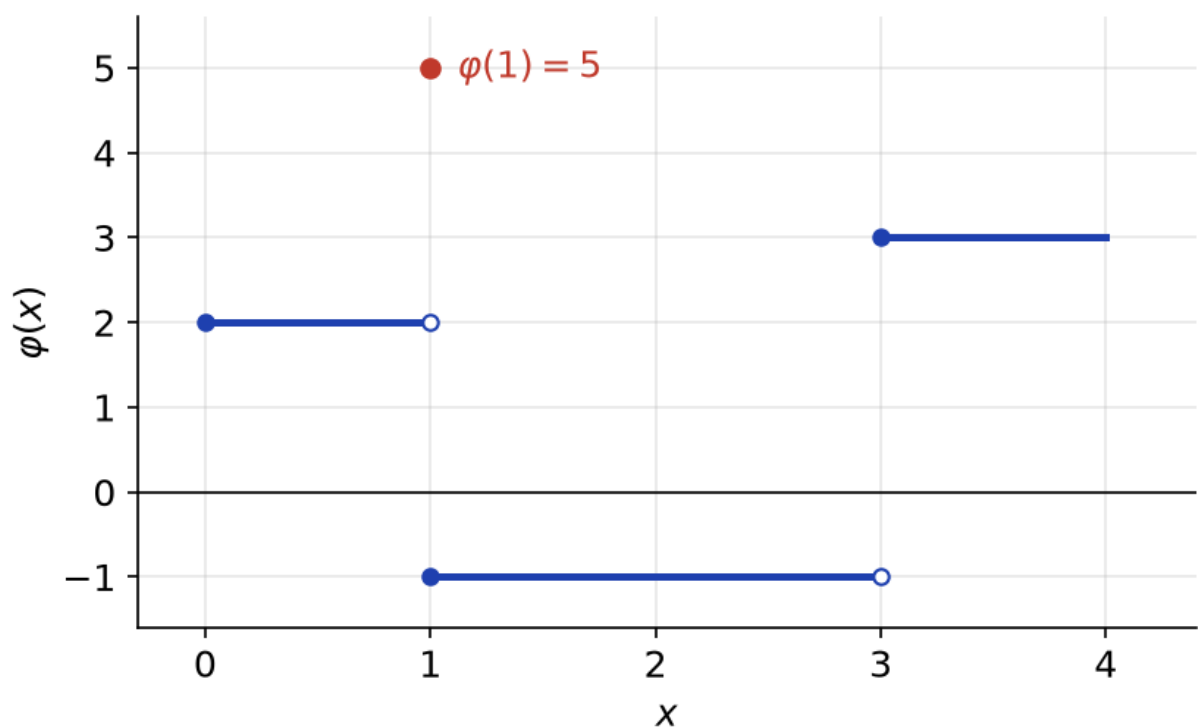


Intégration sur un segment

Exercice 1 : Intégrale d'une fonction en escalier

On définit φ sur $[0, 4]$ par $\varphi(x) = 2$ sur $[0, 1[$, $\varphi(1) = 5$, $\varphi(x) = -1$ sur $]1, 3[$ et $\varphi(x) = 3$ sur $[3, 4]$. La figure ci-dessous représente φ .



On note aussi ψ la fonction partie entière restreinte à $[0, 4]$: $\psi(x) = \lfloor x \rfloor$.

1. Justifier que φ est en escalier et donner une subdivision adaptée. La valeur $\varphi(1)$ joue-t-elle un rôle ?

2. Calculer $\int_0^4 \varphi$.

3. Donner une subdivision adaptée à la fois à φ et à ψ . Calculer $\int_0^4 \psi$, puis $\int_0^4 (\varphi + \psi)$ directement, et vérifier la linéarité.

4. Calculer $\int_0^4 |\varphi|$ et comparer avec $\left| \int_0^4 \varphi \right|$.

Exercice 2 : Intégrale de la fonction carré par encadrement

On note $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n-1$, on pose $\varphi_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ et $\psi_n(x) = \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$ pour $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, puis $\varphi_n(1) = \psi_n(1) = 1$. On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\int_0^1 \varphi_n$ et $\int_0^1 \psi_n$, puis $\int_0^1 (\psi_n - \varphi_n)$.

3. En déduire, sans utiliser de primitive, que f est intégrable sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Exercice 3 : Une fonction bornée non intégrable

- On note $f = 1_{\mathbb{Q}}$ sur $[0, 1]$: $f(x) = 1$ si x est rationnel, 0 sinon. Montrer que toute fonction en escalier $\varphi \leq f$ vérifie $\int_0^1 \varphi \leq 0$, et que toute fonction en escalier $\psi \geq f$ vérifie $\int_0^1 \psi \geq 1$. Conclure.
- On note g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = 1$ si $x = \frac{1}{n}$ pour un entier $n \geq 1$, et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que g est intégrable et que $\int_0^1 g = 0$.
- Les fonctions f et g diffèrent de la fonction nulle en une infinité de points. Quelle différence essentielle entre les ensembles concernés explique leur comportement opposé ?

Exercice 4 : Une fonction monotone discontinue

On définit f sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$. On admet que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

- Vérifier que f est bien définie sur $[0, 1]$, puis montrer qu'elle est croissante. En déduire qu'elle est intégrable.
- Montrer que f est discontinue en chaque point $\frac{1}{n}$ avec $n \geq 2$.

3. Pour $N \geq 1$, calculer $\int_{1/(N+1)}^1 f$ en fonction de $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ et de N .

4. Montrer que $0 \leq \int_0^{1/(N+1)} f \leq \frac{1}{(N+1)^2}$. En déduire la valeur de $\int_0^1 f$.

Exercice 5 : Intégrabilité de $\sin(1/x)$

On définit f sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, 1]$.

1. Montrer que f n'admet pas de limite en 0 . La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?
2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Justifier l'existence de deux fonctions en escalier $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ sur $[\varepsilon, 1]$ telles que $\int_{\varepsilon}^1 (\psi_1 - \varphi_1) \leq \varepsilon$.
3. En prolongeant ces fonctions à $[0, 1]$, montrer que f est intégrable sur $[0, 1]$.
4. Montrer que $\left| \int_0^1 f - \int_{\varepsilon}^1 f \right| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$.
5. Généraliser : montrer que toute fonction bornée sur $[a, b]$ et continue sur $]a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 6 : Relation de Chasles et valeurs absolues

Calculer les intégrales suivantes en découpant le segment avec la relation de Chasles.

1. $I = \int_0^3 \lfloor x \rfloor dx.$

2. $J = \int_{-1}^3 |x - 1| dx.$ Interpréter le résultat comme une somme d'aires de triangles.

$$3. \quad K = \int_0^2 x \lfloor x \rfloor dx.$$

$$4. \quad L = \int_3^0 \lfloor x \rfloor dx. \text{ Pourquoi ce résultat négatif ne contredit-il pas la positivité de l'intégrale ?}$$

Exercice 7 : Positivité et suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer I_0 .

2. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire sa limite.

4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^n I_n$, puis déterminer la limite de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 8 : Encadrement et inégalité de la moyenne

On pose $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$, intégrale qu'on ne sait pas calculer à l'aide des fonctions usuelles.

1. Justifier que I existe. Donner un premier encadrement de I par l'inégalité de la moyenne.

2. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t \leq e^t \leq 1 + (e - 1)t$.
3. En déduire que $\frac{4}{3} \leq I \leq \frac{e+2}{3}$.
4. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $I = e^{c^2}$, et encadrer c^2 .

Exercice 9 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$. Montrer que $\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$.
Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si f est constante.
2. Montrer que $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,
$$f(x)^2 \leq x \int_0^1 f'(t)^2 dt.$$
 En déduire que $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f')^2$.

Exercice 10 : Fonctions continues d'intégrale nulle

1. Soit g continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b g = 0$. Montrer que g s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
2. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
3. Donner une fonction h positive et intégrable sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle, mais non identiquement

nulle. Quelle hypothèse du cours fait défaut ?

4. Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f g = 0$ pour toute fonction g continue sur $[a, b]$.
Montrer que f est nulle.

Exercice 11 : Limites de sommes de Riemann

Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de chacune des suites suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$

2. $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k}.$

3. $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$

4. $V_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$

Exercice 12 : Sommes de Riemann et produits

1. Déterminer la limite de $u_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n}$. On calculera $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ par parties.

2. Déterminer la limite de $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{k/n}.$

3. Déterminer la limite de $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2}$.

Exercice 13 : Erreur de la méthode des rectangles

Pour f définie sur $[0, 1]$ et $n \geq 1$, on pose $R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et on note $M_1 = \sup_{[0,1]} |f'|$. Montrer que

$$\left| \int_0^1 f - R_n \right| \leq \frac{M_1}{2n}.$$

2. On suppose seulement f monotone. Montrer que $\left| \int_0^1 f - R_n \right| \leq \frac{|f(1) - f(0)|}{n}$.

3. On prend $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que $\sup_{[0,1]} |f'| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

4. Pour cette fonction, quel entier n chacune des deux majorations garantit-elle pour obtenir $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-3} près ?

Exercice 14 : Primitives usuelles

Calculer les intégrales suivantes en reconnaissant une primitive usuelle ou une forme $u' g(u)$.

1. $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$.

$$2. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx .$$

$$3. \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx .$$

$$4. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

$$5. \int_0^1 x e^{x^2} dx .$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx .$$

$$7. \text{ Déterminer une primitive de } x \rightarrow \frac{1}{x \ln x} \text{ sur }]1, +\infty[.$$

Exercice 15 : Intégrations par parties

Calculer à l'aide d'une ou deux intégrations par parties, en précisant les fonctions choisies.

$$1. \int_0^1 x e^x dx .$$

$$2. \int_1^e x \ln x dx .$$

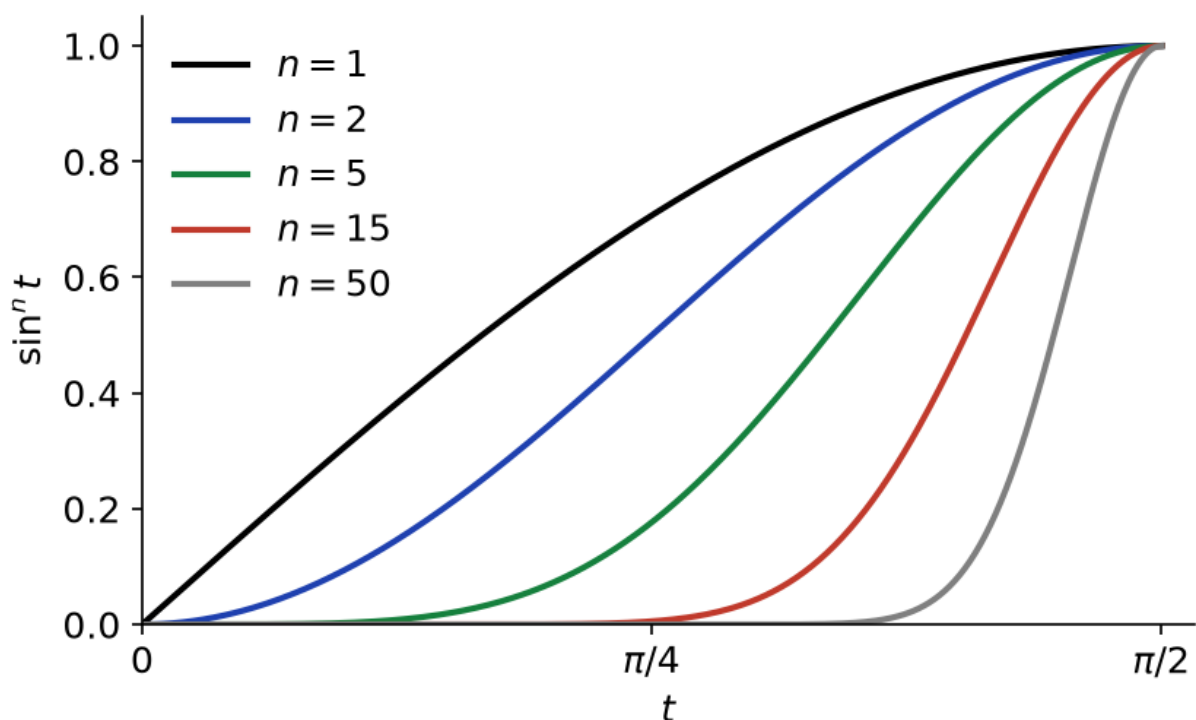
$$3. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx .$$

4. $\int_0^1 \arctan x \, dx$.

5. $\int_0^\pi e^x \sin x \, dx$.

Exercice 16 : Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$. La figure ci-dessous montre que $\sin^n$ se concentre près de $\frac{\pi}{2}$ quand n grandit.



1. Montrer que $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .

2. Montrer que $W_n > 0$ et que la suite (W_n) est décroissante.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
4. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, les expressions $W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$.
5. Montrer que la suite $((n+1) W_{n+1} W_n)$ est constante et donner sa valeur.
6. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 17 : Changements de variable

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué, en justifiant son emploi.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, avec $x = \sin t$.
2. $\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$, avec $t = \sqrt{x}$.
3. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$, avec $u = e^x$.
4. $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$, avec $u = x+1$.

Exercice 18 : Symétries et changement de variable

1. Soit $a > 0$ et f continue sur $[-a, a]$. Montrer que $\int_{-a}^a f = 0$ si f est impaire, et

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f \text{ si } f \text{ est paire. Calculer } \int_{-1}^1 (x^5 - 3x^2 + \sin x) dx.$$

2. Soit $T > 0$ et f continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. En dérivant $a \rightarrow \int_a^{a+T} f$, montrer que cette intégrale ne dépend pas de a .

3. Calculer $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ à l'aide du changement de variable $x = \pi - u$.

4. Calculer $K = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ à l'aide du changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$.

Exercice 19 : Fractions rationnelles

Calculer les intégrales suivantes après décomposition en éléments simples.

1. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}.$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$

3. $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} dx.$

4. $\int_0^1 \frac{x^3 + 2}{x + 1} dx.$

Exercice 20 : Pôle double et substitution tangente

1. Trouver trois réels α , β , γ tels que $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$. Calculer

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$ à l'aide du changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

3. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ à l'aide du changement de variable $x = \tan t$.

Exercice 21 : Fonctions définies par une intégrale

Pour $x > 1$, on pose $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Justifier que F est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$, et montrer que $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. En déduire le sens de variation de F .

2. Calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$ pour $x > 1$.

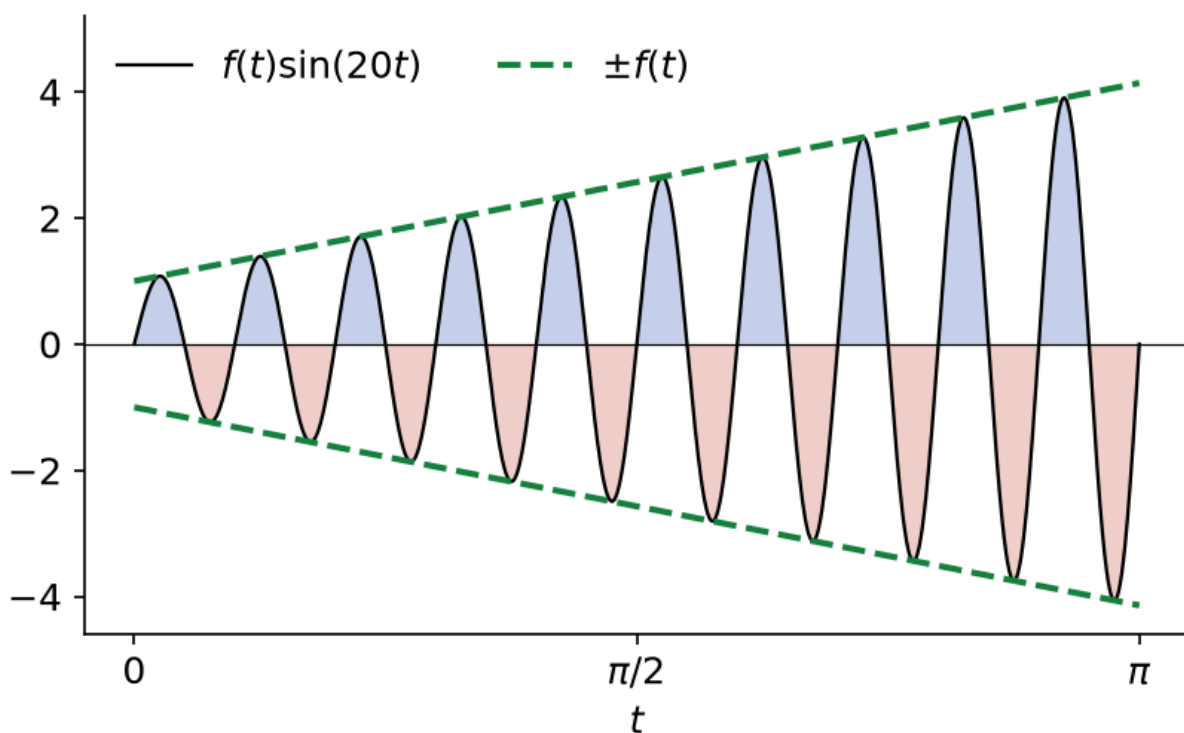
3. En déduire que $x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$ pour tout $x > 1$. Déterminer les limites de F en 1 et en $+\infty$.

4. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $G(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt$. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer G' et G'' .

Exercice 22 : Lemme de Riemann-Lebesgue

Pour f intégrable sur $[a, b]$, on pose $I_n(f) = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ et

$J_n(f) = \int_a^b f(t) \cos(nt) dt$. On veut montrer que ces deux suites tendent vers 0. La figure ci-dessous illustre l'idée : les arches positives et négatives se compensent de mieux en mieux.



1. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$|I_n(f)| \leq \frac{1}{n} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'| \right)$ pour $n \geq 1$. On admet le même résultat pour $J_n(f)$.

2. On suppose f en escalier. Montrer que $I_n(f) \rightarrow 0$.

3. On suppose seulement f intégrable. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \leq f \leq \psi$ en escalier avec $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Montrer que $|I_n(f) - I_n(\varphi)| \leq \varepsilon$, puis que $I_n(f) \rightarrow 0$.

4. Application : déterminer la limite de $\int_0^\pi e^t \sin^2(nt) dt$.

Exercice 23 : Problème : la constante d'Euler

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$ pour tout $n \geq 1$, puis que $H_n \sim \ln n$.

3. Montrer que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note γ leur limite commune. Montrer que $\frac{3}{2} - \ln 3 \leq \gamma \leq \frac{3}{2} - \ln 2$.

5. Montrer que $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$. Quel rang suffit pour connaître γ à 10^{-2} près ?

6. Exprimer $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ à l'aide de u_{2n} et u_n , et retrouver sa limite. Comparer avec l'exercice 11.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [intégration sur un segment, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#), [Fonctions usuelles et fonctions réciproques](#), [Polynômes et fractions rationnelles](#)
- Chapitre précédent : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Chapitre suivant : [Équations différentielles linéaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)