

Intégration sur un segment

I. Continuité uniforme et théorème de Heine

Au premier semestre, vous avez calculé des intégrales à l'aide de primitives. Ce chapitre donne enfin une définition rigoureuse de l'intégrale. Or cette construction repose sur une propriété plus forte que la continuité : la continuité uniforme. C'est pourquoi on commence par elle.

1. Définition

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \\ &\exists \delta > 0, \\ &\forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La différence avec la continuité tient à l'ordre des quantificateurs. En effet, pour la continuité en chaque point x , le réel δ peut dépendre de x . En revanche, ici, un même δ convient sur tout l'intervalle. Ainsi, une fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse.

Exemple :

Toute fonction k -lipschitzienne est uniformément continue : il suffit de prendre $\delta = \varepsilon / k$. Par

exemple, $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En revanche, $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$, on a $x_n - y_n \rightarrow 0$, alors que $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$.

Remarque :

Pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue, on cherche deux suites (x_n) et (y_n) telles que $x_n - y_n \rightarrow 0$ sans que $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$. C'est la négation séquentielle de la définition.

2. Le théorème de Heine

Théorème :

Théorème de Heine. Toute fonction continue sur un **segment** $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, on trouve $x_n, y_n \in [a, b]$ avec $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. La suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel ℓ . De plus, $\ell \in [a, b]$ car le segment est fermé. Ensuite, $y_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$ aussi, puisque $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$. Par continuité de f en ℓ , la différence $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})$ tend donc vers 0. Cela contredit l'inégalité $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$.

L'hypothèse de segment est essentielle. Par exemple, $x \rightarrow \sin(1/x)$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'y

est pas uniformément continue. De même, $x \rightarrow x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas borné.

II. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

1. Subdivisions et fonctions en escalier

Définition :

Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Son **pas** est $\max_k (x_{k+1} - x_k)$. Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **en escalier** s'il existe une subdivision σ telle que φ soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$. On dit alors que σ est adaptée à φ .

Les valeurs de φ aux points x_k sont quelconques. Si φ vaut c_k sur $]x_k, x_{k+1}[$, on pose :

$$\int_{[a, b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Ce nombre ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie. En effet, deux subdivisions adaptées ont une subdivision commune plus fine, qui donne la même somme. De plus, il ne dépend pas des valeurs de φ aux points de la subdivision.

2. Fonctions continues par morceaux

Définition :

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ telle que, pour tout k , la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ soit continue et prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Autrement dit, f n'a qu'un nombre fini de discontinuités, et elle admet en chacune une limite finie à gauche et à droite. Ainsi, la partie entière est continue par morceaux sur tout segment. En revanche, la fonction $x \rightarrow 1/x$ prolongée par 0 en 0 ne l'est pas sur $[0, 1]$, car elle n'a pas de limite finie en 0^+ .

Théorème :

Approximation par des fonctions en escalier. Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Démonstration :

Traitons le cas où f est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Heine, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ entraîne $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Prenons alors une subdivision de pas inférieur à δ . Sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction continue f atteint un minimum m_k et un maximum M_k , et l'on a $M_k - m_k \leq \varepsilon$. On pose $\varphi = m_k$ et $\psi = M_k$ sur $[x_k, x_{k+1}[$. Enfin, le cas continu par morceaux s'obtient en appliquant ce résultat sur chaque morceau prolongé.

La figure ci-dessous illustre cette construction : la fonction continue f est coincée entre deux fonctions en escalier φ et ψ . La zone verte, entre les deux, a une aire d'autant plus petite que la subdivision est fine.



3. Définition de l'intégrale

Définition :

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. On note $I^-(f)$ la borne supérieure des $\int \varphi$ pour φ en escalier avec $\varphi \leq f$, et $I^+(f)$ la borne inférieure des $\int \psi$ pour ψ en escalier avec $\psi \geq f$. Ces deux nombres sont égaux. Leur valeur commune est l'**intégrale** de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f(t) dt$.

En effet, on a toujours $I^-(f) \leq I^+(f)$. De plus, le théorème d'approximation donne $I^+(f) - I^-(f) \leq \int (\psi - \varphi) \leq \epsilon (b - a)$ pour tout $\epsilon > 0$. Pour une fonction à valeurs complexes, on pose enfin $\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$. On convient aussi que

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Exemple :

Calculons $\int_0^1 t \, dt$ sans primitive. Avec la subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$, les fonctions en escalier $\varphi_n = \frac{k}{n}$ et $\psi_n = \frac{k+1}{n}$ sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ encadrent $t \rightarrow t$. Or $\int \varphi_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n-1}{2n}$ et $\int \psi_n = \frac{n+1}{2n}$. Ces deux nombres tendent vers $\frac{1}{2}$, donc l'intégrale vaut $\frac{1}{2}$.

III. Propriétés de l'intégrale

1. Linéarité, positivité, croissance, Chasles

Propriété :

Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- **Positivité** : si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Croissance** : si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

- **Relation de Chasles** : pour tout c , $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, les bornes étant dans l'ordre que l'on veut.

Ces règles se démontrent d'abord pour les fonctions en escalier, puis passent aux fonctions continues par morceaux par encadrement. Attention toutefois à l'ordre des bornes : la positivité exige $a \leq b$.

2. Inégalité triangulaire

Théorème :

Inégalité triangulaire intégrale. Si $a \leq b$ et f est continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes, alors

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt \leq (b - a) \sup_{[a, b]} |f|.$$

Démonstration :

Dans le cas réel, on a $-|f| \leq f \leq |f|$. Par croissance, on obtient $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$.

Dans le cas complexe, on écrit $\int f = r e^{i\theta}$ avec $r \geq 0$. Alors

$$r = \int e^{-i\theta} f = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f), \text{ car ce nombre est réel. Or } \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq |f|, \text{ donc } r \leq \int |f|. \text{ La seconde inégalité vient de la croissance, avec } |f| \leq \sup |f|.$$

Méthode :

Majorer une intégrale. On passe d'abord au module avec l'inégalité triangulaire. Ensuite, on majore la fonction $|f|$ par une fonction plus simple dont on connaît l'intégrale. Par exemple, pour

$t \in [0, 1]$, on a $\left| \frac{t^n \cos(nt)}{1+t^2} \right| \leq t^n$, donc

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n \cos(nt)}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} [t^{n+1}]_0^1 \rightarrow +\infty] 0.$$

3. Fonction continue positive d'intégrale nulle

Théorème :

Soit f **continue** et **positive** sur $[a, b]$, avec $a < b$. Si $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité, il existe un segment $[c, d] \subset [a, b]$ contenant x_0 , avec $c < d$, sur lequel $f \geq \frac{f(x_0)}{2}$. Par Chasles et positivité, on obtient alors $\int_a^b f \geq \int_c^d f \geq (d-c) \frac{f(x_0)}{2} > 0$. C'est une contradiction.

Attention :

Les trois hypothèses comptent. D'abord, la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs est positive, continue par morceaux, d'intégrale nulle, mais non nulle. Ensuite, sans positivité,

$$\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0 \text{ alors que } \sin \text{ n'est pas nulle.}$$

Ce résultat sert souvent sous la forme suivante : si f est continue et $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f = 0$. On

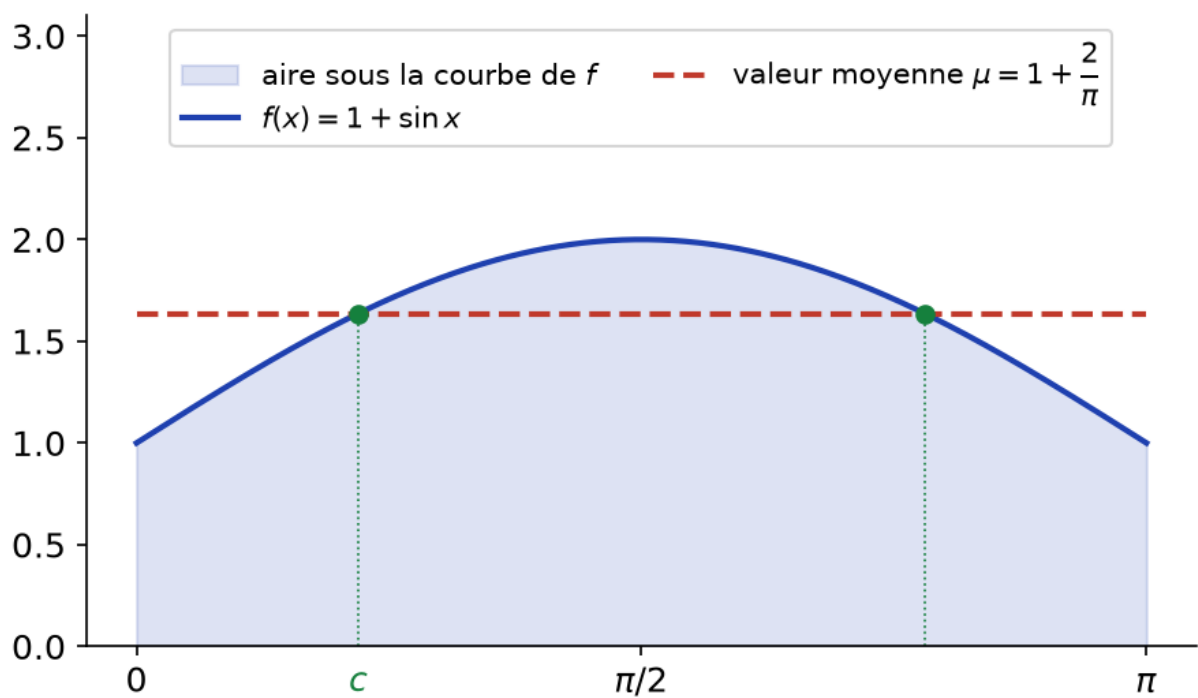
l'utilise aussi par contraposée : une fonction continue, positive et non identiquement nulle a une intégrale strictement positive.

IV. Valeur moyenne, parité et périodicité

Définition :

Si $a < b$, la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$.

Pour f positive, le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous la courbe. Si de plus f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires fournit un point c tel que $f(c) = \mu$. En effet, $\min f \leq \mu \leq \max f$ par croissance de l'intégrale. La figure ci-dessous le montre pour $f(x) = 1 + \sin x$ sur $[0, \pi]$, dont la valeur moyenne vaut $1 + \frac{2}{\pi}$.



Proposition :

Soit f continue par morceaux sur $[-a, a]$.

- Si f est **paire**, alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
- Si f est **impaire**, alors $\int_{-a}^a f = 0$.

Si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T -**périodique**, alors $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ pour tout réel a .

Démonstration :

Pour la parité, le changement de variable $t = -u$ donne $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(-u) du$. Il

reste à ajouter $\int_0^a f$. Pour la périodicité, supposons d'abord f continue. La fonction

$\Phi(a) = \int_a^{a+T} f$ est alors dérivable, de dérivée $f(a+T) - f(a) = 0$. Donc Φ est

constante, égale à $\Phi(0)$. Le cas continu par morceaux se traite avec Chasles et le changement de variable $t = u + T$.

Exemple :

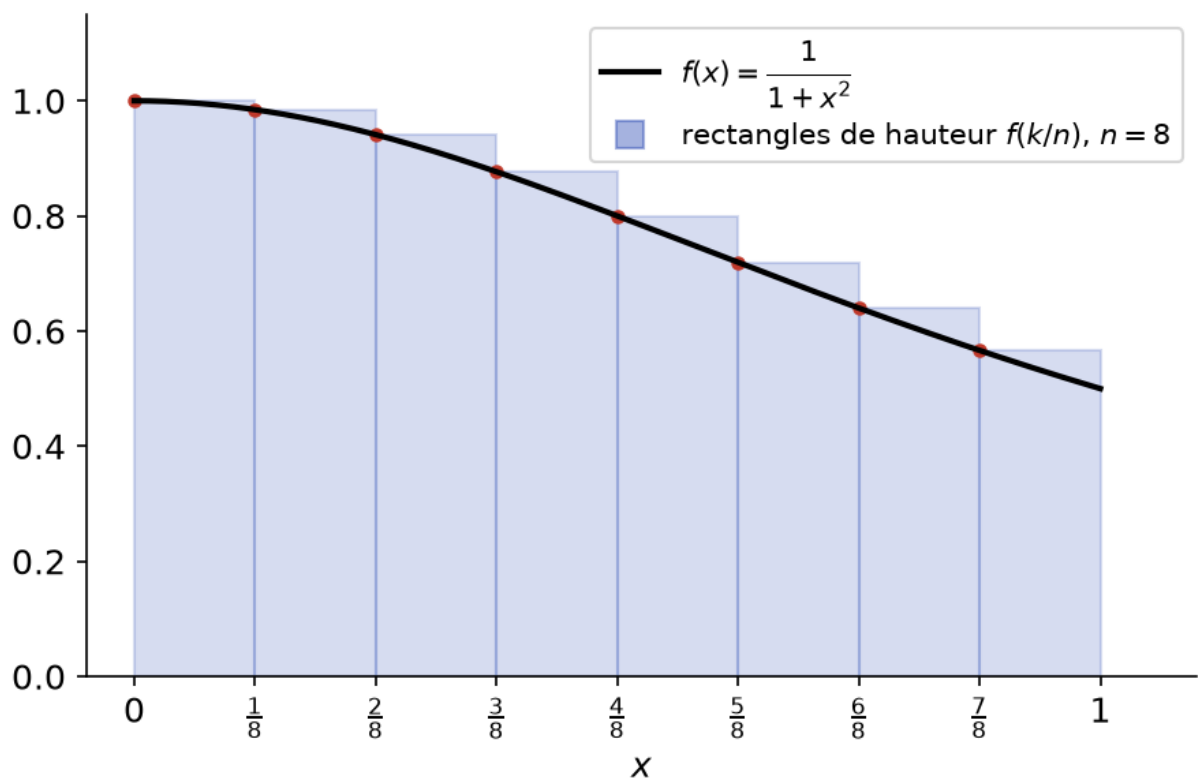
La fonction $|\sin|$ est π -périodique. Par conséquent, $\int_0^{10\pi} |\sin t| dt = 10 \int_0^{\pi} \sin t dt = 20$.

Sa valeur moyenne sur une période vaut donc $\frac{2}{\pi}$.

V. Sommes de Riemann

Découpons $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$, et posons $x_k = a + kh$. On remplace alors l'aire sous la courbe par celle de rectangles, comme le montre la figure ci-dessous pour

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$.



Théorème :

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t) dt.$$

Le résultat reste vrai avec la somme de $k = 1$ à n .

Démonstration :

Traitons le cas où f est continue. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit n tel que $h \leq \delta$. Par Chasles, on écrit

$$\int_a^b f - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt.$$

Pour $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a $|t - x_k| \leq \delta$, donc $|f(t) - f(x_k)| \leq \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient $\left| \int_a^b f - R_n(f) \right| \leq n h \varepsilon = (b - a)\varepsilon$.

Méthode :

Calculer la limite d'une somme de Riemann. On factorise la somme pour faire apparaître $\frac{1}{n} \sum f\left(\frac{k}{n}\right)$. Ensuite, on identifie la fonction f et l'intervalle, en général $[0, 1]$. Enfin, on conclut par la limite $\int_0^1 f$. Pour un produit, on passe d'abord au logarithme.

Exemple :

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$. On factorise par n^2 au dénominateur :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} \left[n \rightarrow +\infty \right] \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} =, \\ \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, si f est de classe C^1 et $M_1 = \sup |f'|$, l'inégalité des accroissements finis donne une

vitesse : $\left| \int_a^b f - R_n(f) \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$. L'erreur de la méthode des rectangles est donc en $O(1/n)$.

VI. Fonction définie par une intégrale

On fixe f continue sur un intervalle I et $a \in I$. On étudie la fonction $F: x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$, dont la borne supérieure varie. C'est le lien entre intégrale et primitive.

Théorème :

Théorème fondamental de l'analyse. Si f est continue sur I , la fonction

$F: x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur I , et $F' = f$. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

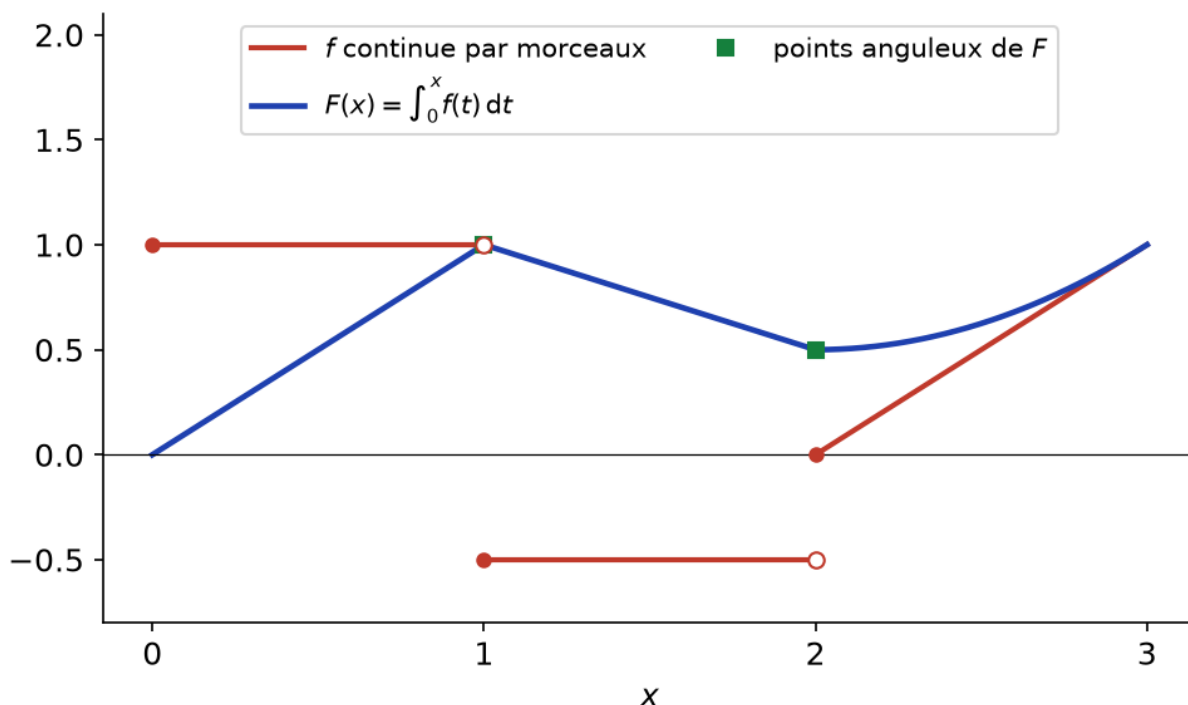
Démonstration :

Soit $x_0 \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$. Par Chasles, on a

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + h} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ dès que $|t - x_0| \leq \delta$. Pour $|h| \leq \delta$, l'inégalité triangulaire majore donc le membre de droite par ε . Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Si f est seulement continue par morceaux, F reste continue, et même lipschitzienne sur tout segment. Cependant, elle n'est plus dérivable aux sauts de f , comme le montre la figure ci-dessous. Aux points de continuité de f , on a encore $F' = f$.



Corollaire :

Soient f continue sur I , et u, v dérivables sur J à valeurs dans I . Alors

$G : x \rightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J , et

$$G'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

Méthode :

Étudier une fonction définie par une intégrale. D'abord, on détermine l'ensemble de définition : le segment d'intégration doit rester dans un intervalle où l'intégrande est continue. Ensuite, on

introduit une primitive Φ de l'intégrande et l'on écrit $G(x) = \Phi(v(x)) - \Phi(u(x))$. On dérive alors par composition. Enfin, pour les limites, on encadre l'intégrande sur le segment d'intégration.

Exemple :

Soit $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc G est dérivable et $G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$. Pour $x > 0$, la décroissance de l'intégrande sur $[x, 2x]$ donne $0 \leq G(x) \leq x e^{-x^2}$. Par encadrement, $G(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

VII. Formules de Taylor globales

Les développements limités décrivent une fonction au voisinage d'un point. Les formules de Taylor globales, au contraire, contrôlent l'erreur sur tout un intervalle. Elles fournissent ainsi des inégalités valables partout.

Théorème :

Formule de Taylor avec reste intégral. Soit f de classe C^{n+1} sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $a, x \in I$. Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la formule s'écrit $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$

: c'est le théorème fondamental. Supposons-la vraie au rang $n - 1$ pour une fonction de classe C^{n+1} . On intègre alors le reste par parties, en dérivant $f^{(n)}$ et en intégrant

$$t \rightarrow \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ en } t \rightarrow -\frac{(x-t)^n}{n!} :$$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

En reportant, on obtient la formule au rang n .

Corollaire :

Inégalité de Taylor-Lagrange. Si f est de classe C^{n+1} sur I et si $|f^{(n+1)}| \leq M_{n+1}$ sur I , alors pour tous $a, x \in I$:

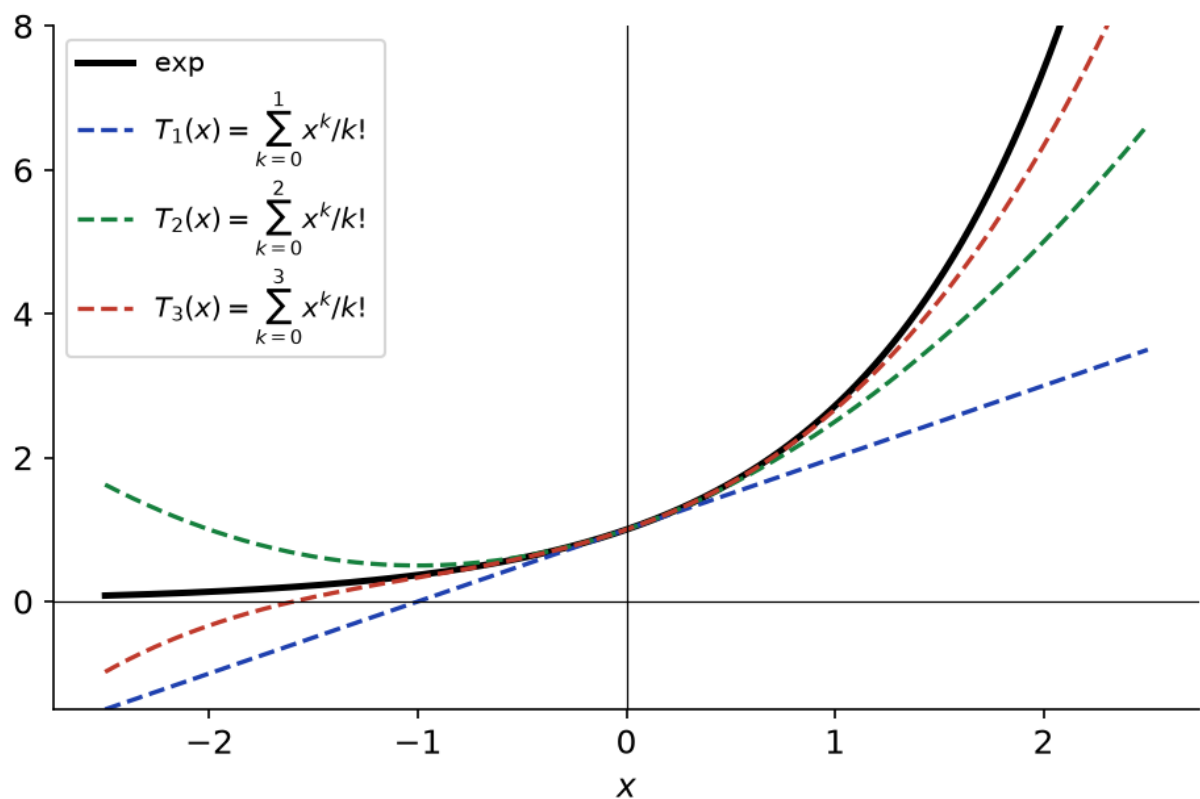
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En effet, il suffit de majorer le reste intégral par l'inégalité triangulaire, puisque

$$\left| \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La figure ci-dessous montre l'exponentielle et ses polynômes de

Taylor en 0 : l'approximation est excellente près de 0 , puis se dégrade quand $|x|$ grandit.



Exemple :

Pour tout réel x , la formule avec reste intégral à l'ordre 1 donne

$$\cos x = 1 - \int_0^x (x-t) \cos t \, dt. \text{ Pour } x \geq 0, \text{ on a } (x-t)\cos t \leq x-t \text{ sur } [0, x].$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Par parité, cette inégalité vaut sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Le reste intégral est plus précis que l'inégalité de Taylor-Lagrange. En particulier, quand $f^{(n+1)}$ garde un signe constant, il donne le **signe de l'erreur**, donc une inégalité sans valeur absolue. C'est la méthode de choix pour démontrer des inégalités comme $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ce qu'il faut retenir

- Une fonction continue sur un segment est uniformément continue : c'est le théorème de Heine, clé de toute la construction.
- Une fonction continue par morceaux est encadrée d'aussi près que l'on veut par deux fonctions en escalier, ce qui définit son intégrale.
- L'intégrale est linéaire, croissante pour des bornes dans l'ordre, et vérifie la relation de Chasles.

- L'inégalité triangulaire $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \sup |f|$ est l'outil de base pour majorer.

- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment est nulle ; la continuité et la positivité sont indispensables.
- Parité et périodicité simplifient les calculs ; la valeur moyenne d'une fonction continue est atteinte.

- Les sommes de Riemann $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ tendent vers $\int_0^1 f$; c'est l'outil pour les limites de sommes.

- Si f est continue, $x \rightarrow \int_a^x f$ est la primitive de f nulle en a ; on dérive $\int_{u(x)}^{v(x)} f$ par composition.

- La formule de Taylor avec reste intégral donne des inégalités globales ; l'inégalité de Taylor-Lagrange en découle.

Questions fréquentes sur intégration sur un segment

Pourquoi a-t-on besoin du théorème de Heine pour définir l'intégrale ?

La construction encadre la fonction par deux fonctions en escalier dont l'écart est au plus ϵ . Pour une

fonction continue, il faut un même pas de subdivision qui marche sur tout le segment : c'est exactement la continuité uniforme. Le théorème de Heine la garantit sur un segment.

Une fonction positive d'intégrale nulle est-elle toujours nulle ?

Non, il faut aussi la continuité. Une fonction qui vaut 1 en un point et 0 ailleurs est positive, continue par morceaux et d'intégrale nulle. En revanche, une fonction continue et positive d'intégrale nulle sur un segment non réduit à un point est nulle.

Comment reconnaître une somme de Riemann ?

On cherche à écrire la somme sous la forme $(1/n) \sum f(k/n)$, avec k de 0 à $n-1$ ou de 1 à n . Il faut souvent factoriser par une puissance de n . La limite vaut alors l'intégrale de f sur $[0, 1]$. Pour un produit, on passe d'abord au logarithme.

Quand préférer le reste intégral à l'inégalité de Taylor-Lagrange ?

Le reste intégral est une égalité : si la dérivée d'ordre $n+1$ garde un signe constant, il donne le signe de l'erreur et donc une inégalité sans valeur absolue. L'inégalité de Taylor-Lagrange ne donne qu'une majoration de l'erreur en valeur absolue, suffisante pour des valeurs approchées.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur intégration sur un segment](#)
- À maîtriser avant : [Primitives et calcul intégral](#), [Dérivabilité et convexité](#)
- Chapitre précédent : [Groupe symétrique et déterminants](#)
- Chapitre suivant : [Séries numériques](#)
- Le même thème en L1 : [intégration sur un segment, cours de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)