

Intégration sur un segment

Exercice 1 : Continuité uniforme et théorème de Heine

1. Montrer que, pour tous $x, y \geq 0$, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$. En déduire que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \rightarrow \sin(1/x)$ est continue mais non uniformément continue sur $]0, 1]$.
4. Soit f continue sur $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. À l'aide du théorème de Heine, construire une fonction en escalier φ sur $[0, 1]$ telle que $|f - \varphi| \leq \varepsilon$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : Intégrales de fonctions en escalier

Soit φ la fonction définie sur $[0, 4]$ par $\varphi(x) = 2$ si $0 \leq x < 1$, $\varphi(x) = -1$ si $1 \leq x < 3$, et $\varphi(x) = 3$ si $3 \leq x \leq 4$.

1. Justifier que φ est en escalier, puis calculer $\int_0^4 \varphi$ et sa valeur moyenne sur $[0, 4]$.
2. On modifie φ en posant $\varphi(1) = 100$. L'intégrale change-t-elle ? Justifier.
3. Montrer que $x \rightarrow \lfloor x^2 \rfloor$ est en escalier sur $[0, 2]$, puis calculer $\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx$.

Exercice 3 : Encadrement de la fonction carré par des fonctions en escalier

Pour $n \geq 1$, on définit sur $[0, 1]$ les fonctions en escalier φ_n et ψ_n par $\varphi_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ et $\psi_n(x) = \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$ pour $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, $0 \leq k \leq n-1$, et $\varphi_n(1) = \psi_n(1) = 1$.

1. Montrer que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, où $f(x) = x^2$.

2. Calculer $\int_0^1 \varphi_n$ et $\int_0^1 \psi_n$ en fonction de n , puis $\int_0^1 (\psi_n - \varphi_n)$.

3. Retrouver ainsi, sans primitive, la valeur de $\int_0^1 x^2 dx$.

Exercice 4 : Partie entière et partie fractionnaire

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx$.

2. Montrer que $x \rightarrow \{x\}$ est continue par morceaux et 1-périodique, puis calculer $\int_0^n \{x\} dx$.

Vérifier la cohérence avec $\int_0^n x dx$.

3. La fonction g définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = \{1/x\}$ pour $x \in]0, 1]$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 5 : Majorations d'intégrales

1. Montrer que $\left| \int_0^1 \frac{x^n \cos(nx)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de cette intégrale.
2. Montrer que, pour $u \in [0, 1]$, on a $1 + u \leq e^u \leq 1 + (e-1)u$. En déduire que $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \frac{e+2}{3}$.
3. Montrer que $\left| \int_0^\pi \frac{e^{it}}{1+t} dt \right| \leq \ln(1+\pi)$.

Exercice 6 : Fonction continue d'intégrale nulle

1. Soit f continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, telle que $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.
3. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$. Calculer $\int_0^1 (f^2 - f)^2$, puis montrer que f est constante égale à 0 ou à 1.
4. Montrer par un exemple que le résultat de la question 1 tombe si f est seulement continue par morceaux.

Exercice 7 : Parité, périodicité et valeur moyenne

1. Calculer sans primitive $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \, dx$, puis $\int_{-1}^1 (|x| + x^5 e^{x^2}) dx$.
2. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. Montrer, en dérivant, que $x \rightarrow \int_x^{x+T} f(t) \, dt$ est constante.
3. Calculer $\int_0^{10\pi} |\sin t| \, dt$ et la valeur moyenne de $|\sin|$ sur $[0, 10\pi]$.
4. Calculer la valeur moyenne de $\sin^2$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 8 : Formule de la moyenne et limites

1. Soient f et g continues sur $[a, b]$, avec $a < b$ et $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f g = f(c) \int_a^b g$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} \, dt$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^x t^2 e^t \, dt$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} \, dt$.

Exercice 9 : Limites de sommes de Riemann

Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, des suites suivantes.

$$1. \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

$$2. \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

$$3. \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

$$4. \quad d_n = \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n^n} \right)^{1/n}.$$

Exercice 10 : Vitesse de convergence de la méthode des rectangles

Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$ et $M_1 = \sup_{[a, b]} |f'|$. Pour $n \geq 1$, on pose $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$ et $R_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

$$1. \text{ Montrer que } \left| \int_a^b f - R_n \right| \leq \frac{M_1 (b-a)^2}{2n}.$$

2. Montrer que cette majoration est une égalité pour $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

3. On prend $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$. Montrer que $M_1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Quelle valeur de n garantit une erreur au plus 10^{-3} sur $\frac{\pi}{4}$?

Exercice 11 : Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Soit f de classe C^1 sur $[0, 1]$. On pose $R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $x_k = \frac{k}{n}$.

1. Montrer que $\int_0^1 f - R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^t f'(s) \, ds \, dt$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. À l'aide du théorème de Heine appliqué à f' , montrer que, pour n assez grand,

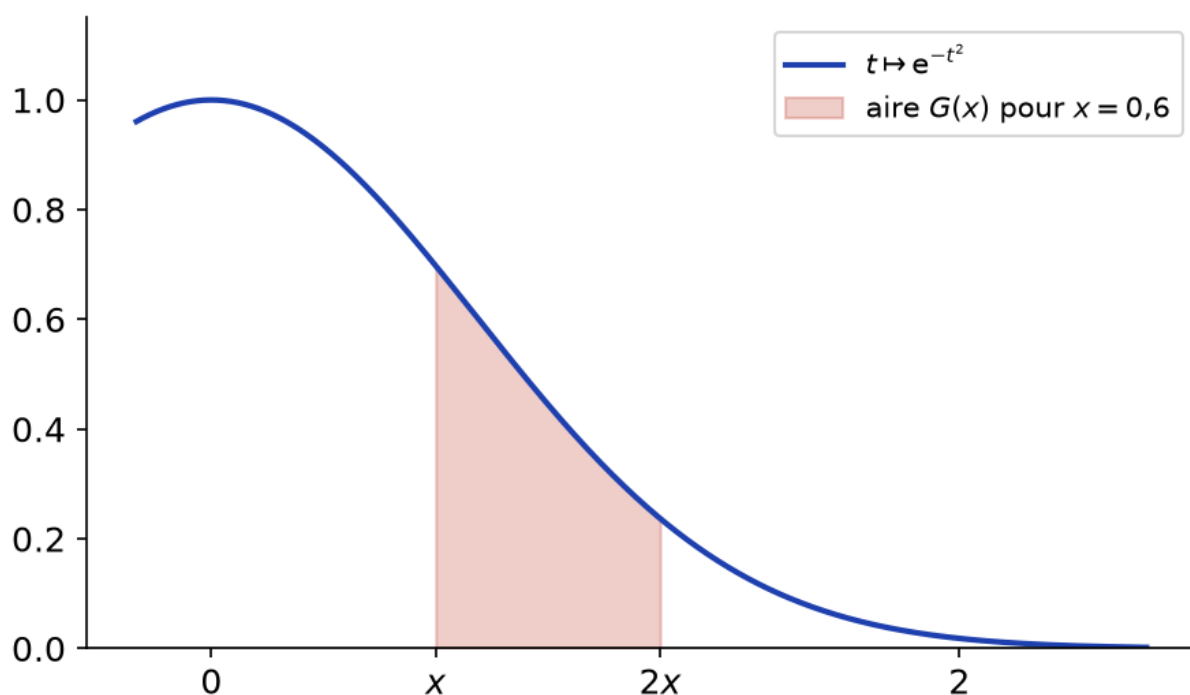
$$\left| n \left(\int_0^1 f - R_n \right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. En déduire que $n \left(\int_0^1 f - R_n \right) \rightarrow \frac{f(1) - f(0)}{2}$.

4. Application : on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$. Montrer que $S_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 12 : Dérivée d'une fonction définie par une intégrale

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \, dt$. La figure ci-dessous représente $G(x)$ comme une aire, pour $x > 0$.



1. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.
2. Étudier la parité de G .
3. Dresser le tableau de variations de G sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que $0 \leq G(x) \leq x e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$, et en déduire la limite de G en $+\infty$.

Exercice 13 : Étude complète d'une fonction intégrale

On considère $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

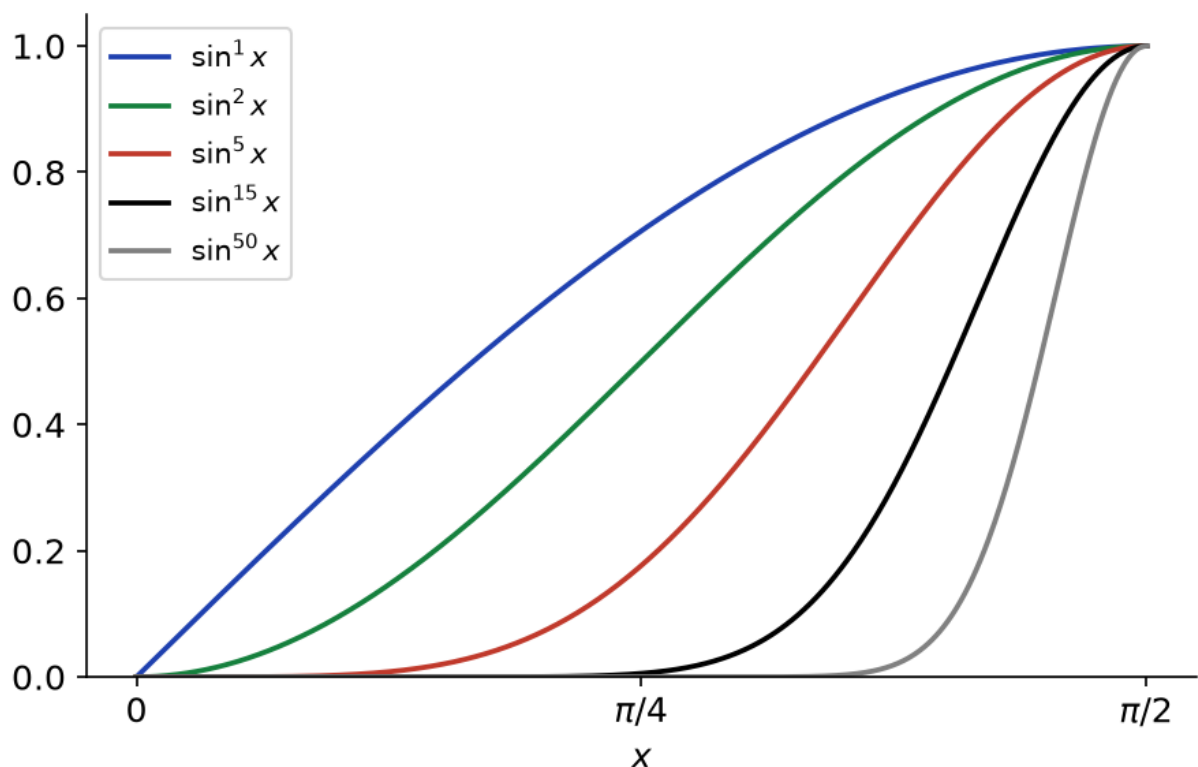
1. Montrer que F est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur cet ensemble et que $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.
3. Pour $x \neq 1$, écrire $\frac{1}{\ln t} = t \cdot \frac{1}{t \ln t}$ et appliquer la formule de la moyenne pour montrer que

$F(x) \rightarrow \ln 2$ quand $x \rightarrow 1$.

4. On prolonge F par $F(1) = \ln 2$. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner $F'(1)$.
5. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$, puis dresser son tableau de variations.

Exercice 14 : Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. La figure ci-dessous montre que $\sin^n x$ se concentre près de $\frac{\pi}{2}$ quand n grandit.



1. Calculer W_0 et W_1 . Montrer que (W_n) est strictement positive et décroissante.
2. Par une intégration par parties, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

3. Montrer que la suite $((n+1) W_{n+1} W_n)$ est constante et donner sa valeur.

4. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 15 : Une suite d'intégrales et $\ln 2$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer I_0 . Montrer que (I_n) est décroissante et positive, puis que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. En déduire que $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$, puis un équivalent de I_n .

4. Montrer que $\ln 2 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n I_n$, et en déduire la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 16 : Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $[a, b]$ un segment. On veut montrer que $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

1. On suppose f de classe C^1 . Par une intégration par parties, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

- On suppose f en escalier. Montrer le résultat en calculant $\int_c^d \sin(\lambda t) dt$.
- On suppose f continue. En approchant f par une fonction en escalier à ε près, montrer le résultat.

Exercice 17 : Formule de Taylor et exponentielle

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

- En déduire que $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ pour tout réel x .
- Montrer que $0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Quel rang n suffit pour approcher e à 10^{-3} près, sachant que $e < 3$?
- On suppose $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. En considérant $n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$ pour $n \geq \max(q, 2)$, aboutir à une contradiction.

Exercice 18 : Inégalités par la formule de Taylor

- Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- Montrer que, pour tout réel x : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
- En déduire un encadrement de $\ln(1,1)$ d'amplitude inférieure à 4×10^{-4} .

Exercice 19 : Taylor-Lagrange et valeurs approchées

1. Montrer que, pour tout réel x , $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$.
2. En déduire une valeur approchée de $\sin(0,1)$ et majorer l'erreur commise.
3. Montrer que, pour $x \geq 0$, $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
4. En déduire la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 20 : Problème : concentration d'intégrales et continuité uniforme

Dans tout le problème, f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et $|f| = \sup_{[0, 1]} |f|$.

Partie A. On pose $J_n = (n+1) \int_0^1 t^n f(t) dt$.

1. Calculer $(n+1) \int_0^1 t^n dt$ et en déduire que

$$J_n - f(1) = (n+1) \int_0^1 t^n (f(t) - f(1)) dt.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0, 1[$ tel que $|f(t) - f(1)| \leq \varepsilon$ pour $t \in [1 - \delta, 1]$. Montrer que $|J_n - f(1)| \leq 2|f|(1 - \delta)^{n+1} + \varepsilon$.
3. En déduire que $J_n \rightarrow f(1)$.
4. On suppose de plus f de classe C^1 . Retrouver ce résultat par une intégration par parties.

Partie B. On pose $K_n = \int_0^1 f(t^n) dt$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que $|f(u) - f(0)| \leq \varepsilon$ pour $u \in [0, \eta]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que $|K_n - f(0)| \leq \int_0^a |f(t^n) - f(0)| dt + 2|f|(1-a)$.
3. En choisissant d'abord a , puis n , montrer que $K_n \rightarrow f(0)$.

Partie C. Applications.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \int_0^1 t^n e^t dt$.
2. Retrouver l'équivalent $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \sim \frac{1}{2n}$ de l'exercice 15.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [intégration sur un segment, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Primitives et calcul intégral](#), [Dérivabilité et convexité](#)
- Chapitre précédent : [Groupe symétrique et déterminants](#)
- Chapitre suivant : [Séries numériques](#)
- Le même thème en L1 : [intégration sur un segment, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)