

Intégrales multiples

Exercice 1 : Sommes de Riemann sur un carré

On découpe le carré $R = [0,1]^2$ en n^2 pavés égaux $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, pour $1 \leq i, j \leq n$. Dans chaque pavé, on choisit le sommet $\xi_{ij} = \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$.

1. Pour $f(x,y) = xy$, calculez la somme de Riemann S_n associée, puis sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.
2. Retrouvez cette limite par le théorème de Fubini.
3. Reprenez les deux questions précédentes avec $g(x,y) = x + y$.

Exercice 2 : Calculs sur des rectangles par Fubini

Calculez les intégrales doubles suivantes. Justifiez à chaque fois l'emploi du théorème de Fubini.

1. $I_1 = \iint_{[0,1] \times [1,2]} (xy^2 + 1) dx dy$.

2. $I_2 = \iint_{[0,\pi/2]^2} \sin(x+y) dx dy$.

3. $I_3 = \iint_{[0,1]^2} e^{x+y} dx dy$, en remarquant que la fonction est à variables séparées.

4. $I_4 = \iint_{[0,1]^2} \frac{x}{1+xy} dx dy$. Quel ordre d'intégration choisir ?

Exercice 3 : Un contre-exemple au théorème de Fubini

On considère la fonction f définie sur $]0,1]^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

1. Vérifiez que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = f(x,y)$.

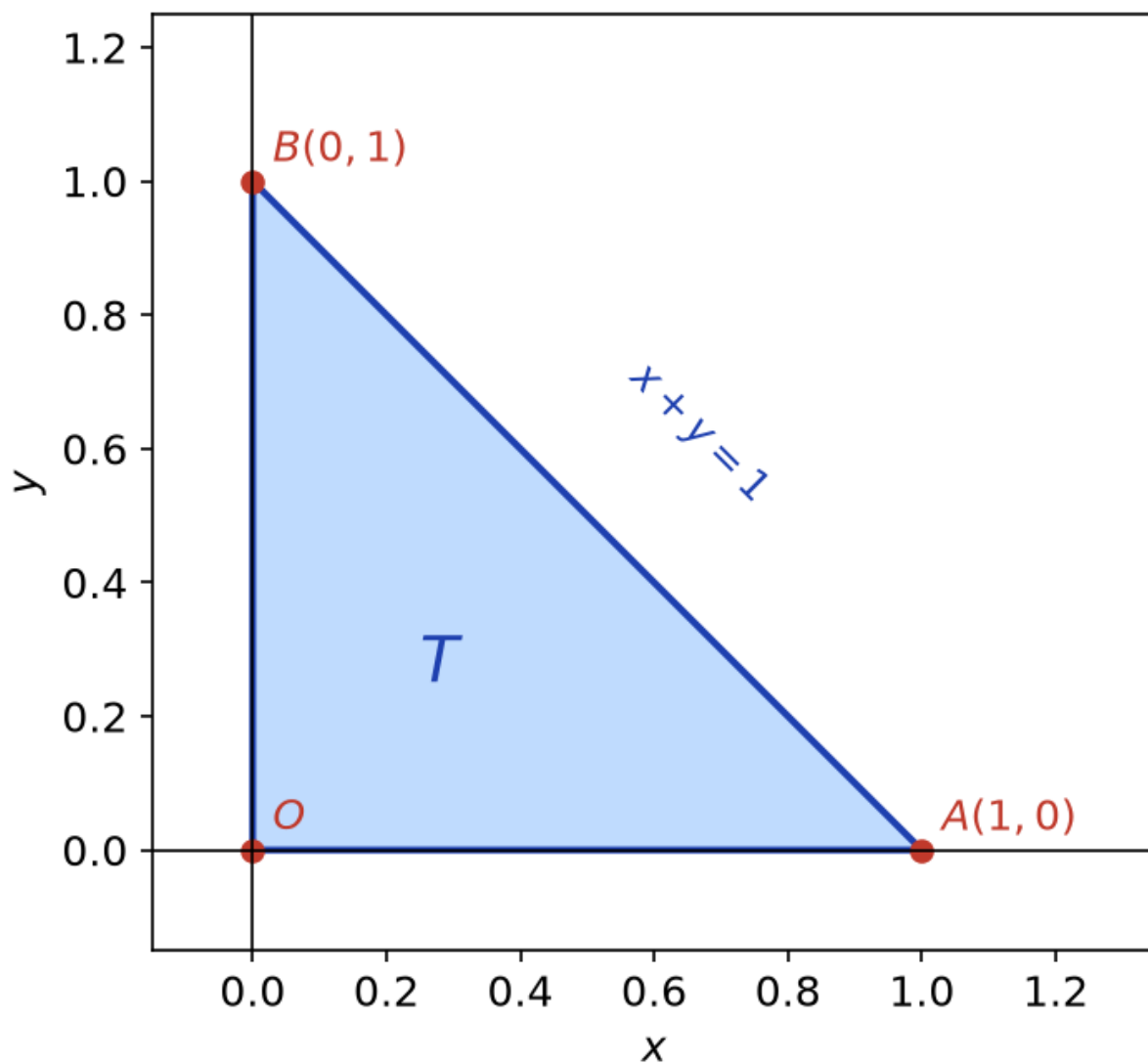
2. Pour $x \in]0,1]$ fixé, calculez $\int_0^1 f(x,y) dy$. En déduire $I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$.

3. Comparez $f(y,x)$ et $f(x,y)$, puis calculez $I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy$.

4. Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Fubini.

Exercice 4 : Intégrales sur un triangle

Soit T le triangle plein de sommets $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(0,1)$, représenté ci-dessous.



1. Décrivez T comme un domaine élémentaire de type 1, puis de type 2.

2. Calculez $\iint_T xy \, dx \, dy$ dans les deux ordres d'intégration.

3. Calculez $\iint_T (x+y) \, dx \, dy$.

4. Calculez $\iint_T e^{x+y} \, dx \, dy$.

Exercice 5 : Aire et centre de gravité entre deux paraboles

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

1. Vérifiez que $x^2 \leq \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ et dessinez D .

2. Calculez l'aire de D .

3. Calculez $\iint_D x \, dx \, dy$ et $\iint_D y \, dx \, dy$.

4. Déduisez-en les coordonnées du centre de gravité G de la plaque homogène D . Interprétez l'égalité des deux coordonnées.

Exercice 6 : Inversion de l'ordre d'intégration

Les intégrales suivantes ne se calculent pas dans l'ordre proposé, car l'intégrale intérieure n'a pas de primitive usuelle. Pour chacune, dessinez le domaine, échangez l'ordre d'intégration, puis concluez.

1.
$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} \, dy \right) dx.$$

2.
$$J = \int_0^\pi \left(\int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \right) dx.$$

3.
$$K = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} \, dy \right) dx.$$

Exercice 7 : Premiers calculs en coordonnées polaires

Calculez les intégrales suivantes en passant en coordonnées polaires. On note D_1 le disque fermé de centre O et de rayon 1.

1. $\iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy.$

2. $\iint_C \frac{dx dy}{x^2 + y^2},$ où C est la couronne $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$

3. $\iint_Q xy dx dy,$ où $Q = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \right\}.$

4. $\iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$ Interprétez ce nombre comme un volume.

Exercice 8 : Disque décentré en coordonnées polaires

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

1. Montrez que D est un disque dont vous préciserez le centre et le rayon.

2. Montrez qu'en coordonnées polaires, D est décrit par $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \leq r \leq 2\cos\theta.$

3. Retrouvez l'aire de D par une intégrale double en polaires.

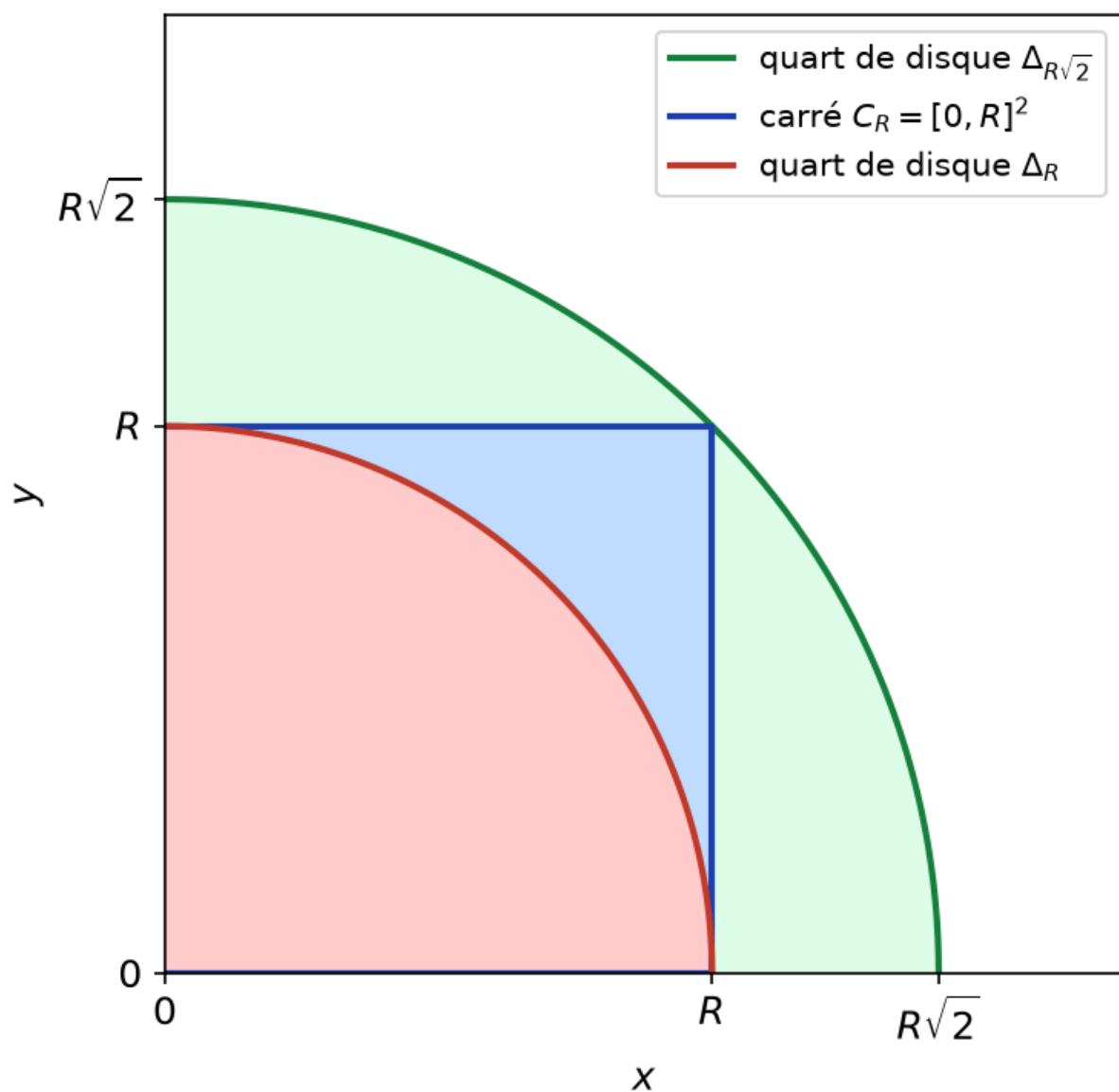
4. Calculez $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$

5. Calculez $\iint_D x dx dy$ et vérifiez la cohérence du résultat avec la position du centre.

Exercice 9 : L'intégrale de Gauss

Pour $R > 0$, on pose $F(R) = \int_0^R e^{-t^2} dt$, $C_R = [0, R]^2$ et

$\Delta_R = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{array} \right\}$. On note enfin $g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. La figure montre les trois domaines emboîtés utilisés.



1. Montrez que $\iint_{C_R} g(x,y) \, dx \, dy = F(R)^2$.
2. Calculez $\iint_{\Delta_R} g(x,y) \, dx \, dy$.
3. Justifiez les inclusions $\Delta_R \subset C_R \subset \Delta_{R\sqrt{2}}$ et déduisez-en un encadrement de $F(R)^2$.
4. Montrez que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 10 : Changement de variables affine

Soit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 \leq x+y \leq 2 \\ 0 \leq x-y \leq 2 \end{array} \right\}$.

1. Déterminez les sommets de D et dessinez-le.
2. On pose $u = x+y$ et $v = x-y$. Exprimez x et y en fonction de u et v , puis calculez le jacobien de $(u,v) \rightarrow (x,y)$.
3. Calculez l'aire de D .
4. Calculez $\iint_D (x+y) e^{x-y} \, dx \, dy$.
5. Calculez $\iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy$.

Exercice 11 : Aire et moments d'une ellipse

Soit $a > 0$, $b > 0$ et $E = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. On utilise les coordonnées polaires adaptées $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$.

1. Calculez le jacobien de $(r, \theta) \rightarrow (a \cos \theta, b \sin \theta)$ et décrivez E en fonction de r et θ .

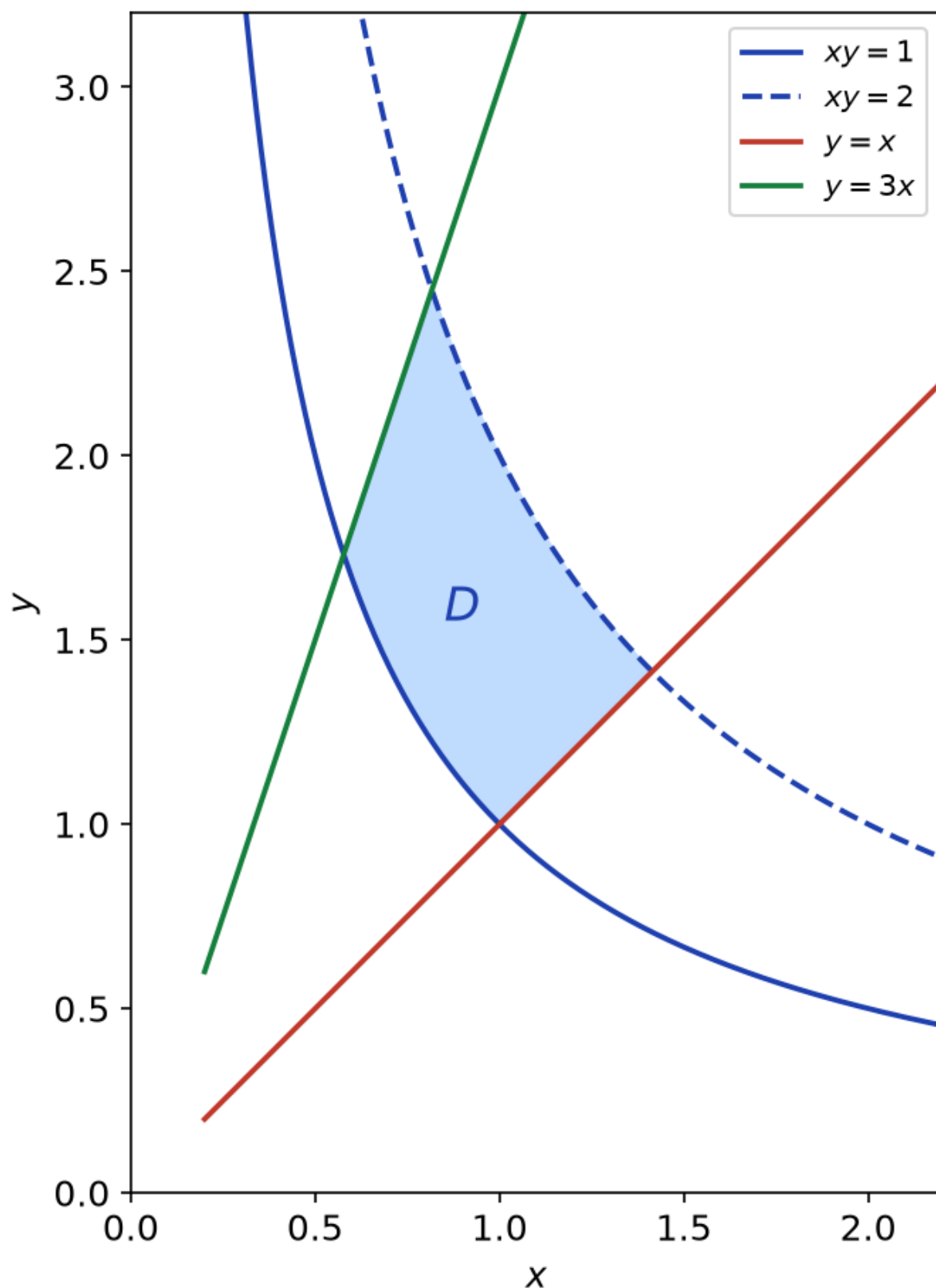
2. Calculez l'aire de E .

3. Calculez $\iint_E x^2 \, dx \, dy$.

4. Calculez $\iint_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \, dx \, dy$.

Exercice 12 : Un domaine limité par des hyperboles

Soit $D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x > 0, \\ 1 \leq xy \leq 2, \\ x \leq y \leq 3x \end{array} \right\}$, représenté ci-dessous.



1. On pose $u = xy$ et $v = \frac{y}{x}$. Montrez que $(x, y) \rightarrow (u, v)$ est une bijection de D sur $\Delta = [1, 2] \times [1, 3]$, de réciproque $x = \sqrt{u/v}$, $y = \sqrt{uv}$.
2. Calculez le jacobien de $(u, v) \rightarrow (x, y)$.

3. Calculez l'aire de D .

4. Calculez $\iint_D xy \, dx \, dy$ et $\iint_D \frac{y}{x} \, dx \, dy$.

Exercice 13 : Volumes sous une surface

1. Calculez le volume du solide $\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, \right. \\ \left. , 0 \leq z, z \leq 4 - x^2 - y^2 \right\}$, limité par un paraboloïde et le plan $z = 0$.

2. Calculez le volume du solide $\left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, \right. \\ \left. , 0 \leq y \leq 2, \right. \\ \left. , 0 \leq z \leq xy \right\}$.

3. Calculez le volume du solide $\left\{ (x, y, z) : (x, y) \in T, \right. \\ \left. , 0 \leq z \leq 1 - x - y \right\}$, où T est le triangle de l'exercice 4. Reconnaissez ce solide.

Exercice 14 : Tétraèdre et intégrale triple

$$\text{Soit } V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0, \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \right\}.$$

1. Calculez le volume de V par la méthode des piles.

2. Décrivez la section V_z de V à la hauteur $z \in [0, 1]$ et donnez son aire. Calculez alors $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ par tranches.

3. Déduisez-en le centre de gravité du tétraèdre homogène V .

4. Calculez $\iiint_V (x+y+z) \, dx \, dy \, dz$.

Exercice 15 : Coordonnées cylindriques et bol parabolique

Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

1. Décrivez V en coordonnées cylindriques.

2. Calculez le volume de V .

3. Calculez $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ et la cote $\bar{z}$ du centre de gravité.

4. Retrouvez le volume par la méthode des tranches horizontales.

Exercice 16 : Coordonnées sphériques, boule et cornet

Soit $R > 0$ et B la boule fermée de centre O et de rayon R .

1. Retrouvez le volume de B en coordonnées sphériques.

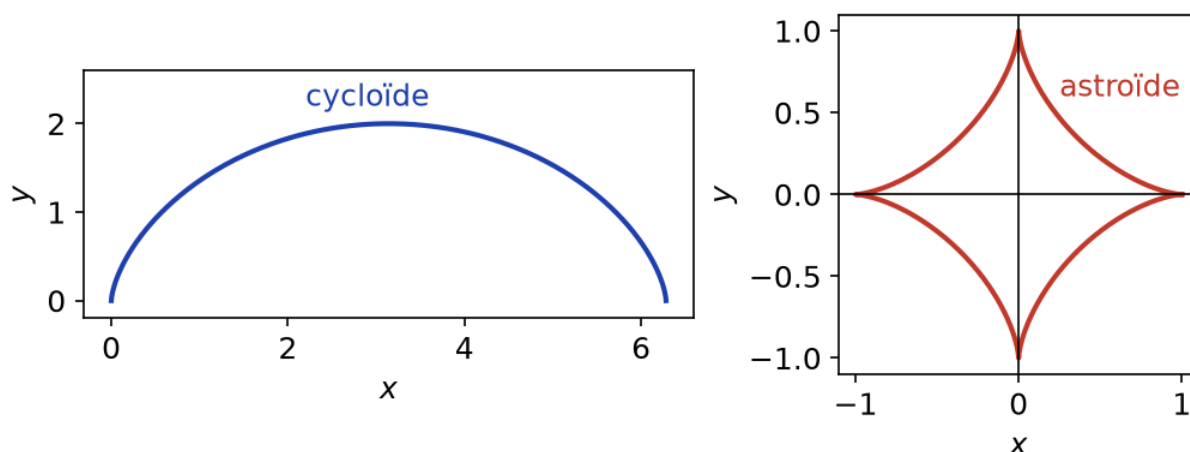
2. Calculez $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$.

3. Par un argument de symétrie, déduisez-en $\iiint_B z^2 \, dx \, dy \, dz$.

4. Calculez le volume du « cornet » $K = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

Exercice 17 : Longueurs d'arcs

Calculez la longueur des arcs suivants. Les deux premiers sont tracés ci-dessous.



1. L'arche de cycloïde $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. L'astroïde $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Le graphe de la fonction ch sur $[0,1]$.
4. Un tour d'hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Dans l'espace, la longueur se définit par la même formule, avec trois coordonnées.

Exercice 18 : Formes exactes et chemins

On considère sur $\mathbb{R}^2$ les formes $\omega_1 = (3x^2y + y) dx + (x^3 + x + 2y) dy$ et $\omega_2 = y^2 dx + x dy$.

1. Montrez que ω_1 est fermée. Pourquoi est-elle exacte ?

2. Déterminez un potentiel F de ω_1 .

3. Calculez $\int_{\gamma} \omega_1$ le long du segment $\gamma(t) = (t, 2t)$, $t \in [0,1]$, directement puis à l'aide de F .

4. Que vaut l'intégrale de ω_1 le long d'un chemin fermé quelconque ?

5. Calculez l'intégrale de ω_2 de $(0,0)$ à $(1,1)$ le long du segment, puis le long de l'arc de parabole $y = x^2$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 19 : La forme angle

Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $\omega = \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2}$.

1. Montrez que ω est fermée sur U .

2. Calculez $\oint_{C_R} \omega$, où C_R est le cercle de centre O et de rayon R , parcouru une fois dans le sens direct.

3. La forme ω est-elle exacte sur U ?

4. Sur le demi-plan $H = \{x > 0\}$, montrez que $F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est un potentiel de ω .

5. Calculez l'intégrale de ω le long d'un chemin quelconque contenu dans H , allant de $(1,-1)$ à $(1,1)$.

Exercice 20 : Vérification de la formule de Green-Riemann

Soit $D = [0,1]^2$, de bord ∂D orienté dans le sens direct, et $\omega = xy \, dx + x^2 \, dy$.

1. Calculez $\oint_{\partial D} \omega$ en paramétrant les quatre côtés du carré.
2. Calculez $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ et comparez.

Exercice 21 : Aire par une intégrale curviligne

On rappelle que l'aire d'un domaine D de bord orienté dans le sens direct vaut

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x dy - y dx) = - \oint_{\partial D} y dx.$$

1. Soit $a > 0$. Calculez l'aire du domaine limité par l'astroïde $t \rightarrow (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. Calculez l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et une arche de cycloïde $t \rightarrow (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Précisez l'orientation du bord.

Exercice 22 : Green-Riemann autour d'une singularité

On reprend la forme $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ de l'exercice 19, fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Soit Γ le bord du carré $[-1,1]^2$, orienté dans le sens direct. Calculez $\oint_{\Gamma} \omega$ en paramétrant les quatre côtés.
2. Soit D un domaine auquel s'applique la formule de Green-Riemann, qui ne contient pas l'origine. Montrez que $\oint_{\partial D} \omega = 0$.

3. On suppose maintenant que l'origine est à l'intérieur de D . En appliquant la formule de Green-Riemann au domaine D privé d'un petit disque centré en O , montrez que $\oint_{\partial D} \omega = 2\pi$. Vérifiez ce résultat sur la question 1.

4. Application : soit $a > 0$ et $b > 0$. En intégrant ω le long de l'ellipse $t \rightarrow (a \cos t, b \sin t)$, montrez que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 23 : Problème, le demi-disque homogène

Soit $R > 0$ et $D = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ y \geq 0, 0 \end{array} \right\}$ une plaque homogène en forme de demi-disque.

1. Calculez l'aire de D en coordonnées polaires.

2. Calculez $\iint_D y \, dx \, dy$. Déduisez-en le centre de gravité G de D .

3. Vérifiez le calcul de $\iint_D y \, dx \, dy$ par la formule de Green-Riemann, avec $P(x,y) = -\frac{y^2}{2}$ et $Q = 0$.

4. Calculez le moment d'inertie $I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ par rapport à l'origine.

5. On fait tourner D autour de l'axe des abscisses. Le solide obtenu est la boule de rayon R . En utilisant des coordonnées cylindriques d'axe Ox , c'est-à-dire $(x, \rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$, montrez que son volume vaut $2\pi \iint_D y \, dx \, dy$. Vérifiez que vous retrouvez $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 24 : Problème, intersections de cylindres et de sphères

Partie A. Soit $R > 0$ et $V_1 = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ y^2 + z^2 \leq R^2 \end{array} \right\}$, intersection de deux cylindres d'axes perpendiculaires.

1. Pour $z \in [-R, R]$, décrivez la section de V_1 par le plan horizontal de cote z .
2. Calculez le volume de V_1 par la méthode des tranches.
3. La boule de rayon R est contenue dans V_1 . Comparez les sections et les volumes de ces deux solides.

Partie B. Soit $V_2 = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 2x \end{array} \right\}$, partie de la boule de rayon 2 intérieure au cylindre construit sur le disque D de l'exercice 8.

1. Montrez que $\text{Vol}(V_2) = 2 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$.
2. Calculez ce volume en coordonnées polaires.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [intégrales multiples, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Différentiabilité, formule de Taylor et extrema](#)
- Chapitre précédent : [Formes quadratiques, coniques et quadriques](#)
- Chapitre suivant : [Variables aléatoires à densité](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)