétrique positive pour le produit scalaire induit, et $R_\lambda^2 = \lambda \operatorname{id}$. Par le théorème spectral, R_λ se diagonalise en base orthonormée. Chacune de ses valeurs propres μ vérifie $\mu \geq 0$ et $\mu^2 = \lambda$, donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ainsi $R_\lambda = \sqrt{\lambda} \operatorname{id}$. Comme E est la somme directe des $E_\lambda(S)$, **R est entièrement déterminée par S : elle est unique.**

Corrigé de l'exercice 16 : Matrices hermitiennes et normales de taille 2

1. On a $\overline{H} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, dont la transposée est H . Donc $H^* = H$. Le polynôme caractéristique vaut $(2 - \lambda)^2 - i \times (-i) = (2 - \lambda)^2 - 1$, d'où les valeurs propres 1 et 3. Pour $\lambda = 1$, l'équation $x + iy = 0$ donne le vecteur $(1, i)$. Pour $\lambda = 3$, l'équation $-x + iy = 0$ donne le vecteur $(1, -i)$. Ces vecteurs sont orthogonaux, car $\bar{1} \times 1 + \bar{i} \times (-i) = 1 + i^2 = 0$. Avec $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, on a $U^* H U = \operatorname{diag}(1, 3)$.

2. La matrice N est réelle, donc $N^* = N^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $NN^T = 2I_2$ et $N^TN = 2I_2$. Donc N est normale. En revanche, $N^T \neq N$ et $N^TN \neq I_2$. Son polynôme caractéristique vaut $(1 - \lambda)^2 + 1$, de racines $1 \pm i$. Pour $1 + i$, l'équation $-ix - y = 0$ donne $(1, -i)$. Pour $1 - i$, on obtient $(1, i)$. Avec $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, unitaire, on a $V^* N V = \text{diag}(1 + i, 1 - i)$.
3. On a $\left(\frac{N}{\sqrt{2}}\right)^* \frac{N}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} N^T N = I_2$, donc $\frac{N}{\sqrt{2}}$ est unitaire ; c'est d'ailleurs la rotation $R_{\pi/4}$. Ses valeurs propres sont $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} = e^{\pm i\pi/4}$. Elles sont bien de module 1.

Corrigé de l'exercice 17 : Propriétés des endomorphismes normaux

1. Pour tout x , en utilisant $(u^*)^* = u$,

$$|u(x)|^2 = \langle x, u^* u(x) \rangle = \langle x, u u^*(x) \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = |u^*(x)|^2.$$

Donc $|u(x)| = |u^*(x)|$, et en particulier $\ker u = \ker u^*$.

2. Posons $v = u - \lambda \text{id}$. Comme $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$, on a $v^* = u^* - \bar{\lambda} \text{id}$. Ensuite, $vv^* = uu^* - \bar{\lambda}u - \lambda u^* + |\lambda|^2 \text{id} = v^*v$. Donc v est normal. D'après la question 1, $\ker(u - \lambda \text{id}) = \ker(u^* - \bar{\lambda} \text{id})$.
3. Soient $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ avec $\lambda \neq \mu$. D'une part, $\langle u(x), y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$. D'autre part, d'après la question 2, $u^*(y) = \bar{\mu} y$, donc $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle$. Ainsi $(\bar{\lambda} - \bar{\mu}) \langle x, y \rangle = 0$. **Par conséquent** $\langle x, y \rangle = 0$.
4. D'après le cours, $\text{Im } u = (\ker u^*)^\perp$, et $\ker u^* = \ker u$. Donc $\text{Im } u = (\ker u)^\perp$. Ensuite, si $u^2(x) = 0$, alors $u(x) \in \ker u \cap \text{Im } u = \ker u \cap (\ker u)^\perp = \{0\}$. Ainsi $\ker u^2 = \ker u$.

5. On calcule

$$M M^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd & ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}, \quad M^T M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd & ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité équivaut à $b^2 = c^2$ et $ac + bd = ab + cd$. Si $c = b$, la seconde condition est automatique : M est symétrique. Si $c = -b$ avec $b \neq 0$, elle devient

$-ab + bd = ab - bd$, soit $2b(d - a) = 0$, donc $a = d$. Les matrices normales réelles de taille 2 sont les matrices symétriques et les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire les composées d'une homothétie et d'une rotation.

Corrigé de l'exercice 18 : Transformation de Cayley

1. Le réel $X^T A X$ est égal à sa transposée $X^T A^T X = -X^T A X$, donc il est nul. Si $(I_n + A)X = 0$, alors $0 = X^T X + X^T A X = |X|^2$, d'où $X = 0$. De même avec $-A$, qui est aussi antisymétrique. **Ainsi $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.**
2. On a $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2 = (I_n + A)(I_n - A)$. En multipliant à gauche et à droite par $(I_n + A)^{-1}$, on obtient $(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Ensuite, $Q^T = (I_n + A^T)^{-1}(I_n - A^T) = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$. Donc

$$Q^T Q = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n.$$

La matrice Q est orthogonale.

3. On écrit $Q + I_n = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} + (I_n + A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1}$, qui est inversible. Donc -1 n'est pas valeur propre de Q . Par ailleurs, $\det(I_n - A) = \det((I_n - A)^T) = \det(I_n + A)$. **Par conséquent $\det Q = 1$.**
4. Comme -1 n'est pas valeur propre, $I_n + Q$ est inversible, et $(I_n - Q)$ commute avec $(I_n + Q)^{-1}$ comme en question 2. En utilisant $Q^T = Q^{-1}$, on a $I_n + Q^T = Q^{-1}(Q + I_n)$ et $I_n - Q^T = Q^{-1}(Q - I_n)$. Ainsi

$$A^T = (I_n + Q^T)^{-1}(I_n - Q^T) = (I_n + Q)^{-1} Q Q^{-1}(Q - I_n) = -(I_n + Q)^{-1}(I_n - Q) = -A.$$

Ensuite, $(I_n + Q)A = I_n - Q$ donne $A + QA = I_n - Q$, puis $Q(I_n + A) = I_n - A$. **Comme $I_n + A$ est inversible,**
 $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

5. On a $I_n + A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $\frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$, et $I_n - A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$Q = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

C'est la rotation R_θ avec $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \frac{-2t}{1+t^2}$, soit $t = -\tan\frac{\theta}{2}$. On obtient toutes les rotations sauf $R_\pi = -I_2$, conformément à la question 3.

Corrigé de l'exercice 19 : Décomposition polaire d'une matrice inversible

1. La matrice $A^T A$ est symétrique et $X^T A^T A X = |AX|^2$. Comme A est inversible, cette quantité est strictement positive pour $X \neq 0$. **Donc** $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. La matrice S est symétrique définie positive, donc inversible, et $(S^{-1})^T = S^{-1}$. Alors

$$O^T O = S^{-1} A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n.$$

La matrice O est orthogonale et $A = OS$.

3. Si $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive, alors

$A^T A = S O^T O S = S^2$. Donc S est la racine carrée positive de $A^T A$, qui est unique (exercice 15). Ensuite $O = A S^{-1}$ est déterminée. **Le couple (O, S) est unique.**

4. On calcule $A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
D'après l'exercice 15, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc

$$O = A S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $O = R_{\pi/2}$ et $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Interprétons la figure. D'abord, S étire le plan d'un facteur 3 selon $(1, 1)$ et d'un facteur 1 selon $(1, -1)$: le cercle devient une ellipse. Ensuite, O fait tourner cette ellipse d'un quart de tour. Par exemple,

$A \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3, 3)$, de norme 3, et $A \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, de norme 1. **L'ellipse a pour demi-axes 3, selon $(-1, 1)$, et 1, selon $(1, 1)$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : quotient de Rayleigh et norme d'une matrice

1. Écrivons $S = P D P^T$ avec P orthogonale, et posons $Y = P^T X$. Alors $|Y| = |X|$ et $X^T S X = \sum_i \lambda_i y_i^2$. Comme $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, on obtient

$$\lambda_1 |X|^2 \leq X^T S X \leq \lambda_n |X|^2.$$

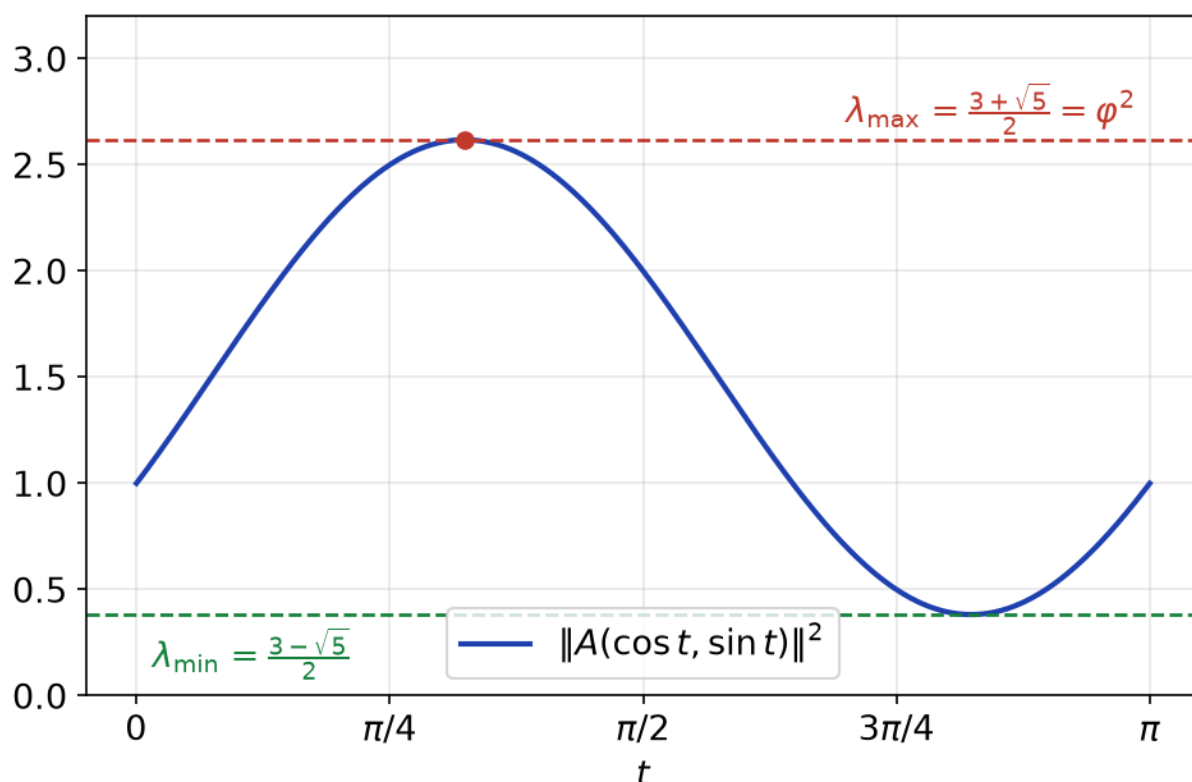
Ensuite, l'égalité à droite équivaut à $\sum_i (\lambda_n - \lambda_i) y_i^2 = 0$. Cette somme de termes positifs est nulle si et seulement si $y_i = 0$ dès que $\lambda_i < \lambda_n$, c'est-à-dire si $X = PY \in E_{\lambda_n}$. Enfin, l'encadrement est atteint en un vecteur propre unitaire. **Donc** $\lambda_n = \max_{|X|=1} X^T S X$ **et, de même,** $\lambda_1 = \min_{|X|=1} X^T S X$.

2. On a $|AX|^2 = X^T (A^T A) X$. La matrice $A^T A$ est symétrique positive, donc $\mu \geq 0$. D'après la question 1, $|AX|^2 \leq \mu |X|^2$, avec égalité pour un vecteur propre associé à μ . **Ainsi** $|A| = \sqrt{\mu}$, **et la borne supérieure est atteinte.**

3. Si S est symétrique, $S^T S = S^2$ a pour valeurs propres les λ_i^2 , avec les mêmes vecteurs propres. Donc $\mu = \max_i \lambda_i^2$. **Par conséquent** $|S| = \max_i |\lambda_i|$.

4. On calcule $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\lambda^2 - 3\lambda + 1$. Ses valeurs propres sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or, avec $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, on a $\varphi^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Donc $|A| = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Un vecteur propre associé vérifie $(1 - \varphi^2)x + y = 0$, soit $y = (\varphi^2 - 1)x = \varphi x$. On prend donc $X = \frac{(1, \varphi)}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$. Vérification : $A(1, \varphi)^T = (1 + \varphi, \varphi)^T = \varphi(\varphi, 1)^T$, de norme $\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}$. En revanche, la seule valeur propre de A est 1. **Pour une matrice non symétrique, la norme peut dépasser le plus grand module des valeurs propres.**

La figure ci-dessous trace $t \rightarrow |A(\cos t, \sin t)|^2 = \cos^2 t + 2\cos t \sin t + 2\sin^2 t$. Ses extremums sont exactement les deux valeurs propres de $A^T A$. Le maximum est atteint pour $\tan t = \varphi$.



5. Pour tout X unitaire, $X^T(S+T)X = X^T S X + X^T T X \geq X^T S X$, car T est positive. D'une part, en prenant pour X un vecteur propre unitaire de S associé à sa plus grande valeur propre, on obtient $\lambda_n(S+T) \geq X^T(S+T)X \geq \lambda_n(S)$. D'autre part, pour tout X unitaire, $X^T(S+T)X \geq X^T S X \geq \lambda_1(S)$; en passant au minimum, $\lambda_1(S+T) \geq \lambda_1(S)$. **Ajouter une matrice positive augmente la plus grande et la plus petite valeur propre.**

Point de méthode : dès qu'une question porte sur un maximum ou un minimum de $X^T S X$ sur la sphère unité, on pense au quotient de Rayleigh et au théorème spectral.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [isométries et théorème spectral, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur isométries et théorème spectral](#)
- À maîtriser avant : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#), [Valeurs propres et diagonalisation](#)
- Chapitre précédent : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Chapitre suivant : [Séries de Fourier](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)