

Inversion locale et extrema liés

Exercice 1 : Homéomorphisme ou difféomorphisme

On compare trois bijections régulières.

1. Montrer que $f : x \rightarrow x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, mais pas un C^1 -difféomorphisme.
2. Montrer que $g : x \rightarrow x + x^3$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $(g^{-1})'(2)$.
3. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (x + y^3, y)$. Montrer que h est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner h^{-1} .

Exercice 2 : Coordonnées polaires

Soient $\Omega =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On note $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

1. Justifier que Φ est de classe C^∞ et calculer son jacobien.
2. Montrer que Φ est injective sur Ω et que $\Phi(\Omega) = D$.
3. En déduire que Φ est un C^∞ -difféomorphisme de Ω sur D .
4. Calculer la matrice jacobienne de Φ^{-1} au point $(0, 1)$.

5. Retrouver le résultat en dérivant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$, valable pour $y > 0$.

Exercice 3 : L'exponentielle complexe vue dans le plan

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

1. Montrer que $Df(x,y)$ est inversible en tout point.
2. Montrer que f n'est pas injective et que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$ est un C^∞ -difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.
4. Calculer la différentielle de cette réciproque au point $(1,0)$.

Exercice 4 : Le carré complexe et son point critique

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Il s'agit de $z \rightarrow z^2$ écrit en coordonnées réelles.

1. Calculer le jacobien de f . En quels points le théorème d'inversion locale s'applique-t-il ?
2. Montrer que f n'est injective sur aucun voisinage de $(0,0)$.
3. Soit g la réciproque locale de f près de $(1,1)$. Calculer $Dg(0,2)$.
4. Soit $P = \{(x,y) : x > 0\}$. Montrer que f induit un C^∞ -difféomorphisme de P sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

Exercice 5 : Perturbation lipschitzienne de l'identité

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. Soit $f(x,y) = (x + \frac{1}{2}\sin y, y + \frac{1}{2}\sin x)$ et $g = f - \text{id}$.

1. Montrer que g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.
2. Montrer que $\|f(u) - f(v)\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|u - v\|_\infty$ pour tous u, v . En déduire que f est injective.
3. Soit $w \in \mathbb{R}^2$. En étudiant $u \rightarrow w - g(u)$, montrer que w a un antécédent par f .
4. Montrer que $Df(x,y)$ est inversible en tout point. Conclure que f est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Généraliser : si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^1 et k -lipschitzienne avec $k < 1$, alors $\text{id} + g$ est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 : Inversion locale quantitative

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, et la norme d'opérateur associée. Soient $r > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $f(0) = 0$ et $\|Df(x) - I\| \leq \frac{1}{2}$ pour $\|x\| \leq r$. On pose $h = \text{id} - f$.

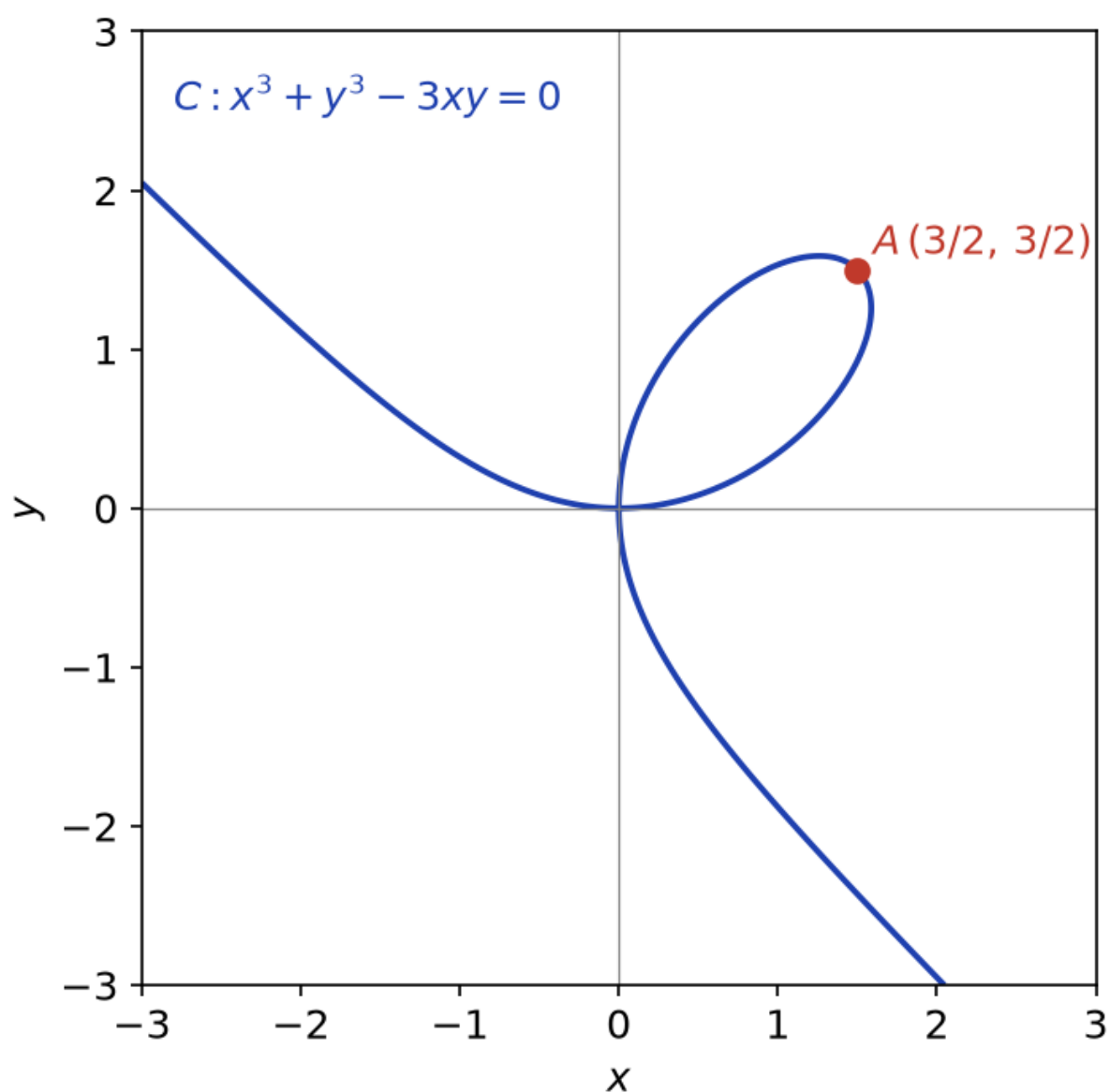
1. Montrer que h est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $\overline{B}(0,r)$ et que $\|h(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$.
2. Soit y avec $\|y\| \leq r/2$. Montrer que $\varphi_y : x \rightarrow y + h(x)$ envoie $\overline{B}(0,r)$ dans elle-même et y est contractante.
3. En déduire que y a un unique antécédent x dans $\overline{B}(0,r)$, et que $\|x\| \leq 2\|y\|$.
4. Application : $f(x,y) = (x + \frac{y^2}{4}, y + \frac{x^2}{4})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. Vérifier les hypothèses pour $r = 1$.

Que peut-on conclure ?

5. Pour $w = (\frac{1}{2}, 0)$, calculer les itérés x_1, x_2 de φ_w à partir de $x_0 = 0$, et majorer $|x_2 - x^*|_\infty$, où x^* est l'antécédent cherché.

Exercice 7 : Le folium de Descartes

Soit $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C la courbe d'équation $F(x,y) = 0$, représentée ci-dessous.



1. Vérifier que $A = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \in C$. Montrer qu'au voisinage de A , C est le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ de classe C^∞ .
2. Calculer $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\varphi''\left(\frac{3}{2}\right)$. Donner la tangente en A et la position de C par rapport à elle.
3. Déterminer les points de C où $\partial_y F = 0$. Que se passe-t-il en celui qui n'est pas l'origine ?
4. On admet que C est paramétrée par $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$, $t \neq -1$. Vérifier ce point, puis montrer que C n'est pas un graphe $y = \varphi(x)$ au voisinage de l'origine.

Exercice 8 : Développement limité d'une fonction implicite

On considère la surface S d'équation $e^z + xz + y = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'au voisinage de $(0,0,0)$, S est le graphe d'une fonction $z = \varphi(x,y)$ de classe C^∞ avec $\varphi(0,0) = 0$.
2. Calculer $\partial_x \varphi(0,0)$ et $\partial_y \varphi(0,0)$. En déduire le plan tangent à S en l'origine.
3. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en $(0,0)$.
4. La surface S traverse-t-elle son plan tangent en l'origine ?

Exercice 9 : Racines simples et valeurs propres simples

Partie A. Pour $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on note $P_a = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ et $F(a,x) = P_a(x)$. Soit $a^0 \in \mathbb{R}^n$ et x_0 une racine réelle simple de P_{a^0} .

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a^0 , un intervalle ouvert $I \ni x_0$ et $\xi : V \rightarrow I$ de

classe C^∞ tels que, pour $(a, x) \in V \times I$, $P_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \xi(a)$.

2. Montrer que $\frac{\partial \xi}{\partial a_k}(a^0) = -\frac{x_0^k}{P'_{a^0}(x_0)}$.

3. Application : on perturbe $X^2 - 3X + 2$ en $X^2 - 3X + 2 + \varepsilon$. Donner un équivalent du déplacement de la racine 2 , puis le vérifier sur la formule exacte.

4. Montrer que l'ensemble des $a \in \mathbb{R}^n$ tels que P_a a n racines réelles distinctes est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Partie B. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix}$.

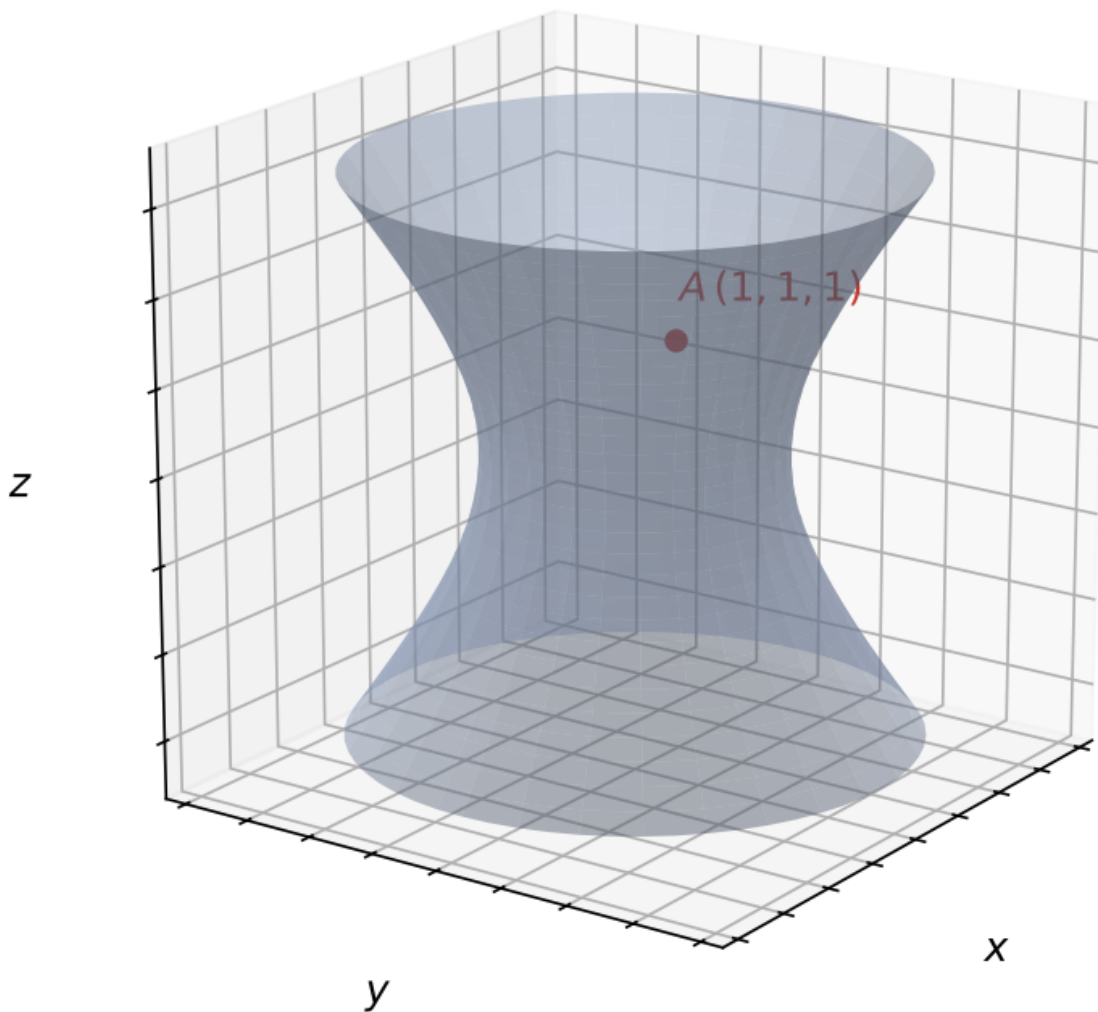
1. Montrer qu'il existe une fonction λ de classe C^∞ au voisinage de 0 , avec $\lambda(0) = 1$ et $\lambda(t)$ valeur propre de $M(t)$.

2. Calculer $\lambda'(0)$ et $\lambda''(0)$ sans résoudre l'équation, puis vérifier avec la formule explicite de $\lambda(t)$.

Exercice 10 : Plan tangent à un hyperboloïde

Soit H l'hyperboloïde à une nappe d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, et $A = (1, 1, 1)$.

$$H: x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



1. Montrer que H est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $A \in H$ et déterminer l'équation du plan tangent à H en A .
3. Montrer que les droites $A + \mathbb{R}(1,0,1)$ et $A + \mathbb{R}(0,1,1)$ sont contenues dans H et dans ce plan tangent.
4. Soit K le cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Montrer que $K \setminus \{0\}$ est une sous-variété de dimension 2. En utilisant les droites $t \rightarrow t(\cos\alpha, \sin\alpha, 1)$, montrer que K n'est une sous-variété de dimension 2 sur aucun voisinage de 0 .

Exercice 11 : Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit Γ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ et $x + y + z = 6$. Soit $A = (1, 2, 3)$.

1. Montrer que Γ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $A \in \Gamma$. Montrer qu'au voisinage de A , Γ s'écrit $\{(x, \varphi(x), \psi(x))\}$ avec φ, ψ de classe C^∞ . Calculer $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.
3. Donner la droite tangente à Γ en A , puis retrouver sa direction par un produit vectoriel.
4. Montrer que Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 12 : Le groupe spécial linéaire

On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$. On note $SL_n(\mathbb{R}) = \{A : \det A = 1\}$.

1. Montrer que $\det(I_n + H) = 1 + \operatorname{tr}(H) + o(|H|)$.
2. En déduire que, pour A inversible, $D(\det)(A)(H) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$.
3. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Déterminer l'espace tangent en $A \in SL_n(\mathbb{R})$, puis en I_n .
5. Vérifier le résultat avec les courbes $t \rightarrow \exp(tH)$, où $\operatorname{tr}(H) = 0$.

Exercice 13 : Extrema libres d'un polynôme de degré 3

Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Étudier leur nature à l'aide de la hessienne.
3. Les extrema trouvés sont-ils globaux ?
4. Quel lien voyez-vous avec la courbe de l'exercice 7 ?

Exercice 14 : Un point critique dégénéré

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Déterminer les trois points critiques de f .
2. Étudier la nature des points critiques autres que l'origine.
3. Montrer que la hessienne en $(0,0)$ ne permet pas de conclure, puis étudier directement f près de l'origine.
4. Montrer que $f(x,y) \rightarrow +\infty$ quand $|(x,y)| \rightarrow +\infty$. En déduire le minimum global de f .

Exercice 15 : Extrema sur une ellipse

Soit E l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 8$ et $f(x,y) = xy$.

1. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur E .

2. Écrire les conditions de Lagrange et déterminer les points candidats.
3. Conclure. Interpréter géométriquement à l'aide des hyperboles $xy = c$.

Exercice 16 : Deux contraintes dans l'espace

On cherche les extrema de $f(x, y, z) = z$ sur $\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y = 1, \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\}$, intersection d'un cylindre et d'un plan.

1. Montrer que Γ est compact et que les gradients des deux contraintes sont libres en tout point de Γ .
2. Écrire les conditions de Lagrange avec deux multiplicateurs et les résoudre.
3. Donner le maximum et le minimum de f sur Γ .
4. Retrouver le résultat en paramétrant le cercle $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Exercice 17 : Quotient de Rayleigh

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique et $q(x) = \langle Ax, x \rangle$. On note S la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer $\nabla q(x)$. Justifier que q atteint un maximum et un minimum sur S .
2. Montrer, par les multiplicateurs de Lagrange, que tout point $x \in S$ où $q|_S$ est extrémale est un vecteur propre de A . En déduire que A admet une valeur propre réelle.
3. Montrer que $\max_S q$ est la plus grande valeur propre de A , et $\min_S q$ la plus petite.

4. Application : extrema de $2x^2 + 2xy + 2y^2$ sur le cercle unité.

Exercice 18 : Inégalité arithmético-géométrique

Soient $n \geq 2$, $s > 0$, $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 + \dots + x_n = s\}$ et $P(x) = x_1 x_2 \dots x_n$.

1. Montrer que P atteint son maximum sur K en un point dont toutes les coordonnées sont strictement positives.
2. Par les multiplicateurs de Lagrange, montrer que ce maximum est atteint en $(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n})$ et vaut $(\frac{s}{n})^n$.
3. En déduire que, pour $x_1, \dots, x_n \geq 0$, $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, avec égalité si et seulement si les x_i sont égaux.
4. Application : parmi les pavés droits dont la somme des trois dimensions vaut 3, lequel a le plus grand volume ?

Exercice 19 : Triangle d'aire maximale

Un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p a pour aire S donnée par la formule de Héron : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. On fixe $p > 0$.

1. On pose $u = p - a$, $v = p - b$, $w = p - c$. Montrer que $u, v, w > 0$ et $u + v + w = p$.
2. Maximiser uvw sur $\left\{ \begin{array}{l} u, v, w \geq 0, \\ u + v + w = p \end{array} \right\}$ à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, sans utiliser l'exercice 18.

3. En déduire que le triangle d'aire maximale de périmètre $2p$ est équilatéral, et que son aire vaut $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$.
4. Montrer que tout triangle d'aire S a un périmètre au moins égal à $2\sqrt{3\sqrt{3}S}$.

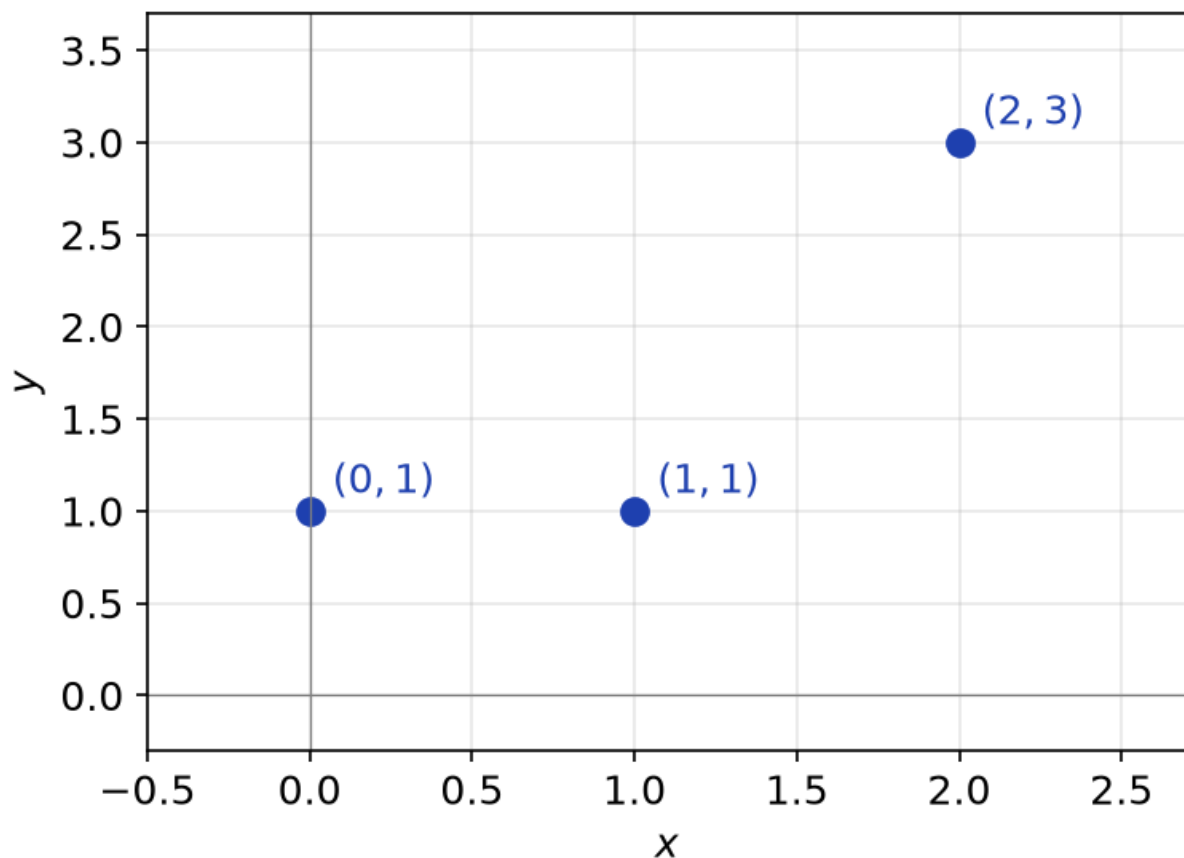
Exercice 20 : Minimisation d'une fonction quadratique

Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

1. Calculer la hessienne de f et montrer que f est strictement convexe.
2. Déterminer le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Plus généralement, soient A symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ admet un unique minimum, atteint en $A^{-1}b$, et qu'il vaut $-\frac{1}{2}\langle A^{-1}b, b \rangle$.
4. Retrouver le résultat de la question 2 à partir de la question 3.

Exercice 21 : Droite des moindres carrés

On cherche la droite $y = ax + c$ qui approche au mieux les points $(0,1)$, $(1,1)$ et $(2,3)$, représentés ci-dessous. On minimise $S(a,c) = \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i - c)^2$.



1. Montrer que S est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Écrire les équations normales et déterminer la droite des moindres carrés.
3. Calculer les résidus $y_i - ax_i - c$, la valeur minimale de S , et vérifier que les résidus sont orthogonaux à $(1,1,1)$ et à (x_1, x_2, x_3) .
4. Généraliser : si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est de rang n et $b \in \mathbb{R}^m$, montrer que $x \rightarrow |Ax - b|^2$ a un unique minimum, solution de $A^T A x = A^T b$.

Exercice 22 : Distance à un hyperplan

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ non nul, $c \in \mathbb{R}$, $H = \{x : \langle a, x \rangle = c\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On minimise $f(x) = |x - x_0|^2$ sur H .

1. Écrire la condition de Lagrange et en déduire un unique point candidat x^* .
2. Justifier que x^* réalise le minimum global, de deux façons : par convexité, puis par le théorème de Pythagore.
3. En déduire la distance de x_0 à H .
4. Application : distance de l'origine au plan $x + 2y + 2z = 9$, et point du plan le plus proche.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [inversion locale et extrema liés, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#), [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Chapitre précédent : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Chapitre suivant : [Équations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)