Inversion locale et extrema liés

Corrigé de l'exercice 1 : Homéomorphisme ou difféomorphisme

1. La fonction f est continue et strictement croissante, de limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque $y \to \text{signe}(y)|y|^{1/3}$ est continue : f est un homéomorphisme. Supposons maintenant f^{-1} dérivable en 0. En dérivant $f^{-1} \circ f = \text{id}$ en 0, on obtient $(f^{-1})'(0) \times f'(0) = 1$. Or $f'(0) = 0$, ce qui est absurde. **Donc f est un homéomorphisme mais pas un C^1-difféomorphisme.**

2. La fonction g est C^∞ et $g'(x) = 1 + 3x^2 \geq 1 > 0$. Ainsi, g est strictement croissante, continue, de limites $\pm\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme g' ne s'annule pas, le théorème d'inversion globale s'applique. De plus, $g(1) = 2$, donc $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(1)}$. **Ainsi $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$.**

3. L'application h est polynomiale, donc C^∞. Résolvons $h(x,y) = (u,v)$: on trouve $y = v$, puis $x = u - v^3$. Donc h est bijective, et sa réciproque est polynomiale, donc C^∞. On remarque aussi que le jacobien vaut $\det\begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ 0 & 1,1 \end{pmatrix} = 1$. **Par conséquent h est un C^∞-difféomorphisme, et $h^{-1}(u,v) = (u - v^3, v)$.**

Point de méthode : une bijection lisse dont la dérivée s'annule n'est jamais un difféomorphisme ; c'est la règle de dérivation de la composée qui le montre.

Corrigé de l'exercice 2 : Coordonnées polaires

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Les composantes sont des produits de fonctions C^∞, donc Φ est C^∞. Sa matrice jacobienne vaut $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ [\backslash\text{sinin?}]\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$. **Le jacobien vaut** $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0$**.**

2. D'abord, supposons $\Phi(r,\theta) = \Phi(r',\theta')$. En prenant la norme, $r = r'$. Ensuite, $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$, donc $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Or $|\theta - \theta'| < 2\pi$, d'où $\theta = \theta'$. Pour l'image, si $\Phi(r,\theta) \in \mathbb{R}_- \times \{0\}$, alors $\sin\theta = 0$, donc $\theta = 0$ et $x = r > 0$: c'est impossible. Réciproquement, soit $(x,y) \in D$. Il est non nul, donc $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$. Le vecteur $(x/r, y/r)$ est unitaire et possède un argument $\theta \in]-\pi,\pi]$. Enfin, $\theta = \pi$ donnerait $(x,y) = (-r,0)$, qui est exclu. **Donc** Φ **est injective et** $\Phi(\Omega) = D$**.**

3. L'application Φ est C^∞, injective, de jacobien non nul sur l'ouvert Ω. **Par le théorème d'inversion globale,** Φ **est un** C^∞**-difféomorphisme de** Ω **sur** D**.**

4. On a $\Phi(1,\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ et $D\Phi(1,\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ [\backslash\text{aay?}] & 0 \end{pmatrix}$. Or $D(\Phi^{-1})(0,1) = D\Phi(1,\frac{\pi}{2})^{-1}$. **La jacobienne de** Φ^{-1} **en** $(0,1)$ **vaut** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [\backslash\text{aay?}] & 0 \end{pmatrix}$: $\partial_x r = 0$, $\partial_y r = 1$, $\partial_x\theta = -1$, $\partial_y\theta = 0$.

5. D'une part, $\partial_x r = x/r$ et $\partial_y r = y/r$, soit 0 et 1 en $(0,1)$. D'autre part, pour $y > 0$, $\sqrt{1 - x^2/r^2} = y/r$. La dérivée de $\arccos$ donne alors $\partial_x\theta = -\frac{r}{y}\cdot\frac{y^2}{r^3} = -\frac{y}{r^2}$ et $\partial_y\theta = -\frac{r}{y}\cdot\left(-\frac{xy}{r^3}\right) = \frac{x}{r^2}$. **En** $(0,1)$**, on retrouve** $\partial_x\theta = -1$ **et** $\partial_y\theta = 0$**.**

Corrigé de l'exercice 3 : L'exponentielle complexe vue dans le plan

1. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x[\backslash\text{cocos?}]\, y \end{pmatrix}$. **Son déterminant est** $e^{2x} > 0$**, donc** $Df(x,y)$ **est toujours inversible.**

2. On a $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$: f n'est pas injective. Ensuite, $|f(x,y)| = e^x > 0$, donc l'image évite l'origine. Réciproquement, tout $(u,v) \neq (0,0)$ s'écrit $\rho(\cos\alpha, \sin\alpha)$ avec $\rho > 0$. Il suffit alors de prendre $x = \ln\rho$ et $y = \alpha$. **Ainsi** $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**.**

3. On remarque que $f(x,y) = \Phi(e^x, y)$, où Φ est l'application polaire de l'exercice 2. Or $(x,y) \to (e^x, y)$ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R} \times]-\pi,\pi[$ sur Ω, de réciproque $(r,\theta) \to (\ln r, \theta)$. **Par composition, la restriction de** f **est un** C^∞**-difféomorphisme sur** $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$**.**

4. On a $f(0,0) = (1,0)$ et $Df(0,0) = I_2$. **La différentielle de la réciproque en $(1,0)$ est donc I_2.**

Corrigé de l'exercice 4 : Le carré complexe et son point critique

1. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, de déterminant $4(x^2+y^2)$. **Le théorème d'inversion locale s'applique en tout point sauf l'origine.**

2. On a $f(-x,-y) = f(x,y)$. Or tout voisinage de $(0,0)$ contient une boule, donc un point $u \neq 0$ et son opposé $-u \neq u$. **Ainsi f n'est injective sur aucun voisinage de l'origine.**

3. On a $f(1,1) = (0,2)$ et $Df(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant 8. Par la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 : $Dg(0,2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

4. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$: $f(z) = z^2$. D'abord, le jacobien ne s'annule pas sur P. Ensuite, si $z^2 = w^2$ avec $z, w \in P$, alors $z = \pm w$. Or $z = -w$ donnerait $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Re} w < 0$: donc $z = w$. Enfin, P est l'ensemble des $\rho\, e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Leurs carrés $\rho^2\, e^{2i\alpha}$ décrivent exactement les complexes non nuls d'argument dans $]-\pi, \pi[$. **Par inversion globale, f est un C^∞-difféomorphisme de P sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Perturbation lipschitzienne de l'identité

1. On a $g(x,y) = (\frac{1}{2}\sin y, \frac{1}{2}\sin x)$. Par l'inégalité des accroissements finis, $|\sin y - \sin y'| \leq |y - y'|$. Donc chaque composante de $g(u) - g(v)$ est majorée par $\frac{1}{2}|u - v|_\infty$. **Ainsi g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. On écrit $f(u)-f(v)=(u-v)+(g(u)-g(v))$. Par l'inégalité triangulaire, $|f(u)-f(v)|_\infty \geq |u-v|_\infty - \frac{1}{2}|u-v|_\infty$. **Donc $|f(u)-f(v)|_\infty \geq \frac{1}{2}|u-v|_\infty$, et f est injective.**

3. On a $f(u)=w$ si et seulement si $u=w-g(u)$. L'application $T : u \to w-g(u)$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$, qui est complet. **Par le théorème du point fixe de Banach, T a un point fixe : w a un antécédent, et f est surjective.**

4. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos y \\ \frac{112\cos x \,\&\, 1}{[?]} \end{pmatrix}$, de déterminant $1-\frac{1}{4}\cos x \cos y \geq \frac{3}{4}$. En outre, f est C^∞ et bijective. **Par le théorème d'inversion globale, f est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.**

5. D'abord, $Dg(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{g(x+th)-g(x)}{t}$, donc $|Dg(x)| \leq k$. Ensuite, si $(I+Dg(x))h=0$, alors $|h| = |Dg(x)h| \leq k|h|$, d'où $h=0$: $D(\mathrm{id}+g)(x)$ est inversible. Comme aux questions 2 et 3, on obtient $|f(u)-f(v)| \geq (1-k)|u-v|$ et la surjectivité par point fixe. **L'inversion globale donne alors un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Inversion locale quantitative

1. On a $Dh(x)=I-Df(x)$, donc $|Dh(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur la boule fermée, qui est convexe. L'inégalité des accroissements finis montre que h est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. **Comme $h(0)=0$, on a $|h(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$.**

2. Pour $|x| \leq r$, $|\varphi_y(x)| \leq |y| + |h(x)| \leq \frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$. De plus, $|\varphi(x)-\varphi_y(x^{\pi\prime})| = |h(x)-h(x')| \leq \frac{1}{2}|x-x'|$. **Donc φ_y envoie la boule dans elle-même et y est $\frac{1}{2}$-contractante.**

3. La boule fermée est complète, car fermée dans $\mathbb{R}^n$. Par le théorème de Banach, φ_y a un unique point fixe x. Or $\varphi_y(x)=x$ équivaut à $y+x-f(x)=x$, c'est-à-dire $f(x)=y$. Enfin, $|x| = |y+h(x)| \leq |y| + \frac{1}{2}|x|$. **Donc y a un unique antécédent dans $\overline{B}(0,r)$, et $|x| \leq 2|y|$.**

4. On a $f(0)=0$ et $Df(x,y)-I = \begin{pmatrix} 0 \,\&\, y/2 \\ x/2 \,\&\, 0\,\} \end{pmatrix}$. La norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ est le

maximum des sommes des valeurs absolues sur les lignes, ici $\max(|y|,|x|)/2 \leq \frac{1}{2}$ pour $|(x,y)|_\infty \leq 1$. **Conclusion : tout w tel que $|w|_\infty \leq \frac{1}{2}$ a un unique antécédent dans $[-1,1]^2$, et celui-ci vérifie $|x|_\infty \leq 2|w|_\infty$.**

5. Ici, $h(x,y) = (-\frac{y^2}{4}, -\frac{x^2}{4})$. Donc $x_1 = w + h(0) = (\frac{1}{2}, 0)$, puis $x_2 = w + h(x_1) = (\frac{1}{2} - 0, ,0 - \frac{1}{16})$. Ensuite, pour une contraction de rapport k, $|x^* - x_n| \leq k|x^* - x_n| + k|x_n - x_{n-1}|$, d'où $|x^* - x_n| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$. Avec $k = \frac{1}{2}$: $x_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$ **et** $|x_2 - x^*|_\infty \leq \frac{1}{16}$.

Point de méthode : la preuve par point fixe donne un algorithme ; chaque itération divise l'erreur au moins par deux.

Corrigé de l'exercice 7 : Le folium de Descartes

1. On a $F(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4} = 0$. Ensuite, $\partial_y F = 3y^2 - 3x$ vaut $\frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \neq 0$ en A. **Comme F est polynomiale, le théorème des fonctions implicites donne φ de classe C^∞ avec $\varphi(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$.**

2. En dérivant $F(x,\varphi(x)) = 0$ et en divisant par 3 : $x^2 + \varphi^2\varphi' - \varphi - x\varphi' = 0$. En A, cela donne $\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\varphi' - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\varphi' = 0$, donc $\varphi' = -1$. On dérive encore : $2x + 2\varphi\varphi'^2 + \varphi^2\varphi'' - 2\varphi' - x\varphi'' = 0$. En A : $3 + 3 + 2 + \frac{3}{4}\varphi'' = 0$. **Ainsi $\varphi'(\frac{3}{2}) = -1$, $\varphi''(\frac{3}{2}) = -\frac{32}{3}$; la tangente est $y = 3 - x$ et la courbe est localement en dessous.**

3. On a $\partial_y F = 0$ si et seulement si $x = y^2$. En reportant, $y^6 - 2y^3 = 0$, donc $y = 0$ ou $y = 2^{1/3}$. On obtient l'origine et $B = (2^{2/3}, 2^{1/3})$. En B, $\partial_x F = 3(2^{4/3} - 2^{1/3}) = 3 \cdot 2^{1/3} \neq 0$. Donc x s'exprime en fonction de y près de B, avec une dérivée nulle. **La courbe a en B une tangente verticale : c'est le point le plus à droite de la boucle.**

4. D'abord, $x^3 + y^3 = \frac{27t^3(1+t^3)}{(1+t^3)^3} = \frac{27t^3}{(1+t^3)^2} = 3xy$. Ensuite, $x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$: x

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

croît sur $[0, 2^{-1/3}]$ puis décroît vers 0. Pour x petit et positif, il y a donc deux paramètres $t_1 < 2^{-1/3} < t_2$ de même abscisse. Or $y = tx$, donc les ordonnées $t_1 x$ et $t_2 x$ sont distinctes. Enfin, quand $x \to 0^+$, $t_1 \to 0$ et $t_2 \to +\infty$, et les deux points tendent vers l'origine. **Tout voisinage de l'origine contient deux points de C de même abscisse : C n'y est pas un graphe.**

Corrigé de l'exercice 8 : Développement limité d'une fonction implicite

1. Posons $G(x,y,z) = e^z + xz + y - 1$, de classe C^∞. On a $G(0,0,0) = 0$ et $\partial_z G = e^z + x$, qui vaut 1 à l'origine. **Par le théorème des fonctions implicites, S est localement le graphe de φ de classe C^∞, avec $\varphi(0,0) = 0$.**

2. On a $\partial_x \varphi = -\frac{\partial_x G}{\partial_z G} = -\frac{z}{e^z + x}$ et $\partial_y \varphi = -\frac{1}{e^z + x}$. À l'origine, $\partial_x \varphi(0,0) = 0$, $\partial_y \varphi(0,0) = -1$**, et le plan tangent a pour équation $y + z = 0$.**

3. Par Taylor-Young, $\varphi(x,y) = -y + q(x,y) + o(x^2 + y^2)$, avec q quadratique. Or $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + O(\cdots^3)$. En reportant $z = -y + q$: $-y + q + \frac{y^2}{2} - xy + y = o(x^2+y^2)$. Donc $q = xy - \frac{y^2}{2}$. **Ainsi** $\varphi(x,y) = -y + xy - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$**.**

4. La différence entre S et son plan tangent vaut $Q(x,y) + o(x^2+y^2)$, avec $Q = xy - \frac{y^2}{2}$. Or $Q(1,1) = \frac{1}{2} > 0$ et $Q(0,1) = -\frac{1}{2} < 0$. Le long des droites dirigées par ces vecteurs, la différence est équivalente à $\pm\frac{t^2}{2}$. **Donc S traverse son plan tangent en l'origine.**

Corrigé de l'exercice 9 : Racines simples et valeurs propres simples

Partie A.

1. L'application $F(a,x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ est polynomiale, donc C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On a $F(a^0,x_0) = 0$. De plus, $\partial_x F(a^0,x_0) = P'_{a^0}(x_0) \neq 0$, car la racine est simple. **Le théorème des fonctions implicites fournit V, I et ξ de classe C^∞.**

2. On a $\partial_{a_k} F(a,x) = x^k$. La formule des fonctions implicites donne $\partial_{a_k}\xi = -\partial_{a_k}F \,/\, \partial_x F$. **En a^0, $\frac{\partial \xi}{\partial a_k}(a^0) = -\frac{x_0^k}{P'_{a^0}(x_0)}$.**

3. Seul a_0 varie, de 2 à $2+\varepsilon$. Ici, $P'(x) = 2x-3$, donc $P'(2) = 1$, et $\xi = 2 - \varepsilon + o(\varepsilon)$. La formule exacte donne la racine $\frac{3+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} = \frac{3+1-2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2}$. **La racine se déplace de $-\varepsilon + o(\varepsilon)$, ce que confirme le calcul exact.**

4. Soit a^0 tel que P_{a^0} ait n racines réelles distinctes $x_1 < \ldots < x_n$. Elles sont simples, car le degré vaut n. On applique la question 1 en chaque x_i, avec des intervalles I_i deux à deux disjoints ; c'est possible car on peut réduire I_i, puis V_i par continuité de ξ_i. Sur $V = \bigcap V_i$, P_a a les racines $\xi_i(a) \in I_i$, distinctes. **L'ensemble étudié contient un voisinage de chacun de ses points : il est ouvert.**

Partie B.

1. Posons $G(t,\lambda) = \det(\lambda I - M(t)) = (\lambda-1)(\lambda-2) - t^2$, polynomiale. On a $G(0,1) = 0$ et $\partial_\lambda G = 2\lambda - 3$, qui vaut -1 en $(0,1)$. **Le théorème des fonctions implicites fournit λ de classe C^∞ près de 0, avec $\lambda(0) = 1$ et $G(t,\lambda(t)) = 0$.**

2. En dérivant, $\lambda'(2\lambda - 3) - 2t = 0$, donc $-\lambda'(0) = 0$. En dérivant encore, $\lambda''(2\lambda-3) + 2\lambda'^2 - 2 = 0$, donc $-\lambda''(0) - 2 = 0$. Par ailleurs, $\lambda(t) = \frac{3-\sqrt{1+4t^2}}{2} = 1 - t^2 + o(t^2)$. **Ainsi $\lambda'(0) = 0$ et $\lambda''(0) = -2$, en accord avec la formule explicite.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 10 : Plan tangent à un hyperboloïde

1. Posons $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, de classe C^∞. Son gradient $(2x, 2y, -2z)$ ne s'annule qu'à l'origine, qui n'est pas sur H car $g(0) = -1$. Donc Dg est surjective en tout point de H. **Ainsi H est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.**

2. On a $g(1,1,1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ et $\nabla g(A) = (2,2,-2)$. Le plan tangent est $2(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$. **Son équation est $x + y - z = 1$.**

3. Pour la première droite, $(1+t)^2 + 1 - (1+t)^2 = 1$ et $(1+t) + 1 - (1+t) = 1$. Pour la seconde, $1 + (1+t)^2 - (1+t)^2 = 1$ et $1 + (1+t) - (1+t) = 1$. **Les deux droites sont contenues dans H et dans le plan tangent en A.**

4. Posons $k = x^2 + y^2 - z^2$. Son gradient ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, donc $K \setminus \{0\}$ est une sous-variété de dimension 2. Supposons que K en soit un près de 0. Alors T_0K serait un plan vectoriel. Or $t \to t(\cos\alpha, \sin\alpha, 1)$ est tracée sur K et passe par 0, donc $(\cos\alpha, \sin\alpha, 1) \in T_0K$. Les vecteurs $(1,0,1)$, $(-1,0,1)$, $(0,1,1)$ sont de ce type, et leur déterminant vaut $-2 \neq 0$. **Ils engendrent $\mathbb{R}^3$: contradiction, donc K n'est pas une sous-variété au voisinage de 0.**

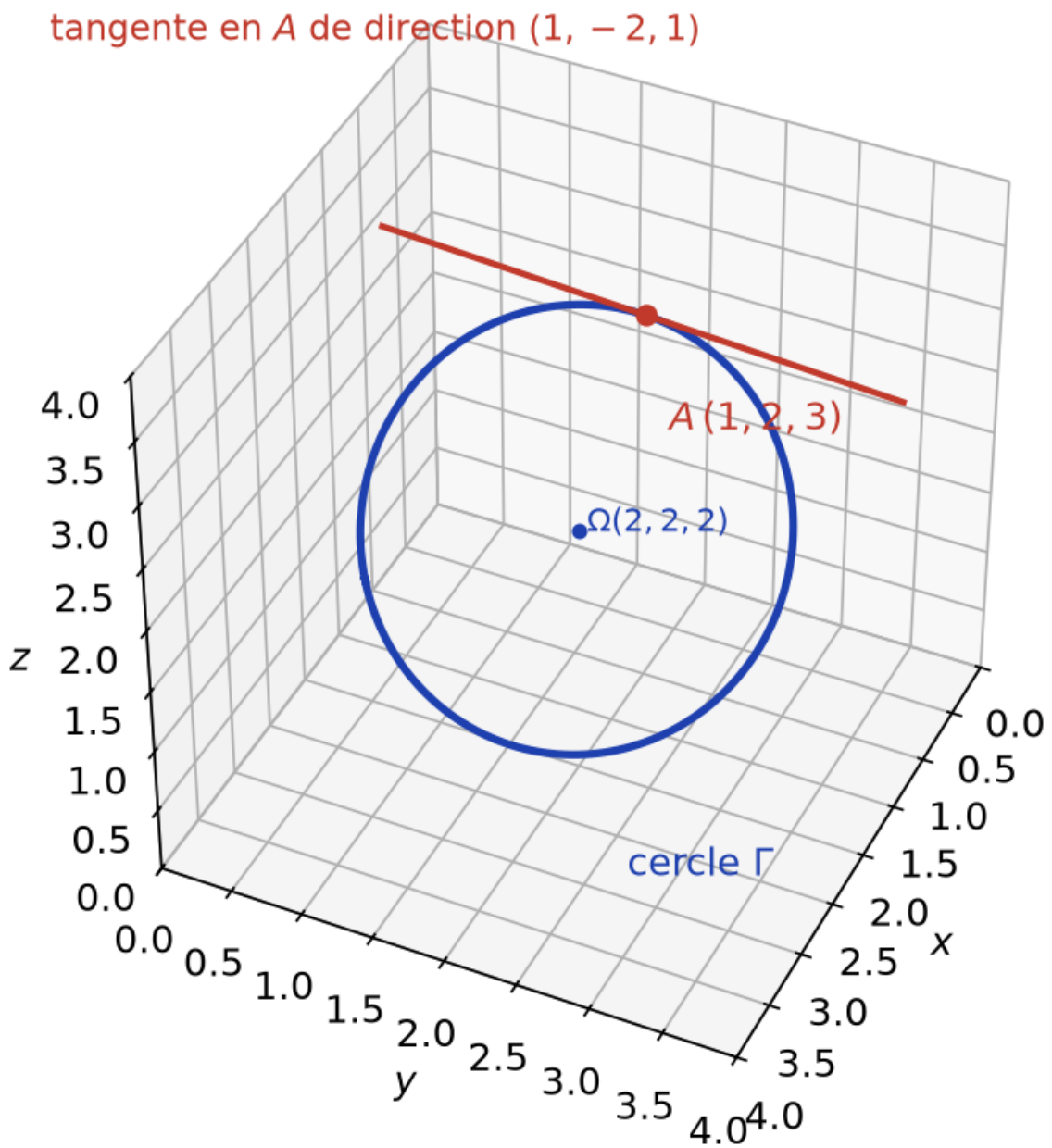
Corrigé de l'exercice 11 : Intersection d'une sphère et d'un plan

1. Posons $G = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 14, \\ x + y + z - 6 \end{pmatrix}$. Les gradients $(2x,2y,2z)$ et $(1,1,1)$ sont liés si et seulement si $x = y = z$. Dans ce cas, le plan impose $x = 2$, puis $x^2 + y^2 + z^2 = 12 \neq 14$. **Donc DG est surjective en tout point de Γ, qui est une sous-variété de dimension 1.**

2. On vérifie $1 + 4 + 9 = 14$ et $1 + 2 + 3 = 6$. La jacobienne partielle en (y,z) vaut $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en A, de déterminant $-2 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites donne φ et ψ. En dérivant, $x + \varphi\varphi' + \psi\psi' = 0$ et $1 + \varphi' + \psi' = 0$. En $x = 1$: $1 + 2\varphi' + 3\psi' = 0$ et $\varphi' + \psi' = -1$. **On obtient $\varphi'(1) = -2$ et $\psi'(1) = 1$.**

3. Un vecteur tangent est $(1, \varphi'(1), \psi'(1)) = (1,-2,1)$. Par ailleurs,

$(2,4,6) \wedge (1,1,1) = (4-6,$
$,6-2,$, colinéaire à $(1,-2,1)$. **La tangente en A est la droite**
$,2-4) = (-2,4,-2)$
$A + \mathbb{R}(1,-2,1)$**.** La figure ci-dessous montre cette tangente sur le cercle Γ.



4. Le projeté orthogonal de O sur le plan est $\Omega = (2,2,2)$, et $O\Omega^2 = 12$. Pour $M \in \Gamma$, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ est dans la direction du plan, donc orthogonal à $\overrightarrow{O\Omega}$. Par Pythagore, $\Omega M^2 = 14 - 12 = 2$. La réciproque se vérifie de la même façon. **Γ est le cercle du plan $x + y + z = 6$ de centre $(2,2,2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 12 : Le groupe spécial linéaire

1. On développe $\det(I+H)=\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_i (\delta_{\sigma(i),i}+h_{\sigma(i),i})$. Pour $\sigma=\mathrm{id}$, le produit $\prod(1+h_{ii})$ vaut $1+\mathrm{tr}(H)$ plus des termes de degré au moins 2. Pour $\sigma\neq\mathrm{id}$, au moins deux indices sont déplacés, et le produit contient au moins deux coefficients de H. **Les termes de degré au moins 2 sont des $O(|H|^2)$, d'où $\det(I+H)=1+\mathrm{tr}(H)+o(|H|)$.**

2. Pour A inversible, $\det(A+H)=\det(A)\det(I+A^{-1}H)$. Or $|A^{-1}H|\leq|A^{-1}|\,|H|$. Donc $\det(A+H)=\det A+\det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}H)+o(|H|)$. **Ainsi $D(\det)(A)(H)=\det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}H)$.**

3. La fonction $g=\det-1$ est polynomiale, donc C^∞. Pour $A\in SL_n(\mathbb{R})$, $Dg(A)(A)=\mathrm{tr}(I_n)=n\neq 0$. La forme linéaire $Dg(A)$ est donc non nulle, c'est-à-dire surjective sur $\mathbb{R}$. **Par conséquent, $SL_n(\mathbb{R})$ est une hypersurface, de dimension n^2-1.**

4. L'espace tangent est le noyau de $Dg(A)$. $T_A\,SL_n(\mathbb{R})=\{H:\mathrm{tr}(A^{-1}H)=0,0\}$**, et $T_{I_n}SL_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices de trace nulle.**

5. On a $\det\exp(tH)=e^{t\,\mathrm{tr}(H)}=1$. La courbe est donc tracée sur $SL_n(\mathbb{R})$, passe par I_n en $t=0$, avec une vitesse H. **Toute matrice de trace nulle est tangente en I_n, ce qui confirme la question 4.**

Corrigé de l'exercice 13 : Extrema libres d'un polynôme de degré 3

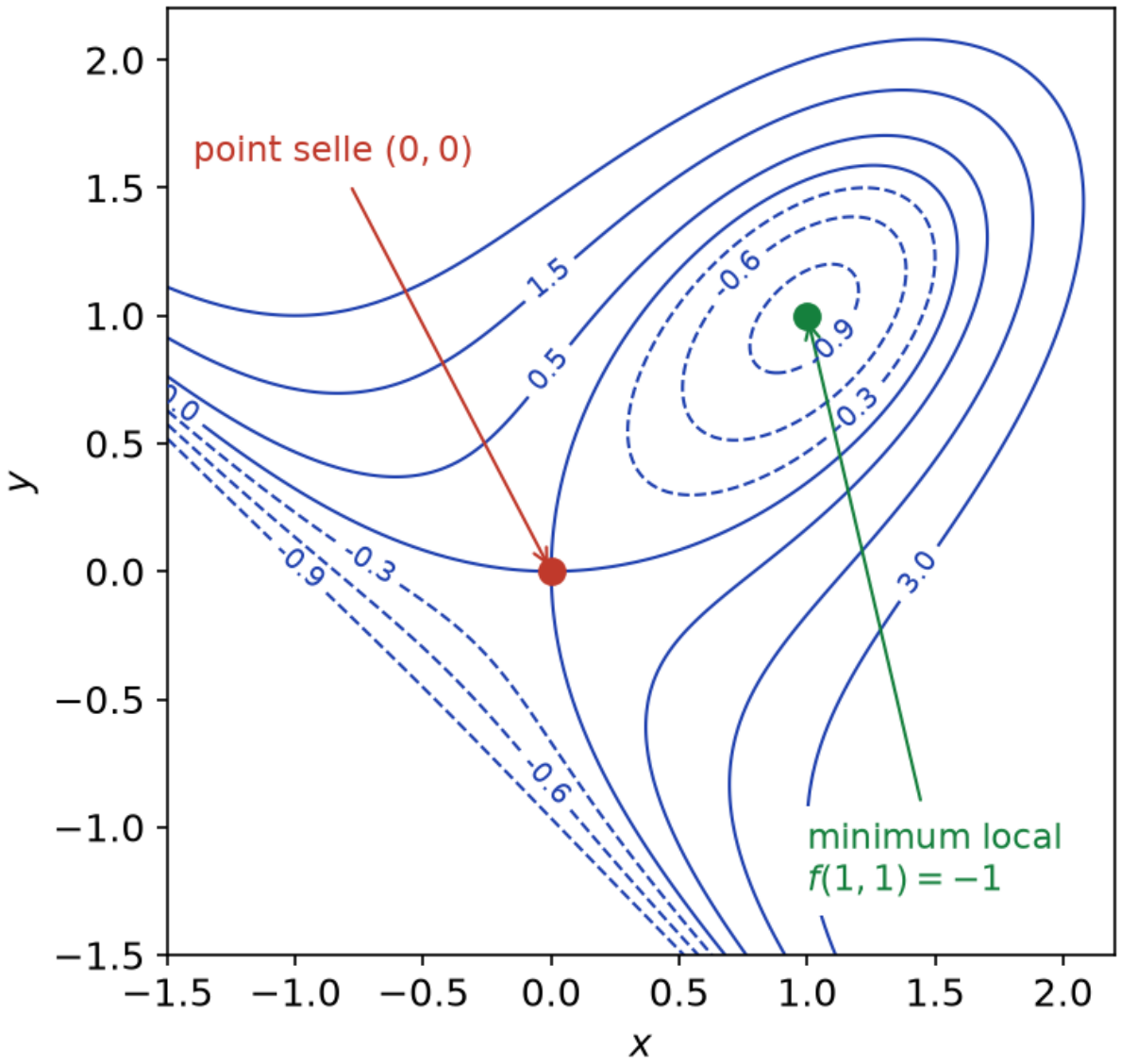
1. On a $\nabla f=(3x^2-3y,\ ,3y^2-3x)$. Il s'annule si $y=x^2$ et $x=y^2=x^4$, soit $x(x^3-1)=0$. **Les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.**

2. Les dérivées secondes valent $r=6x$, $s=-3$, $t=6y$. En $(0,0)$,

$rt - s^2 = -9 < 0$: c'est un point selle. En $(1,1)$, $rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ et $r = 6 > 0$. **L'origine est un point selle, et $(1,1)$ un minimum local strict, avec $f(1,1) = -1$.**

3. On a $f(x,0) = x^3$, qui tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. **Le minimum local n'est pas global, et f n'a ni minimum ni maximum global.**

4. La courbe de l'exercice 7 est la ligne de niveau 0 de f. Son point double est le point selle, et sa boucle entoure le minimum local, comme le montrent les lignes de niveau ci-dessous. **Le folium est la ligne de niveau qui passe par le point selle.**



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 14 : Un point critique dégénéré

1. On a $\partial_x f = 4x^3 - 4(x-y)$ et $\partial_y f = 4y^3 + 4(x-y)$. En sommant, $x^3 + y^3 = 0$, donc $y = -x$. Ensuite, $4x^3 - 8x = 0$, d'où $x \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. **Les points critiques sont** $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ **et** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

2. On a $r = 12x^2 - 4$, $s = 4$, $t = 12y^2 - 4$. En $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$, $r = t = 20$, donc $rt - s^2 = 384 > 0$ et $r > 0$. De plus, $f = 4 + 4 - 2 \times 8 = -8$. **Ces deux points sont des minima locaux stricts, de valeur** -8**.**

3. En $(0,0)$, $r = t = -4$ et $s = 4$, donc $rt - s^2 = 0$: on ne peut pas conclure. Or $f(x,x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$. En revanche, $f(x,0) = x^2(x^2 - 2) < 0$ pour $0 < |x| < \sqrt{2}$. f **prend des deux signes près de l'origine, où elle vaut** 0 **: ce n'est pas un extremum.**

4. Avec $\rho^2 = x^2 + y^2$, on a $x^4 + y^4 \geq \frac{\rho^4}{2}$ et $(x-y)^2 \leq 2\rho^2$. Donc $f \geq \frac{\rho^4}{2} - 4\rho^2 \to +\infty$. Par le cours, f continue et coercive atteint son minimum, en un point critique puisque $\mathbb{R}^2$ est ouvert. **Le minimum global vaut** -8**, atteint en** $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ **et** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$**.**

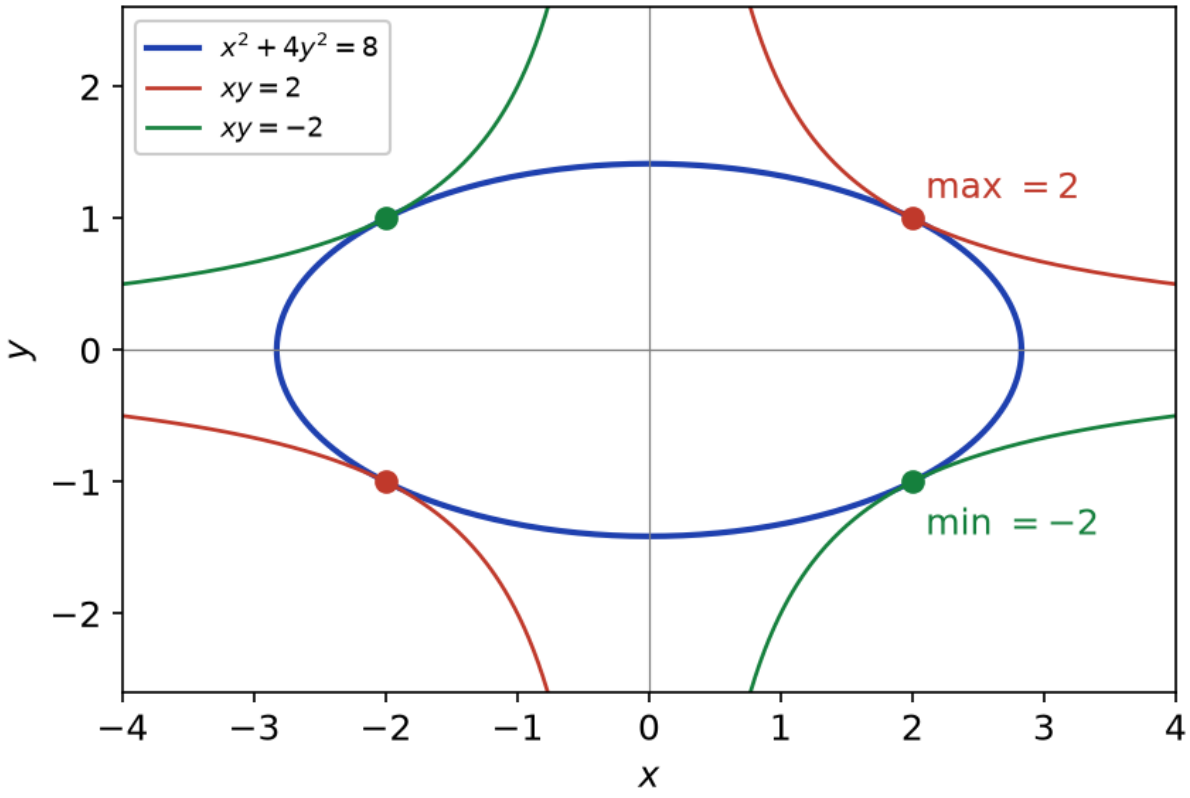
Corrigé de l'exercice 15 : Extrema sur une ellipse

1. L'ellipse E est fermée, comme image réciproque d'un fermé, et bornée car $|x| \leq 2\sqrt{2}$ et $|y| \leq \sqrt{2}$. E **est compacte et** f **continue :** f **atteint un maximum et un minimum sur** E**.**

2. Posons $g = x^2 + 4y^2 - 8$. Son gradient $(2x, 8y)$ ne s'annule pas sur E. La condition $\nabla f = \lambda \nabla g$ s'écrit $y = 2\lambda x$ et $x = 8\lambda y$. Donc $y = 16\lambda^2 y$. Si $y = 0$, alors $x = 0$, qui n'est pas sur E. Ainsi $\lambda = \pm\frac{1}{4}$. Pour $\lambda = \frac{1}{4}$, $y = \frac{x}{2}$ et $2x^2 = 8$. Pour $\lambda = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{x}{2}$. **Les candidats sont** $(2,1)$, $(-2,-1)$**, où** $f = 2$**, et** $(2,-1)$, $(-2,1)$**, où** $f = -2$**.**

3. Les extrema sont atteints parmi les candidats. **Le maximum de** xy **sur** E **vaut** 2 **et le minimum** -2**.** Géométriquement, les hyperboles $xy = 2$ et $xy = -2$ sont tangentes à

l'ellipse en ces points, comme le montre la figure ci-dessous.



Corrigé de l'exercice 16 : Deux contraintes dans l'espace

1. L'ensemble Γ est fermé. Il est borné car $|x|, |y| \leq 1$ et $|z| = |1 - x - y| \leq 3$. Si $(2x, 2y, 0) = \mu(1,1,1)$, alors $\mu = 0$, puis $x = y = 0$, ce qui contredit $x^2 + y^2 = 1$. **Γ est compacte et les deux gradients sont libres sur Γ.**

2. On écrit $(0,0,1) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(1,1,1)$. La troisième composante donne $\mu = 1$. Ensuite, $2\lambda x = -1$ et $2\lambda y = -1$, donc $\lambda \neq 0$ et $x = y$. Avec $x^2 + y^2 = 1$, on obtient $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, puis $z = 1 - 2x$. **Les candidats sont $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2})$.**

3. Par compacité, f atteint ses bornes en ces candidats. **Le maximum vaut $1 + \sqrt{2}$ et le minimum $1 - \sqrt{2}$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Avec $x = \cos t$, $y = \sin t$, on a $z = 1 - \cos t - \sin t = 1 - \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$. **On retrouve $z \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$, les bornes étant atteintes.**

Corrigé de l'exercice 17 : Quotient de Rayleigh

1. On a $q(x + h) = q(x) + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle$. Comme A est symétrique, $\langle Ah, x \rangle = \langle Ax, h \rangle$, et le dernier terme est un $O(|h|^2)$. **Donc $\nabla q(x) = 2Ax$; de plus, S est compacte et q continue, donc q atteint ses bornes sur S .**

2. Posons $g(x) = |x|^2 - 1$, de gradient $2x \neq 0$ sur S . En un extremum, Lagrange donne $2Ax = 2\lambda x$, avec $x \neq 0$. **Le point x est un vecteur propre de A , et A admet une valeur propre réelle.**

3. En un tel point, $q(x) = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda$. Ainsi, $\max_S q$ est une valeur propre. Réciproquement, pour toute valeur propre μ et tout vecteur propre unitaire v , $\mu = q(v) \leq \max_S q$. **Donc $\max_S q$ est la plus grande valeur propre ; de même, $\min_S q$ est la plus petite.**

4. La forme correspond à $A = \left([\backslash \mathrm{ray?}] \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix},\right)$, de valeurs propres 3 et 1 , de vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,-1)$. **Le maximum vaut 3 en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et le minimum 1 en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.**

Corrigé de l'exercice 18 : Inégalité arithmético-géométrique

1. L'ensemble K est fermé et borné, car $0 \leq x_i \leq s$. Il est donc compact, et P continue y atteint son maximum m . Or $m \geq P(\frac{s}{n}, \ldots, \frac{s}{n}) = (\frac{s}{n})^n > 0$. **En un point de maximum, aucune coordonnée n'est nulle : elles sont toutes strictement positives.**

2. Soit a un point de maximum. Il appartient à l'ouvert $U =]0,+\infty[^n$, et c'est un extremum de P sur $U \cap \{g = 0\}$, avec $g = \sum x_i - s$ et $\nabla g = (1, \ldots, 1) \neq 0$. Lagrange

donne $\partial_i P(a) = \frac{P(a)}{a_i} = \lambda$ pour tout i. Comme $P(a) > 0$, $\lambda \neq 0$ et tous les a_i valent $P(a)/\lambda$. **Donc $a = (\frac{s}{n}, \ldots, \frac{s}{n})$ et le maximum vaut $(\frac{s}{n})^n$.**

3. Soient $x_i \geq 0$ et $s = \sum x_i$. Si $s = 0$, tout est nul et l'égalité est triviale. Sinon, $x \in K$, donc $\prod x_i \leq (\frac{s}{n})^n$. En cas d'égalité, x est un point de maximum, donc égal à $(\frac{s}{n}, \ldots, \frac{s}{n})$ par la question 2. **On obtient $(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, avec égalité si et seulement si les x_i sont égaux.**

4. Pour des dimensions a, b, c de somme 3, on a $abc \leq 1$, avec égalité si $a = b = c = 1$. **Le pavé de volume maximal est le cube de côté 1.**

Corrigé de l'exercice 19 : Triangle d'aire maximale

1. L'inégalité triangulaire stricte $a < b + c$ équivaut à $2a < 2p$, soit $u > 0$. De même, $v > 0$ et $w > 0$. **Enfin, $u + v + w = 3p - 2p = p$.**

2. L'ensemble $\begin{Bmatrix} u, v, w \geq 0, \\ ,u + v +, + w = p \end{Bmatrix}$ est compact, donc uvw y atteint son maximum. Ce maximum est strictement positif, car $(\frac{p}{3})^3 > 0$, donc il est atteint à l'intérieur de $]0,+\infty[^3$. Lagrange donne $vw = uw = uv = \lambda$. Comme $w > 0$, $vw = uw$ donne $u = v$; de même, $v = w$. **Le maximum est atteint pour $u = v = w = \frac{p}{3}$, et vaut $\frac{p^3}{27}$.**

3. Par Héron, $S^2 = p\,uvw \leq \frac{p^4}{27}$, avec égalité si et seulement si $u = v = w$, c'est-à-dire $a = b = c = \frac{2p}{3}$. On vérifie : $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2p}{3}\right)^2 = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$. **Le triangle d'aire maximale est équilatéral, d'aire $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$.**

4. Pour tout triangle, $S \leq \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$, donc $p^2 \geq \frac{9S}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}\,S$. **Ainsi le périmètre $2p$ est au moins égal à $2\sqrt{3\sqrt{3}\,S}$, avec égalité pour le triangle équilatéral.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 20 : Minimisation d'une fonction quadratique

1. La hessienne vaut $\left([\text{ray?}]\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix},\right)$, de valeurs propres 1 et 3. **Elle est définie positive en tout point, donc f est strictement convexe.**

2. Le gradient $\begin{matrix}(2x+y-3,\\ ,x+2y)\end{matrix}$ s'annule si $x=-2y$ et $-3y=3$, soit $(2,-1)$. Par convexité, c'est un minimum global, unique par stricte convexité. **Le minimum global vaut $f(2,-1)=4-2+1-6=-3$.**

3. Par symétrie de A, $J(x+h)=J(x)+\langle Ax-b,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle$. Donc $\nabla J(x)=Ax-b$ et la hessienne vaut A. En $x^*=A^{-1}b$, on a $J(x^*+h)=J(x^*)+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle>J(x^*)$ pour $h\neq 0$. Enfin, $J(x^*)=\frac{1}{2}\langle b,A^{-1}b\rangle-\langle b,A^{-1}b\rangle$. **Le minimum est unique, atteint en $A^{-1}b$, et vaut $-\frac{1}{2}\langle A^{-1}b,b\rangle$.**

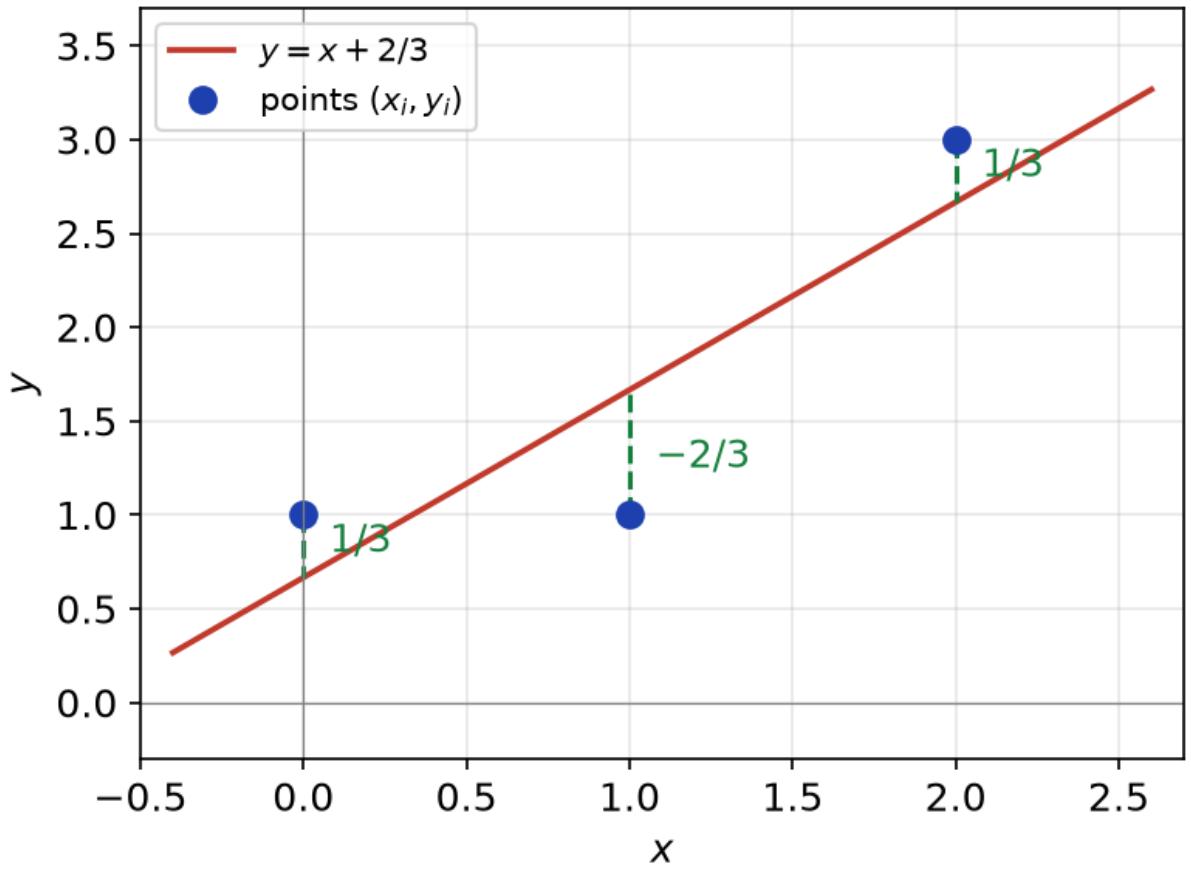
4. On a $f=J$ avec $A=\left([\text{ray?}]\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix},\right)$ et $b=(3,0)$. Or $A^{-1}=\frac{1}{3}\left([\text{ary?}]\begin{matrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{matrix}\right)$, donc $A^{-1}b=(2,-1)$. **On retrouve le minimum $-\frac{1}{2}\times 6=-3$ en $(2,-1)$.**

Corrigé de l'exercice 21 : Droite des moindres carrés

1. La fonction S est un polynôme de degré 2. Sa hessienne constante vaut $\begin{pmatrix}2\sum x_i^2 & 2\sum x_i\\ 2\sum x_i & 6\end{pmatrix}=\left([\text{aay?}]\begin{matrix}10 & 6\\ 6 & 6\end{matrix}\right)$. Sa trace vaut $16>0$ et son déterminant $24>0$. **Elle est définie positive, donc S est strictement convexe.**

2. On a $\sum x_i=3$, $\sum x_i^2=5$, $\sum y_i=5$ et $\sum x_iy_i=7$. Les équations $\nabla S=0$ s'écrivent $5a+3c=7$ et $3a+3c=5$. Par soustraction, $a=1$, puis $c=\frac{2}{3}$. **La droite des moindres carrés est $y=x+\frac{2}{3}$.**

3. Les résidus valent $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Leur somme est nulle, et $0 \times \frac{1}{3} + 1 \times (-\frac{2}{3}) + 2 \times \frac{1}{3} = 0$. Ces deux relations sont exactement les équations normales. **La valeur minimale vaut $S = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$.** La figure ci-dessous représente la droite obtenue et les résidus.



4. On développe $|Ax - b|^2 = \langle A^T Ax, x \rangle - 2\langle A^T b, x \rangle + |b|^2$. La matrice $A^T A$ est symétrique, et $\langle A^T Ax, x \rangle = |Ax|^2 > 0$ pour $x \neq 0$, car $\ker A = \{0\}$ par le rang. Elle est donc définie positive. **Par l'exercice 20, le minimum est unique, atteint en la solution de $A^T Ax = A^T b$.**

Corrigé de l'exercice 22 : Distance à un hyperplan

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Posons $g(x) = \langle a, x \rangle - c$, de gradient $a \neq 0$. La condition $2(x - x_0) = \lambda a$ donne $x = x_0 + \frac{\lambda}{2} a$. En reportant dans la contrainte, $\frac{\lambda}{2}|a|^2 = c - \langle a, x_0 \rangle$. **L'unique candidat est** $x^* = x_0 + \frac{c - \langle a, x_0 \rangle}{|a|^2} a$.

2. D'abord, f est convexe et la contrainte est affine. La fonction $L = f - \lambda g$ est donc convexe, de gradient nul en x^* : c'est un minimum global de L, et $L = f$ sur H. Ensuite, pour $x \in H$, $\langle a, x - x^* \rangle = 0$, tandis que $x^* - x_0$ est colinéaire à a. Par Pythagore, $|x - x_0|^2 = |x - x^*|^2 + |x^* - x_0|^2$. **Dans les deux cas, x^* est l'unique point de minimum de f sur H.**

3. La distance vaut $|x^* - x_0|$. **Ainsi** $d(x_0, H) = \frac{|\langle a, x_0 \rangle - c|}{|a|}$.

4. Ici, $a = (1,2,2)$, $|a| = 3$, $c = 9$ et $x_0 = 0$. La distance vaut $\frac{9}{3} = 3$, et $x^* = \frac{9}{9}(1,2,2)$. On vérifie que $1 + 4 + 4 = 9$. **La distance est 3, atteinte au point $(1,2,2)$.**

Point de méthode : avec une fonction convexe et des contraintes affines, la condition de Lagrange suffit, sans argument de compacité.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : inversion locale et extrema liés, cours de maths en L3
- Les énoncés : exercices de maths en L3 sur inversion locale et extrema liés
- À maîtriser avant : Calcul différentiel dans les espaces normés, Complétude, espaces de Banach et point fixe
- Chapitre précédent : Calcul différentiel dans les espaces normés
- Chapitre suivant : Équations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz

- Tester vos connaissances : QCM de maths en L3 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L3 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.