

Intégration sur un segment

Corrigé de l'exercice 1 : Intégrale d'une fonction en escalier

1. La subdivision $(0, 1, 3, 4)$ de $[0, 4]$ convient. En effet, φ vaut 2 sur $]0, 1[$, -1 sur $]1, 3[$ et 3 sur $]3, 4[$. Donc φ est en escalier. La valeur $\varphi(1) = 5$ est prise en un point de la subdivision : **elle ne joue aucun rôle dans l'intégrale.**

2. Par définition, $\int_0^4 \varphi = 2 \times (1 - 0) + (-1) \times (3 - 1) + 3 \times (4 - 3) = 2 - 2 + 3$. Ainsi

$$\int_0^4 \varphi = 3.$$

3. La fonction ψ est constante sur chaque intervalle $]k, k+1[$, donc $(0, 1, 2, 3, 4)$ lui est adaptée. Cette subdivision est plus fine que $(0, 1, 3, 4)$, donc elle est aussi adaptée à φ . On

obtient $\int_0^4 \psi = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$. Ensuite, $\varphi + \psi$ vaut 2 , 0 , 1 et 6 sur les quatre

intervalles ouverts successifs. Par conséquent $\int_0^4 (\varphi + \psi) = 2 + 0 + 1 + 6 = 9$. On vérifie

bien que $\int_0^4 (\varphi + \psi) = 9 = 3 + 6$.

4. La fonction $|\varphi|$ vaut 2 , 1 et 3 sur $]0, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, 4[$. Donc

$$\int_0^4 |\varphi| = 2 + 2 + 3 = 7. \text{ On a bien } \left| \int_0^4 \varphi \right| = 3 \leq 7 = \int_0^4 |\varphi| : \text{l'inégalité est stricte,}$$

car φ change de signe.

Corrigé de l'exercice 2 : Intégrale de la fonction carré par encadrement

1. Soit $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Comme $x \geq 0$ et que la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, on a $\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$. En $x = 1$, les trois valeurs valent 1. Donc $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[0, 1]$.

2. Les deux fonctions sont en escalier, adaptées à la subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$. D'une part,

$$\int_0^1 \varphi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \psi_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

La différence ne garde que le terme $k = n$: $\int_0^1 (\psi_n - \varphi_n) = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1/\varepsilon$. Alors $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et $\int_0^1 (\psi_n - \varphi_n) \leq \varepsilon$. D'après le critère d'intégrabilité, f est intégrable. De plus, $\int_0^1 \varphi_n \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 \psi_n$ pour tout n . Or les deux bornes tendent vers $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, car leur numérateur équivaut à $2n^3$. Par encadrement,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Point de méthode : pour une fonction monotone, les valeurs aux bords gauche et droit de chaque intervalle fournissent directement une minorante et une majorante en escalier.

Corrigé de l'exercice 3 : Une fonction bornée non intégrable

1. Soit $\varphi \leq f$ en escalier, adaptée à $(x_0, \dots, x_n)$, de valeur c_k sur $]x_{k-1}, x_k[$. Cet intervalle ouvert non vide contient un irrationnel y , car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense. Donc

$$c_k = \varphi(y) \leq f(y) = 0. \text{ Par suite } \int_0^1 \varphi = \sum c_k (x_k - x_{k-1}) \leq 0. \text{ De même, si}$$

$\psi \geq f$, chaque intervalle ouvert contient un rationnel r , donc la valeur de ψ y est au moins

$$f(r) = 1. \text{ Ainsi } \int_0^1 \psi \geq \sum (x_k - x_{k-1}) = 1. \text{ On en déduit}$$

$$I^-(f) \leq 0 < 1 \leq I^+(f) : 1_{\mathbb{Q}} \text{ n'est pas intégrable sur } [0, 1].$$

2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. L'ensemble des points $\frac{1}{n}$ situés dans $]\varepsilon, 1]$ est fini, car il correspond aux entiers $n < \frac{1}{\varepsilon}$. Définissons $\psi = 1$ sur $[0, \varepsilon]$ et $\psi = g$ sur $]\varepsilon, 1]$. Sur $]\varepsilon, 1]$, la fonction ψ est nulle sauf en un nombre fini de points : elle est donc en escalier sur $[0, 1]$. On a

$$0 \leq g \leq \psi, \text{ et } \int_0^1 \psi = \varepsilon. \text{ La fonction nulle est une minorante en escalier d'intégrale } 0.$$

$$\text{Donc } 0 \leq I^-(g) \leq I^+(g) \leq \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon. \text{ Ainsi } g \text{ est intégrable et } \int_0^1 g = 0.$$

3. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dense : il rencontre tout intervalle, et aucune fonction en escalier ne peut l'ignorer. Au contraire, les points $\frac{1}{n}$ ne s'accumulent qu'en 0. En dehors d'un petit intervalle autour de 0, il n'y en a qu'un nombre fini, et **un nombre fini de points ne change pas une intégrale.**

Corrigé de l'exercice 4 : Une fonction monotone discontinue

1. Soit $x \in]0, 1]$ et $n = \lfloor 1/x \rfloor \geq 1$. Alors $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, c'est-à-dire $x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$. Cet entier est unique, donc f est bien définie. Soit maintenant $0 < x < y \leq 1$, avec x dans l'intervalle d'indice m et y dans celui d'indice n . Comme $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, on a $m = \lfloor 1/x \rfloor \geq \lfloor 1/y \rfloor = n$, donc $f(x) = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} = f(y)$. Enfin $f(0) = 0 \leq f(y)$. Ainsi f est croissante. D'après le théorème sur les fonctions monotones,

f est intégrable sur $[0, 1]$.

2. Soit $n \geq 2$. On a $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Pour $x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$, on a $f(x) = \frac{1}{n-1}$. Donc la limite à droite en $\frac{1}{n}$ vaut $\frac{1}{n-1} \neq \frac{1}{n}$. Par conséquent, f est discontinue en chaque $\frac{1}{n}$, $n \geq 2$: elle a une infinité de discontinuités.

3. Sur $\left[\frac{1}{N+1}, 1\right]$, la fonction f est en escalier, adaptée à la subdivision formée des points $\frac{1}{n}$, $1 \leq n \leq N+1$. D'où

$$\int_{1/(N+1)}^1 f = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

La seconde somme est télescopique. Ainsi $\int_{1/(N+1)}^1 f = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{N+1}$.

4. Sur $\left[0, \frac{1}{N+1}\right]$, la croissance donne $0 = f(0) \leq f \leq f\left(\frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{N+1}$. Par positivité et

inégalité de la moyenne, $0 \leq \int_0^{1/(N+1)} f \leq \frac{1}{(N+1)^2}$. Par Chasles,

$$\int_0^1 f = \int_0^{1/(N+1)} f + \int_{1/(N+1)}^1 f. \text{ Faisons tendre } N \text{ vers } +\infty : \text{ le premier terme tend}$$

vers 0 et le second vers $\frac{\pi^2}{6} - 1$. Donc $\int_0^1 f = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,645$.

Corrigé de l'exercice 5 : Intégrabilité de $\sin(1/x)$

1. Posons $x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$. Ces deux suites tendent vers 0, mais $f(x_n) = 1$ et $f(y_n) = 0$. Si f avait une limite ℓ en 0, on aurait $\ell = 1$ et $\ell = 0$. Donc f n'a pas de limite en 0. En particulier, elle n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, car une telle fonction a une limite finie à droite en 0.

2. Sur le segment $[\varepsilon, 1]$, la fonction f est continue, comme composée de fonctions continues. D'après le cours, elle y est intégrable. Le critère d'intégrabilité fournit donc **deux fonctions en**

escalier $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ sur $[\varepsilon, 1]$ avec $\int_{\varepsilon}^1 (\psi_1 - \varphi_1) \leq \varepsilon$.

3. Posons $\varphi = -1$ et $\psi = 1$ sur $[0, \varepsilon[$, puis $\varphi = \varphi_1$ et $\psi = \psi_1$ sur $[\varepsilon, 1]$. Ce sont des fonctions en escalier sur $[0, 1]$. Comme $|f| \leq 1$, on a $\varphi \leq f \leq \psi$. De plus, par Chasles,

$$\int_0^1 (\psi - \varphi) = 2\varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 (\psi_1 - \varphi_1) \leq 3\varepsilon.$$

Le réel ε étant arbitraire, f **est intégrable sur** $[0, 1]$.

4. Par Chasles, $\int_0^1 f - \int_{\varepsilon}^1 f = \int_0^{\varepsilon} f$. Or $|f| \leq 1$, donc l'inégalité de la moyenne donne

$$\left| \int_0^{\varepsilon} f \right| \leq \varepsilon.$$

5. Soit f bornée par M sur $[a, b]$ et continue sur $]a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta \in]0, b-a[$ tel que $2M\eta \leq \varepsilon$. Sur $[a+\eta, b]$, f est continue, donc il existe $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ en escalier

avec $\int_{a+\eta}^b (\psi_1 - \varphi_1) \leq \varepsilon$. On prolonge par $-M$ et M sur $[a, a+\eta[$. On obtient un

encadrement de f avec $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq 2M\eta + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. Donc f **est intégrable sur** $[a, b]$.

Point de méthode : un « mauvais point » isolé se neutralise en l'enfermant dans un intervalle de longueur η , sur lequel on encadre grossièrement par $\pm M$.

Corrigé de l'exercice 6 : Relation de Chasles et valeurs

absolues

1. La fonction partie entière est en escalier sur $[0, 3]$, de valeurs $0, 1, 2$ sur $]0, 1[$, $]1, 2[$, $]2, 3[$. Par Chasles, $I = 0 + 1 + 2$, soit $I = 3$.

2. La fonction est continue, donc intégrable. On coupe en 1 , où $x - 1$ change de signe :

$$J = \int_{-1}^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3.$$

Le premier crochet vaut $\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 2$, le second $\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$. Donc $J = 4$.

Géométriquement, ce sont deux triangles rectangles isocèles de côtés $\sqrt{2}$, d'aire 2 chacun.

3. Sur $[0, 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$; sur $[1, 2[$, $\lfloor x \rfloor = 1$. Les valeurs en un point ne comptent pas.

$$\text{Ainsi } K = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2, \text{ d'où } K = \frac{3}{2}.$$

4. Par convention, $L = -\int_0^3 \lfloor x \rfloor dx = -I$, donc $L = -3$. Cela ne contredit pas la positivité : celle-ci suppose les bornes dans l'ordre croissant, ce qui n'est pas le cas ici.

Corrigé de l'exercice 7 : Positivité et suite d'intégrales

1. Pour tout n , l'intégrande $x \rightarrow \frac{x^n}{1+x}$ est continu sur $[0, 1]$, donc I_n existe. Ensuite $I_0 = [\ln(1+x)]_0^1$, soit $I_0 = \ln 2$.

2. Par linéarité, $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx$. Donc $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

3. Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}$. Par croissance de l'intégrale,

$I_{n+1} \leq I_n$: la suite est décroissante. Par ailleurs, $1+x \geq 1$ donne $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.
Par positivité, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$.

4. Multiplions la relation de la question 2 par $(-1)^k$ et sommons pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} \right) = I_0 - (-1)^n I_n.$$

La somme est télescopique, d'où la formule $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^n I_n$. Comme

$$|(-1)^n I_n| = I_n \rightarrow 0, \text{ on obtient } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \rightarrow \ln 2.$$

Corrigé de l'exercice 8 : Encadrement et inégalité de la moyenne

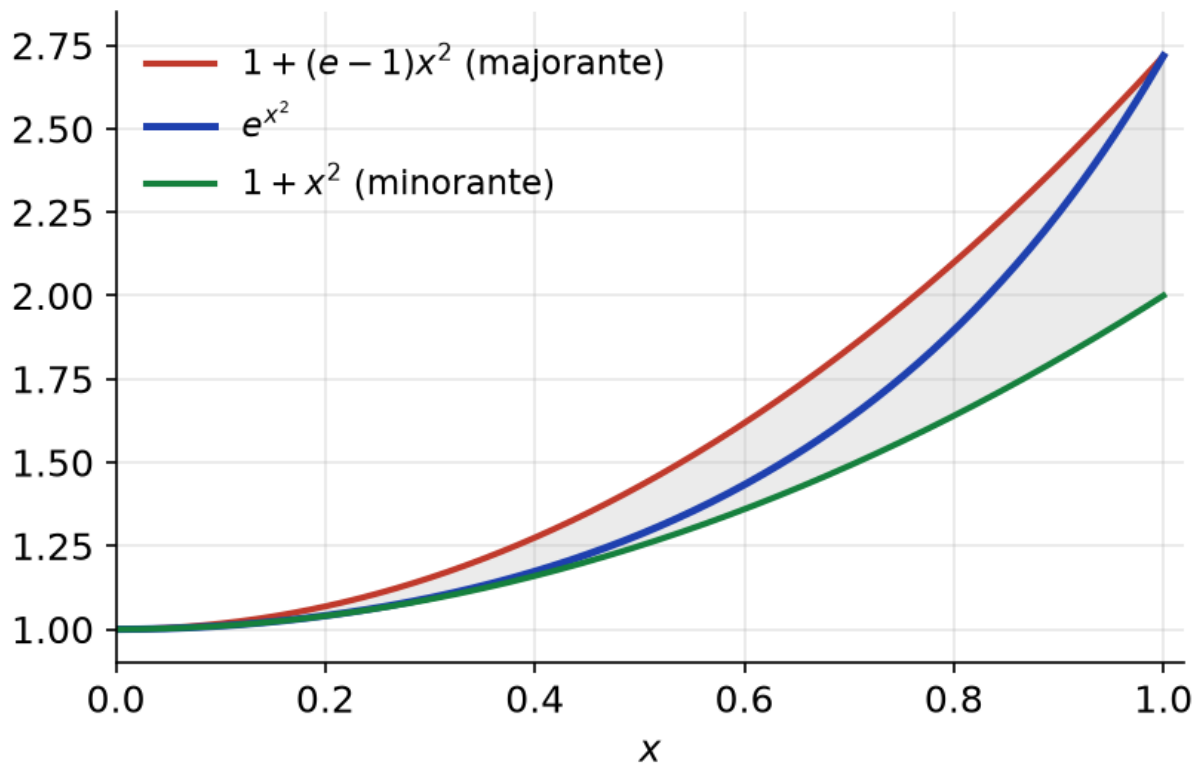
1. La fonction $x \rightarrow e^{x^2}$ est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable : I existe. Elle est croissante sur ce segment, donc comprise entre $e^0 = 1$ et $e^1 = e$. L'inégalité de la moyenne donne $1 \leq I \leq e$.

2. La fonction $\exp$ est convexe, donc son graphe est au-dessus de sa tangente en 0 : $e^t \geq 1+t$. Elle est aussi en dessous de sa corde entre 0 et 1. Pour $t \in [0, 1]$, on écrit $t = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$. La convexité donne alors $e^t \leq (1-t)e^0 + t e^1 = 1 + (e-1)t$. Ainsi $1+t \leq e^t \leq 1 + (e-1)t$ sur $[0, 1]$.

3. Pour $x \in [0, 1]$, le réel $t = x^2$ est dans $[0, 1]$. Donc $1+x^2 \leq e^{x^2} \leq 1 + (e-1)x^2$. La figure ci-dessous montre cet encadrement. Par croissance de l'intégrale,

$$1 + \frac{1}{3} \leq I \leq 1 + \frac{e-1}{3}, \text{ soit } \frac{4}{3} \leq I \leq \frac{e+2}{3}.$$

On a donc $1,333 \leq I \leq 1,573$ environ, ce qui améliore nettement la question 1.



4. La fonction $g : x \rightarrow e^{x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. D'après l'inégalité de la moyenne pour une fonction continue, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $I = (1 - 0) g(c) = e^{c^2}$. Alors $c^2 = \ln I$, et la question 3 donne, par croissance du logarithme, $\ln \frac{4}{3} \leq c^2 \leq \ln \frac{e+2}{3}$, soit environ $0,288 \leq c^2 \leq 0,453$.

Corrigé de l'exercice 9 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont continues sur $[a, b]$, car $f > 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b \sqrt{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \right)^2 \leq \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}.$$

Le membre de gauche vaut $(b-a)^2$, d'où $\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$. Si $f = C$ est constante, les deux membres valent $C(b-a) \cdot \frac{b-a}{C} = (b-a)^2$. Réciproquement, supposons l'égalité et posons $u = \sqrt{f}$, $v = \frac{1}{\sqrt{f}}$. Le trinôme $P(\lambda) = \int_a^b (\lambda u - v)^2$ a un discriminant nul, donc une racine réelle λ_0 . La fonction continue positive $(\lambda_0 u - v)^2$ est alors d'intégrale nulle, donc nulle. Ainsi $\lambda_0 \sqrt{f} = \frac{1}{\sqrt{f}}$, soit $f = \frac{1}{\lambda_0^2}$. Donc **l'égalité a lieu si et seulement si f est constante.**

2. La fonction $h : x \rightarrow \sqrt{1+x^3}$ est continue sur $[0, 1]$, et $h \geq 1$ sur ce segment. Donc

$$\int_0^1 h \geq 1. \text{ Ensuite, Cauchy-Schwarz avec la fonction constante } 1 \text{ donne}$$

$$\left(\int_0^1 h \cdot 1 \right)^2 \leq \int_0^1 (1+x^3) dx \times \int_0^1 1 = \frac{5}{4}. \text{ Comme } \int_0^1 h \geq 0, \text{ on conclut que}$$

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,118.$$

3. La fonction f' est continue et $f(0) = 0$. Le théorème fondamental donne donc

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt \text{ pour } x \in [0, 1]. \text{ Pour } x > 0, \text{ Cauchy-Schwarz sur } [0, x] \text{ donne}$$

$$f(x)^2 = \left(\int_0^x 1 \cdot f'(t) dt \right)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt \leq x \int_0^1 f'(t)^2 dt.$$

La dernière inégalité vient de Chasles et de la positivité de $(f')^2$. Le cas $x = 0$ est immédiat.

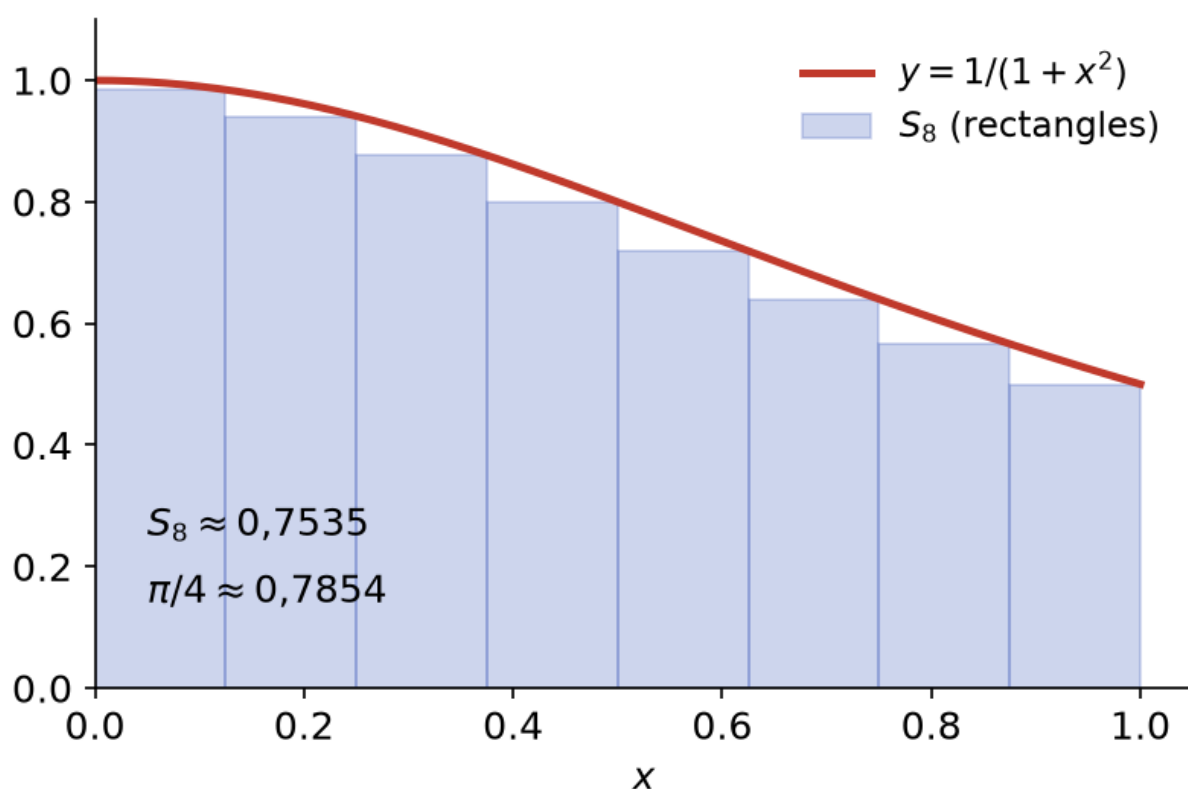
Intégrons enfin sur $[0, 1]$: comme $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, on obtient $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f')^2$.

Corrigé de l'exercice 10 : Fonctions continues d'intégrale nulle

1. Raisonnons par l'absurde. Si g ne s'annule pas, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle garde un signe strict constant ; supposons $g > 0$, l'autre cas étant symétrique. Alors g est continue, positive et d'intégrale nulle, donc nulle d'après le cours. C'est absurde. Ainsi g **s'annule au moins une fois sur $[a,b]$** .
2. Posons $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0, 1]$. Par linéarité, $\int_0^1 g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. D'après la question 1, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.
3. Prenons $h(0) = 1$ et $h(x) = 0$ pour $x \in]0, 1]$. C'est une fonction en escalier, positive, d'intégrale nulle, mais $h \neq 0$. Le résultat du cours ne s'applique pas, car h **n'est pas continue**.
4. Prenons $g = f$, qui est continue. Alors $\int_a^b f^2 = 0$. La fonction f^2 est continue et positive, donc nulle d'après le cours. Par conséquent, f **est nulle sur $[a,b]$** .

Corrigé de l'exercice 11 : Limites de sommes de Riemann

1. On factorise par n^2 au dénominateur : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2}$. C'est la somme de Riemann R'_n de $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$, continue sur $[0, 1]$. Donc $S_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1$, soit $S_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$. La figure ci-dessous représente S_8 : les rectangles sont sous la courbe, car la fonction décroît.



2. De même, $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}$, avec $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0, 1]$. Ainsi

$$T_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \text{ soit } T_n \rightarrow \ln 2.$$

3. La suite U_n est la somme de Riemann R_n de $x \rightarrow \sin(\pi x)$, continue sur $[0, 1]$. Donc

$$U_n \rightarrow \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}. \text{ Ainsi } U_n \rightarrow \frac{2}{\pi}.$$

4. On écrit $\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$. Donc V_n est la somme de Riemann de $x \rightarrow \sqrt{x}$, continue sur

$$[0, 1]. \text{ Par conséquent } V_n \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1, \text{ soit } V_n \rightarrow \frac{2}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 12 : Sommes de Riemann et produits

1. Le produit est strictement positif, donc on peut prendre le logarithme :

$\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann de $x \rightarrow \ln(1+x)$, continue sur $[0, 1]$. Calculons l'intégrale par parties, avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = \ln(1+x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \ln(1+x) \, dx = [(1+x)\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} \, dx = 2\ln 2 - 1.$$

Donc $\ln u_n \rightarrow 2\ln 2 - 1$. Par continuité de l'exponentielle, $u_n \rightarrow e^{2\ln 2 - 1}$, soit $u_n \rightarrow \frac{4}{e} \approx 1,47$.

2. On écrit $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{k/n}$, somme de Riemann de $x \rightarrow x e^x$, continue sur $[0, 1]$. Par

parties, $\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1$. Donc $w_n \rightarrow 1$.

3. On factorise n^2 au dénominateur : $z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + k/n)^2}$. La fonction $x \rightarrow (1+x)^{-2}$ est continue sur $[0, 1]$. Par suite $z_n \rightarrow \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1$, soit $z_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Erreur de la méthode des rectangles

1. Par Chasles, $\int_0^1 f - R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx$. Pour $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$,

l'inégalité des accroissements finis donne $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M_1 \left(x - \frac{k}{n}\right)$. Donc chaque terme est majoré en valeur absolue par

$$M_1 \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) dx = M_1 \int_0^{1/n} s \, ds = \frac{M_1}{2n^2}.$$

En sommant les n termes, on obtient $\left| \int_0^1 f - R_n \right| \leq \frac{M_1}{2n}.$

2. Supposons f croissante. Sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. En intégrant, chaque terme de la somme précédente est compris entre 0 et $\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. La somme de ces majorants est télescopique. Donc $0 \leq \int_0^1 f - R_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$. Le cas décroissant s'obtient

avec $-f$. Ainsi $\left| \int_0^1 f - R_n \right| \leq \frac{|f(1) - f(0)|}{n}.$

3. On a $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, donc $|f'(x)| = g(x)$ avec $g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ sur $[0, 1]$. Dérivons :

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2 - 6x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Ainsi g croît sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et décroît ensuite. Son maximum vaut $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}}.$

Donc $\sup_{[0,1]} |f'| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,650.$

4. Ici $\int_0^1 f = \frac{\pi}{4}$. La fonction f est décroissante sur $[0, 1]$, avec $|f(1) - f(0)| = \frac{1}{2}$. La

majoration monotone garantit une erreur $\frac{1}{2n} \leq 10^{-3}$ dès que $n \geq 500$. La majoration C^1 donne une erreur au plus $\frac{3\sqrt{3}}{16n}$. Or $\frac{3\sqrt{3}}{16} \times 10^3 \approx 324,8$. Elle garantit donc la précision voulue dès que $n \geq 325$, contre $n \geq 500$ pour la première.

Corrigé de l'exercice 14 : Primitives usuelles

1. Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos x > 0$ et $\tan x = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$. Donc

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ soit } \frac{\ln 2}{2}.$$

2. On reconnaît $u'u$ avec $u = \ln$. Ainsi $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$, soit $\frac{1}{2}$.

3. On reconnaît $\frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + x^2 > 0$. Donc $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1$, soit $\frac{\ln 2}{2}$.

4. La fonction $\arcsin$ est une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$, qui contient $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\text{D'où } \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \frac{1}{2}, \text{ soit } \frac{\pi}{6}.$$

5. On reconnaît $\frac{1}{2} u' e^u$ avec $u = x^2$. Donc $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1$, soit $\frac{e-1}{2}$.

6. On reconnaît $u'u^3$ avec $u = \sin$. Ainsi $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^4 x}{4}\right]_0^{\pi/2}$, soit $\frac{1}{4}$.

7. Sur $]1, +\infty[$, $\ln x > 0$ et $\frac{1}{x \ln x} = \frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$. Donc $x \rightarrow \ln(\ln x)$ est une primitive sur cet intervalle.

Corrigé de l'exercice 15 : Intégrations par parties

Dans chaque question, les fonctions choisies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment, ce qui justifie l'intégration par parties.

1. Avec $u'(x) = e^x$, $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$:

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1). \text{ Ainsi } \int_0^1 x e^x dx = 1.$$

2. Avec $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \ln x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$:

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4}.$$

Donc $\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$

3. Avec $u = \sin$ et $v(x) = x$:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1. \text{ Le résultat est } \frac{\pi}{2} - 1.$$

4. Avec $u(x) = x$ et $v = \arctan$:

$$\int_0^1 \arctan x dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

On a utilisé l'exercice 14. Ainsi $\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$

5. Notons $A = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ et $B = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. Une première intégration par parties, avec $u = \exp$ et $v = \sin$, donne $A = [e^x \sin x]_0^{\pi} - B = -B$. Une seconde, avec $v = \cos$, donne $B = [e^x \cos x]_0^{\pi} + A = -e^{\pi} - 1 + A$. Par conséquent $A = e^{\pi} + 1 - A$, d'où $A = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$

Point de méthode : on dérive le facteur qui se simplifie (polynôme, logarithme, arc tangente) et on intègre l'autre. Pour $e^x \sin x$, deux intégrations par parties font revenir l'intégrale de départ.

Corrigé de l'exercice 16 : Intégrales de Wallis

1. La fonction $\varphi : u \rightarrow \frac{\pi}{2} - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\sin^n$ est continue. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ donne

$$W_n = \int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \, du.$$

Ensuite $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$ et $W_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}$. Donc
 $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$, $W_2 = \frac{\pi}{4}$.

2. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n$ est continue, positive et non identiquement nulle (elle vaut 1 en $\frac{\pi}{2}$). D'après le cours, son intégrale n'est pas nulle, donc $W_n > 0$. De plus, $0 \leq \sin t \leq 1$ entraîne $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$: **la suite est décroissante.**

3. Écrivons $\sin^{n+2} t = \sin t \cdot \sin^{n+1} t$. Intégrons par parties avec $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \sin^{n+1} t$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$W_{n+2} = [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \, dt.$$

Le crochet est nul. Remplaçons $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$: on obtient

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \text{ Ainsi } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

4. Raisonnons par récurrence sur p . Pour $p = 0$, les formules donnent $\frac{\pi}{2}$ et 1 : elles sont justes. Supposons-les vraies au rang p . D'une part, $W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p}$. D'autre part, le quotient des formules proposées aux rangs $p+1$ et p vaut

$$\frac{(2p+2)(2p+1)}{4(p+1)^2} = \frac{2p+1}{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2}.$$

De même, $W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1}$, et le quotient des formules impaires vaut

$$\frac{4(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)} = \frac{2p+2}{2p+3}. \text{ Les formules sont donc héréditaires : } W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. Posons $c_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. D'après la question 3,
 $c_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = c_n$. La suite est constante, égale à $c_0 = W_1 W_0$. Donc $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout n .
6. Par décroissance, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. Divisons par $W_n > 0$:
 $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. Par encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $W_{n+1} \sim W_n$. Par conséquent $(n+1)W_n^2 \sim (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$. Comme $W_n > 0$, on conclut que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Cela confirme la figure de l'énoncé : l'aire sous $\sin^n$ tend vers 0.

Corrigé de l'exercice 17 : Changements de variable

1. La fonction $\varphi = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

L'intégrande est continu sur $[-1, 1]$. Comme $\cos t \geq 0$ sur ce segment,

$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$. Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Le résultat est $\frac{\pi}{4}$, l'aire d'un quart de disque unité.

2. On pose $x = \varphi(t) = t^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$, avec $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(2) = 4$. Alors $dx = 2t dt$ et $x + \sqrt{x} = t^2 + t$, car $t \geq 0$. Ainsi

$$\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2t}{t(t+1)} dt = [2\ln(t+1)]_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}.$$

Le résultat est $2\ln\frac{3}{2}$.

3. On lit la formule dans l'autre sens avec $\varphi = \exp$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$ continue. En effet $\frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(e^x) (e^x)'$. Donc

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

Le résultat est $\arctan e - \frac{\pi}{4}$.

4. Avec $u = x + 1$, affine donc de classe $\mathcal{C}^1$, on a $x = u - 1$ et les bornes deviennent 1 et 4 :

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \int_1^4 (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} \right]_1^4.$$

En 4, le crochet vaut $\frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{112}{15}$; en 1, il vaut $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}$. Le résultat est donc $\frac{116}{15}$.

Corrigé de l'exercice 18 : Symétries et changement de variable

1. Par Chasles, $\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f$. Dans la première intégrale, posons $x = -u$,
changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_a^0 f(-u) (-du) = \int_0^a f(-u) \, du.$$

Si f est impaire, ce terme vaut $-\int_0^a f$ et le total est nul. Si f est paire, il vaut $\int_0^a f$ et le total est $2\int_0^a f$. Dans l'exemple, x^5 et $\sin x$ sont impaires, et $-3x^2$ est paire. Donc

$$\int_{-1}^1 (x^5 - 3x^2 + \sin x) \, dx = -6 \int_0^1 x^2 \, dx, \text{ soit } -2.$$

2. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, qui existe car f est continue. Alors

$$\Phi(a) = \int_a^{a+T} f = F(a+T) - F(a) \text{ est dérivable et } \Phi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0 \text{ par}$$

périodicité. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, Φ est donc constante : $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ **pour tout** a .

3. L'intégrande est continu sur $[0, \pi]$, car $1 + \cos^2 x \geq 1$. Le changement $x = \pi - u$ donne, puisque $\sin(\pi - u) = \sin u$ et $\cos^2(\pi - u) = \cos^2 u$,

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} \, du = \pi J - I, \text{ avec } J = \int_0^\pi \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u} \, du.$$

Pour J , on pose $v = \cos u$: $J = \int_{-1}^1 \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Donc $2I = \pi J$, d'où

$$I = \frac{\pi^2}{4}.$$

4. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > 0$, donc les intégrandes sont continus.

Notons $L = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$. Le changement $x = \frac{\pi}{2} - u$ échange $\sin$ et $\cos$,

donc $K = L$. Par ailleurs, $K + L = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $K = \frac{\pi}{4}$.

Point de méthode : quand un calcul direct semble impossible, un changement de variable qui « retourne » le segment fait souvent réapparaître l'intégrale cherchée.

Corrigé de l'exercice 19 : Fractions rationnelles

1. On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. Sur $[2, 3]$, les deux facteurs sont positifs. Donc

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{x-1}{x+1} \right]_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right).$$

Le résultat est $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

2. Le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut $-3 < 0$. Sous forme canonique,
 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Avec $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Le résultat est $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

3. On cherche $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. En multipliant par $x+1$ puis en prenant $x = -1$, on trouve $a = \frac{-1}{2}$. Ensuite, en identifiant les coefficients de $x = a(x^2+1) + (bx+c)(x+1)$: $a + b = 0$ et $a + c = 0$. Donc $b = c = \frac{1}{2}$. On vérifie le coefficient de x : $b + c = 1$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan x \right]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

Le résultat est $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$.

4. Le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur. La division euclidienne donne $x^3 + 2 = (x+1)(x^2 - x + 1) + 1$, car $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$. Donc

$$\int_0^1 \frac{x^3+2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + \ln 2.$$

Le résultat est $\frac{5}{6} + \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 20 : Pôle double et substitution tangente

1. En multipliant par x puis en prenant $x = 0$, on obtient $\alpha = 1$. En multipliant par $(x+1)^2$ puis en prenant $x = -1$, on obtient $\gamma = -1$. Enfin, multiplions par x et faisons tendre x vers $+\infty$: $0 = \alpha + \beta$, donc $\beta = -1$. On vérifie :

$$(x+1)^2 - x(x+1) - x = 1. \text{ Ainsi}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2} = \left[\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right]_1^2 = \left(\ln \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) - \left(\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Le résultat est $\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \approx 0,121$.

2. Posons $x = \varphi(t) = 2\arctan t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$. Alors $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. On calcule $2 + \cos x = \frac{3+t^2}{1+t^2}$. Donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^1 \frac{2 dt}{3 + t^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Le résultat est $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Posons $x = \tan t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Alors $dx = (1 + \tan^2 t) dt$ et $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/4}.$$

Le résultat est $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Fonctions définies par une intégrale

1. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{\ln t}$ est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Soit H une de ses primitives.

Pour $x > 1$, on a $x^2 > x > 1$, donc les bornes sont dans cet intervalle, et

$F(x) = H(x^2) - H(x)$. Par composition, F est dérivable et

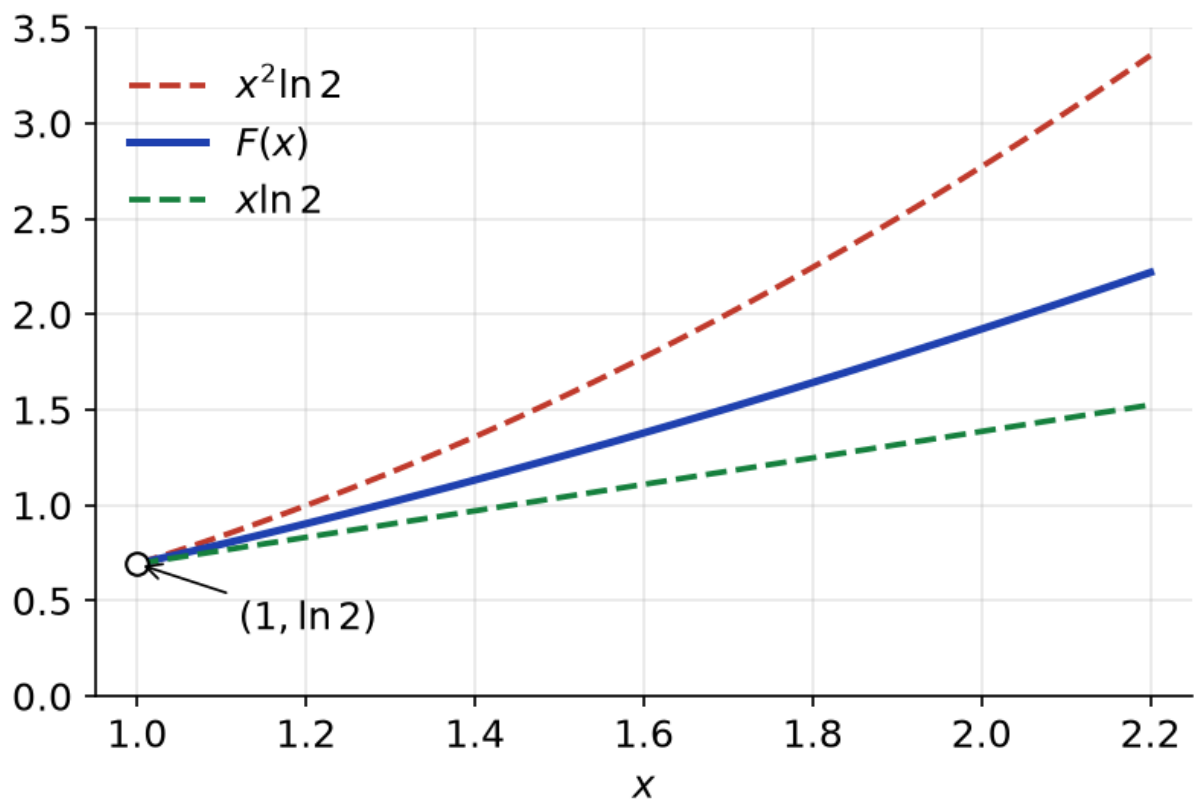
$$F'(x) = 2x \cdot \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Pour $x > 1$, numérateur et dénominateur sont strictement positifs. Donc $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x} > 0$
et F est strictement croissante.

2. Sur $]1, +\infty[$, $\frac{1}{t \ln t} = \frac{u'}{u}$ avec $u = \ln t > 0$. Donc

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln(2\ln x) - \ln(\ln x), \text{ soit } \ln 2.$$

3. Pour $t \in [x, x^2]$, on a $x \leq t \leq x^2$ et $\frac{1}{t \ln t} > 0$. En écrivant $\frac{1}{\ln t} = t \cdot \frac{1}{t \ln t}$, on obtient $\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$. Les bornes $x < x^2$ sont dans l'ordre croissant, donc la croissance de l'intégrale et la question 2 donnent $x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$. Quand $x \rightarrow 1^+$, les deux bornes tendent vers $\ln 2$: $F(x) \rightarrow \ln 2$. Quand $x \rightarrow +\infty$, la minoration donne $F(x) \rightarrow +\infty$. La figure ci-dessous représente F entre ses deux bornes.



4. Par linéarité, $G(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$. Les fonctions f et $t \rightarrow t f(t)$ sont continues. Le théorème fondamental montre donc que les deux intégrales sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ de x . Par produit, G est dérivable et

$$G'(x) = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

À nouveau par le théorème fondamental, G' est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi G est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $G'(x) = \int_0^x f$ et $G'' = f$.

Point de méthode : quand la variable x figure dans l'intégrande, on la sort de l'intégrale avant de dériver.

Corrigé de l'exercice 22 : Lemme de Riemann-Lebesgue

1. Intégrons par parties avec $u(t) = -\frac{\cos(nt)}{n}$ et $v = f$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$:

$$I_n(f) = \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t)\cos(nt) dt.$$

Comme $|\cos| \leq 1$, le crochet est majoré par $\frac{|f(a)| + |f(b)|}{n}$ et l'intégrale par $\int_a^b |f'|$. Donc

$$|I_n(f)| \leq \frac{1}{n} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'| \right), \text{ qui tend vers } 0.$$

2. Soit $(x_0, \dots, x_p)$ une subdivision adaptée à f , de valeur c_k sur $]x_{k-1}, x_k[$. Par Chasles,

$$|I_n(f)| = \left| \sum_{k=1}^p c_k \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} \right| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^p |c_k|.$$

Le nombre p et les c_k ne dépendent pas de n . Ainsi $I_n(f) \rightarrow 0$.

3. Par linéarité et inégalité de la moyenne,

$$|I_n(f) - I_n(\varphi)| = \left| \int_a^b (f - \varphi)(t) \sin(nt) dt \right| \leq \int_a^b |f - \varphi|.$$

$0 \leq f - \varphi \leq \psi - \varphi$, donc ce majorant vaut au plus $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. D'après la question

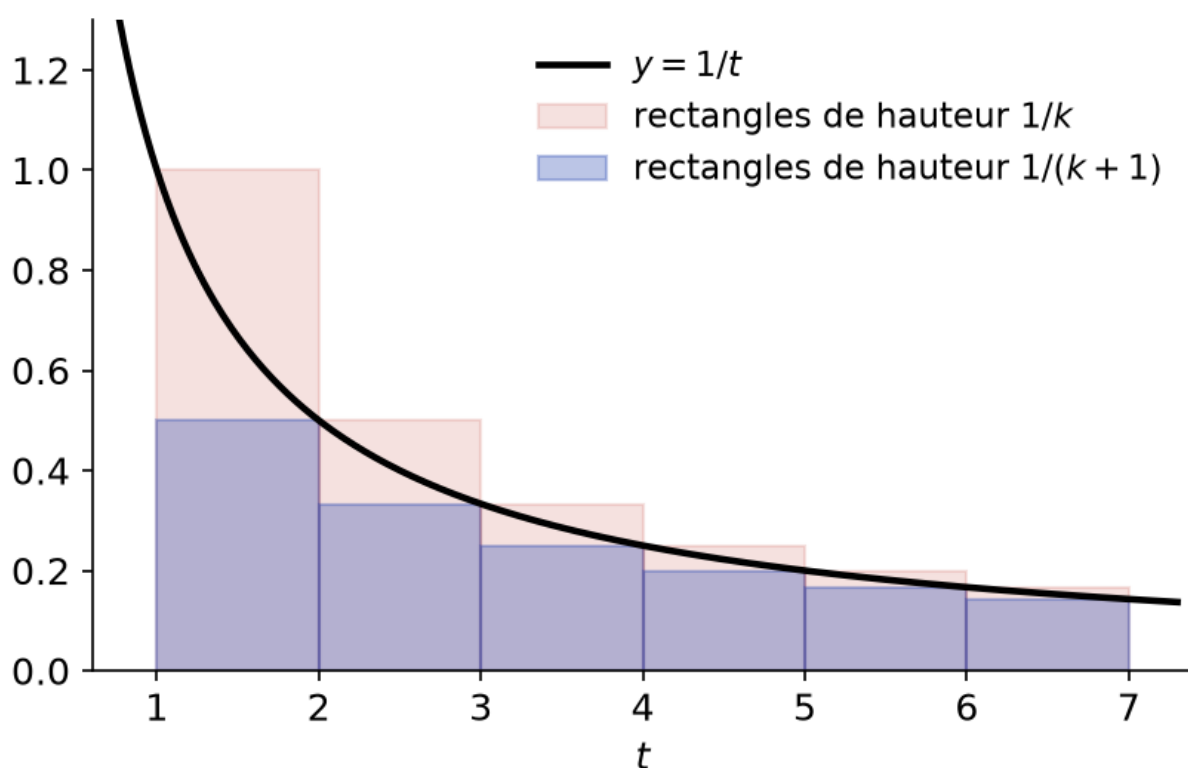
2, il existe N tel que $|I_n(\varphi)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Pour ces n , on a $|I_n(f)| \leq 2\varepsilon$. Par conséquent, $I_n(f) \rightarrow 0$ **pour toute f intégrable**, et de même pour $J_n(f)$.

4. On linéarise : $\sin^2(nt) = \frac{1 - \cos(2nt)}{2}$. Donc

$\int_0^\pi e^t \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^t dt - \frac{1}{2} J_{2n}(\exp)$. Le lemme donne $J_{2n}(\exp) \rightarrow 0$, d'où la limite $\frac{e^\pi - 1}{2}$. Autrement dit, $\sin^2(nt)$ se comporte « en moyenne » comme la constante $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : la constante d'Euler

1. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$. Donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ sur ce segment de longueur 1. Par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. La figure ci-dessous illustre cet encadrement : l'aire sous la courbe est prise entre deux rectangles.



2. Sommons l'inégalité de droite pour $1 \leq k \leq n$. Par Chasles, $\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n$.

Sommons ensuite l'inégalité de gauche pour $1 \leq k \leq n-1$: $H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$.

Ainsi $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$. Pour $n \geq 2$, divisons par $\ln n > 0$:

$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$. Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc le quotient de gauche tend vers 1. Par encadrement, $H_n \sim \ln n$.

3. D'une part, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0$, d'après la question 1 avec $k = n$. D'autre part, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} \geq 0$, avec $k = n+1$. Donc (u_n) est **décroissante** et (v_n) est **croissante**.
4. On a $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$. Avec la question 3, les suites sont adjacentes : elles convergent vers une même limite γ , et $v_n \leq \gamma \leq u_n$ pour tout n . En particulier $v_2 \leq \gamma \leq u_2$, avec $H_2 = \frac{3}{2}$. Donc $\frac{3}{2} - \ln 3 \leq \gamma \leq \frac{3}{2} - \ln 2$, soit environ $0,401 \leq \gamma \leq 0,807$.
5. On a $v_n \leq \gamma \leq u_n$, donc $0 \leq u_n - \gamma \leq u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$, par concavité du logarithme. Ainsi $0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$. Le rang $n = 100$ suffit pour connaître γ à 10^{-2} près. On trouve $\gamma \approx 0,577$.
6. On écrit $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = (u_{2n} + \ln(2n)) - (u_n + \ln n)$. Donc $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln 2$. Comme (u_{2n}) et (u_n) tendent toutes deux vers γ , cette somme tend vers $\ln 2$. On retrouve ainsi, par une autre voie, la limite de T_n obtenue par somme de Riemann dans l'exercice 11.

Point de méthode : la comparaison série-intégrale encadre une somme de valeurs d'une fonction monotone par des intégrales. C'est l'outil de base pour étudier les séries à termes positifs en L2.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [intégration sur un segment, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur intégration sur un segment](#)

- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#), [Fonctions usuelles et fonctions réciproques](#), [Polynômes et fractions rationnelles](#)
- Chapitre précédent : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Chapitre suivant : [Équations différentielles linéaires](#)
- Le même thème en maths sup : [intégration sur un segment, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)