Intégrales multiples

Corrigé de l'exercice 1 : Sommes de Riemann sur un carré

1. Chaque pavé a pour aire $\frac{1}{n^2}$. Donc

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

   Le pas vaut $\frac{1}{n}$ et tend vers 0. Ainsi, $S_n \to \frac{1}{4}$.

2. La fonction f est continue sur le rectangle $[0,1]^2$. Le théorème de Fubini s'applique, et la fonction est à variables séparées : $\iint_R xy = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. On retrouve bien $\frac{1}{4}$.

3. Pour g, on sépare la somme double : $\sum_{i,j}(i+j) = n\sum_i i + n\sum_j j = n^2(n+1)$.

   Donc $S_n = \frac{1}{n^3}\cdot n^2(n+1) = \frac{n+1}{n}$, qui tend vers 1. Ensuite, par Fubini, $\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = 1$. **Les deux méthodes donnent 1.**

Point de méthode : une somme double de termes produits se factorise en produit de deux sommes simples, exactement comme une intégrale à variables séparées.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 2 : Calculs sur des rectangles par Fubini

Les quatre fonctions sont continues sur des rectangles fermés : le théorème de Fubini s'applique dans les deux ordres.

1. À x fixé, $\int_1^2 (xy^2+1)\,\mathrm{d}y = x\cdot\frac{8-1}{3}+1 = \frac{7x}{3}+1$. Ensuite, $\int_0^1 \left(\frac{7x}{3}+1\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}+1$. Donc $I_1 = \frac{13}{6}$.
2. À x fixé, $\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y = \cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x + \sin x$. Puis $\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x = 1+1$. Donc $I_2 = 2$.
3. Comme $e^{x+y} = e^x\,e^y$, l'intégrale se factorise : $I_3 = \left(\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)^2$. Ainsi, $I_3 = (e-1)^2$.
4. La fonction est continue, car $1+xy \geq 1$ sur le carré. On intègre d'abord en y, car $\frac{x}{1+xy}$ est exactement la dérivée de $y \to \ln(1+xy)$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y = \ln(1+x)$. Ensuite, une primitive de $\ln(1+x)$ est $(1+x)\ln(1+x)-(1+x)$. Donc $I_4 = (2\ln 2 - 2) - (0-1)$, soit $I_4 = 2\ln 2 - 1$. Dans l'autre ordre, il faudrait intégrer $\frac{x}{1+xy}$ en x, ce qui est nettement plus long.

Corrigé de l'exercice 3 : Un contre-exemple au théorème de Fubini

1. Par la formule de dérivation d'un quotient,
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
On obtient bien $f(x,y)$ **.**

2. Pour $x \in]0,1]$ fixé, la fonction $y \to f(x,y)$ est continue sur $[0,1]$. D'après la question 1, $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}$. Par conséquent, $I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1$, donc $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

3. On constate que $f(y,x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -f(x,y)$. Ainsi, pour y fixé, $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(y,x)\,\mathrm{d}x$. La question 2, où l'on échange les noms des variables, donne $\int_0^1 f(y,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}$. Donc $I_2 = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$, soit $I_2 = -\frac{\pi}{4} \neq I_1$.

4. Le théorème de Fubini demande une fonction continue sur le rectangle fermé $[0,1]^2$. Or $f(x,0) = \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 0$. Donc f n'est pas bornée et ne se prolonge pas par continuité en $(0,0)$. **L'hypothèse du théorème n'est pas satisfaite : il n'y a aucune contradiction.**

Point de méthode : avant d'échanger deux intégrales, vérifiez toujours la continuité sur un domaine fermé et borné. En troisième année, le théorème de Fubini-Tonelli précisera ces hypothèses.

Corrigé de l'exercice 4 : Intégrales sur un triangle

1. En type 1 : $T = \left\{\begin{matrix}0 \leq x \leq \\ ,0 \leq y \leq 1-\end{matrix}\right\}$. En type 2 : $T = \left\{\begin{matrix}0 \leq y \leq \\ ,0 \leq x \leq 1-y\end{matrix}\right\}$. **Les deux descriptions se lisent sur la figure de l'énoncé.**

2. En intégrant d'abord en y :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\iint_T xy = \int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}\Big) = \tfrac{1}{24}.$$

En intégrant d'abord en x, on obtient $\int_0^1 y\cdot\frac{(1-y)^2}{2}\,\mathrm{d}y$, qui est le même calcul avec la lettre y. **Dans les deux ordres, on trouve $\frac{1}{24}$.**

3. À x fixé, $\int_0^{1-x}(x+y)\,\mathrm{d}y = x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}$. Ensuite, $\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$ et $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$. Donc $\iint_T (x+y) = \frac{1}{3}$.

4. À x fixé, $\int_0^{1-x} e^{x+y}\,\mathrm{d}y = e^x(e^{1-x}-1) = e-e^x$. Puis $\int_0^1 (e-e^x)\,\mathrm{d}x = e-(e-1)$. Ainsi, $\iint_T e^{x+y} = 1$.

Corrigé de l'exercice 5 : Aire et centre de gravité entre deux paraboles

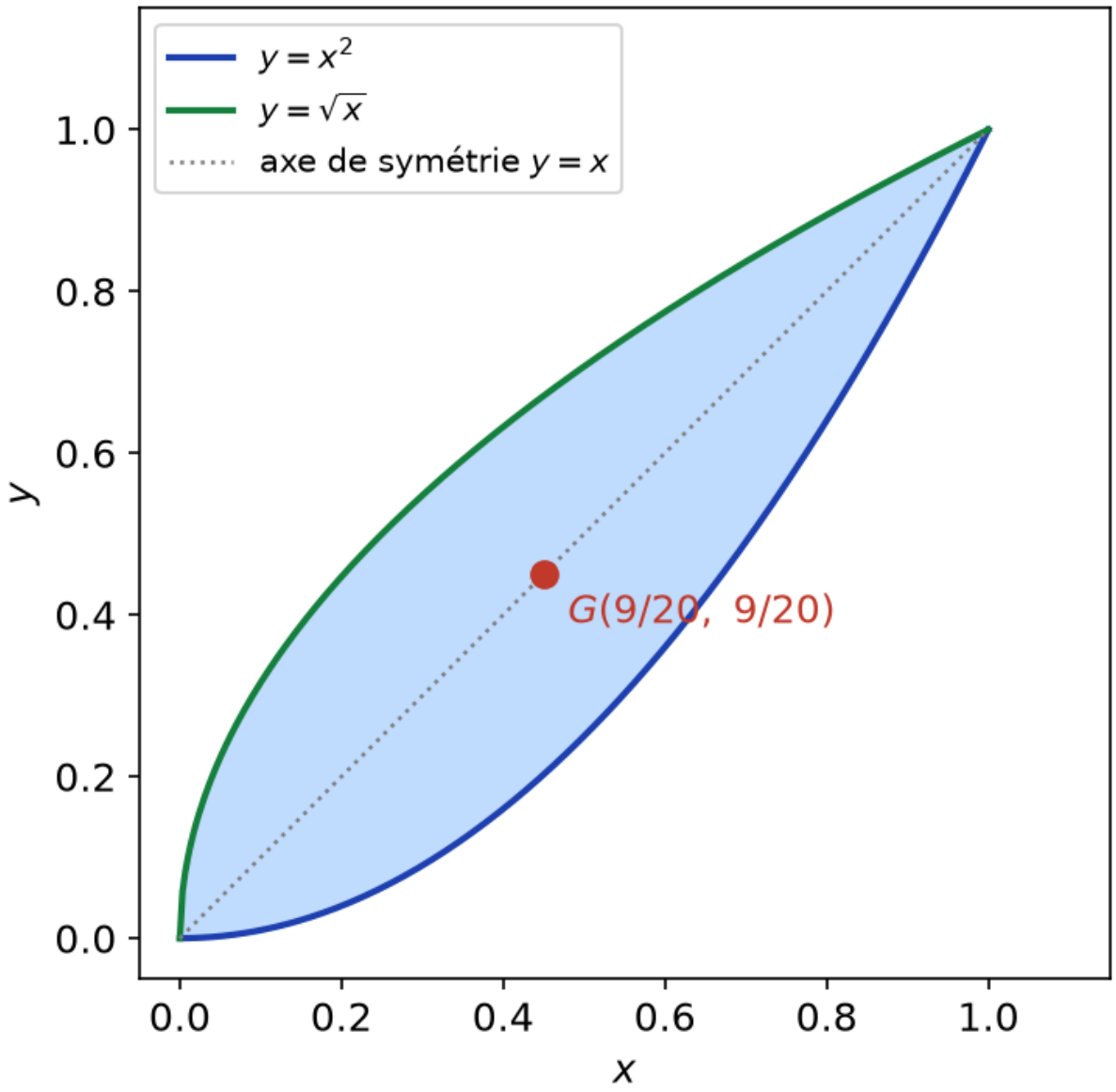
1. Pour $x\in[0,1]$, les deux membres sont positifs. Donc $x^2\le\sqrt{x} \Leftrightarrow x^4\le x \Leftrightarrow x(x^3-1)\le 0$, ce qui est vrai sur $[0,1]$. **Le domaine D est un fuseau entre les deux paraboles, qui se coupent en $(0,0)$ et $(1,1)$.**

2. Par Fubini sur ce domaine de type 1, $\mathcal{A}(D) = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. Donc $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{3}$.

3. D'abord, $\iint_D x = \int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{3/2}-x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}-\frac{1}{4} = \frac{3}{20}$. Ensuite,

$\iint_D y = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{20}$. **Les deux intégrales valent** $\frac{3}{20}$ **.**

4. Les coordonnées de G sont les moyennes $\overline{x} = \frac{3/20}{1/3} = \frac{9}{20}$ et $\overline{y} = \frac{9}{20}$. Donc $G = \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$. Cette égalité s'explique par une symétrie. En effet, $y \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{y}$ et $y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow x \geq y^2$ pour des nombres positifs. Ainsi, la symétrie $(x,y) \to (y,x)$ laisse D invariant, et G est sur la droite $y = x$, comme le montre la figure.



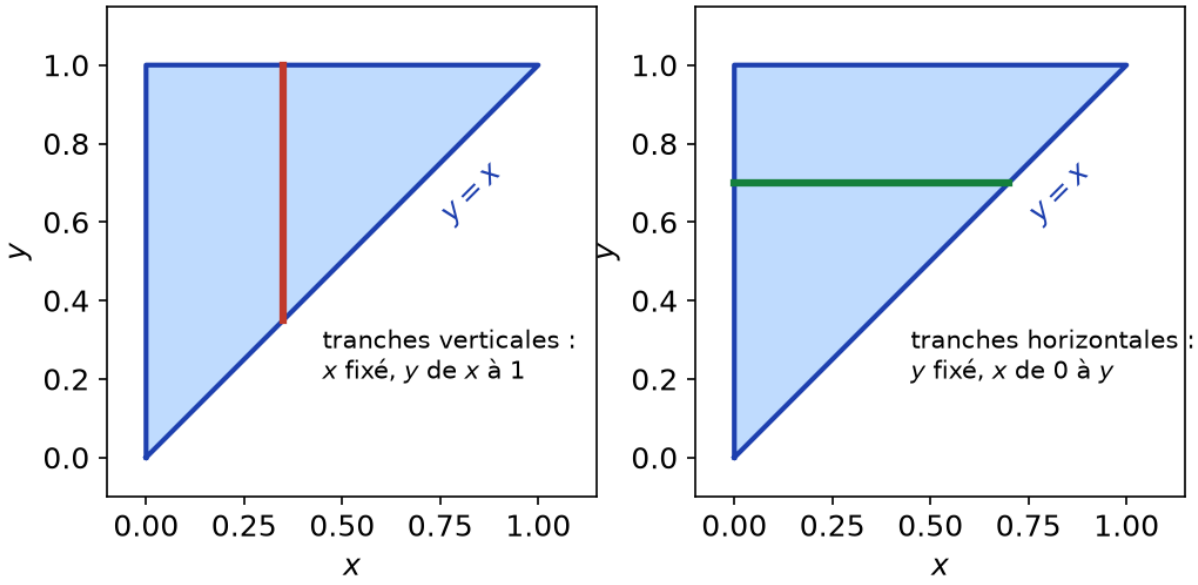
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 6 : Inversion de l'ordre d'intégration

1. Le domaine est $\left\{\begin{matrix}0 \le x \le 1,\\ x \le y \le 1\end{matrix}\right\}$: c'est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. En type 2, il s'écrit $\left\{\begin{matrix}0 \le y \le 1,\\ 0 \le x \le y\end{matrix}\right\}$. La figure ci-dessous montre les deux lectures, par tranches verticales puis horizontales. Comme $(x,y) \to e^{y^2}$ est continue, Fubini donne

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y \mathrm{d}x \right) e^{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\, e^{y^2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Ainsi, $I = \frac{e-1}{2}$.



2. La fonction $y \to \frac{\sin y}{y}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. Le domaine est $\{0 \le x \le y \le \pi\}$. Par conséquent,

$$J = \int_0^\pi \left(\int_0^y \mathrm{d}x \right) \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin y\,\mathrm{d}y = 2.$$

Donc $J = 2$.

3. Pour $x, y \geq 0$, on a $y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x \leq y^2$. Ainsi, le domaine s'écrit $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{cases}$. Donc $K = \int_0^1 y^2 e^{y^3} \, dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3} \right]_0^1$, soit $K = \frac{e-1}{3}$.

Point de méthode : quand l'intégrale intérieure bloque, l'échange d'ordre fait souvent apparaître un facteur qui est la dérivée de l'argument, comme y devant e^{y^2}.

Corrigé de l'exercice 7 : Premiers calculs en coordonnées polaires

Dans chaque cas, on remplace $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$ et on décrit le domaine par des bornes constantes.

1. Le disque D_1 correspond à $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Donc $\iint_{D_1} (x^2+y^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4}$. **Le résultat vaut** $\frac{\pi}{2}$.

2. La couronne correspond à $r \in [1,2]$. La fonction est continue sur C, qui ne contient pas l'origine. Ainsi, $\iint_C \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r \, dr \, d\theta = 2\pi \ln 2$. **Le résultat vaut** $2\pi \ln 2$.

3. Le quart de disque correspond à $r \in [0,1]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\iint_Q xy = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$. **Le résultat vaut** $\frac{1}{8}$.

4. On calcule $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \, d\theta = 2\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$. **Le résultat vaut** $\frac{2\pi}{3}$.
C'est le volume du solide situé entre le disque D_1 et la surface $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, c'est-à-

dire d'une demi-boule de rayon 1. On retrouve bien $\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Disque décentré en coordonnées polaires

1. On a $x^2+y^2\leq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\leq 1$. **Donc D est le disque fermé de centre $(1,0)$ et de rayon 1.**

2. En polaires, l'inégalité devient $r^2\leq 2r\cos\theta$. Pour $r>0$, elle équivaut à $r\leq 2\cos\theta$, ce qui impose $\cos\theta\geq 0$, donc $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Le point $r=0$ est l'origine, qui appartient à D. **Ainsi, D est décrit par $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $0\leq r\leq 2\cos\theta$.**

3. On calcule $\mathcal{A}(D)=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{\pi}{2}$. **On retrouve l'aire π d'un disque de rayon 1.**

4. On a $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$. Or $\cos^3\theta=\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)$, donc $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4}{3}$. **Le résultat vaut $\frac{32}{9}$.**

5. De même, $\displaystyle\iint_D x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\cdot\frac{8\cos^3\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$. La linéarisation $\cos^4\theta=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta$ donne une intégrale égale à $\frac{3\pi}{8}$. Donc $\displaystyle\iint_D x=\pi$. C'est cohérent : l'abscisse moyenne vaut $\frac{\pi}{\pi}=1$, qui est l'abscisse du centre du disque.

Corrigé de l'exercice 9 : L'intégrale de Gauss

1. La fonction $g(x,y) = e^{-x^2}e^{-y^2}$ est continue et à variables séparées sur le carré C_R. Par Fubini, $\iint_{C_R} g = \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^R e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$. **On obtient $F(R)^2$.**

2. En polaires, Δ_R correspond à $r \in [0,R]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc

$$\iint_{\Delta_R} g = \frac{\pi}{2}\int_0^R e^{-r^2}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right).$$

   Ainsi, $\iint_{\Delta_R} g = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right)$.

3. Si $(x,y) \in \Delta_R$, alors $x \geq 0$ et $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, donc $x \leq R$; de même pour y. Donc $\Delta_R \subset C_R$. Si $(x,y) \in C_R$, alors $x^2 + y^2 \leq 2R^2$, donc $(x,y) \in \Delta_{R\sqrt{2}}$. La figure de l'énoncé illustre ces inclusions. Comme $g \geq 0$, l'intégrale croît avec le domaine. Par conséquent, $\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) \leq F(R)^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2R^2}\right)$.

4. Les deux bornes tendent vers $\frac{\pi}{4}$ quand $R \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, $F(R)^2 \to \frac{\pi}{4}$. Or $F(R) \geq 0$ et la racine carrée est continue. Donc $F(R) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par définition, l'intégrale généralisée converge et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Point de méthode : on ne peut pas passer directement en polaires sur le carré, car ses bornes en r dépendent de θ de façon compliquée. L'encadrement par deux quarts de disque contourne cette difficulté.

Corrigé de l'exercice 10 : Changement de variables affine

1. Les sommets sont les intersections des droites $x + y \in \{0, 2\}$ et $x - y \in \{0, 2\}$. On trouve

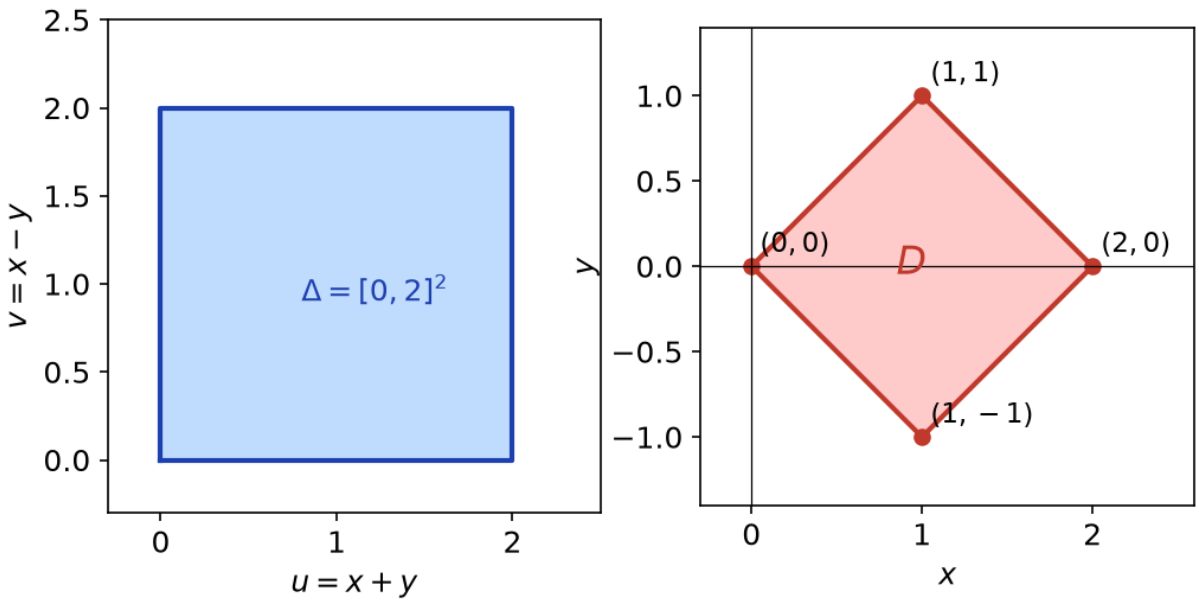
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ **et** $(1,-1)$: D est un carré dont les côtés sont inclinés à $45°$.

2. En additionnant et en soustrayant, $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$. Le jacobien vaut

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Donc $|J| = \frac{1}{2}$ **et** $dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv$ **.** L'application linéaire $(x,y) \to (u,v)$ est bijective et envoie D sur $\Delta = [0,2]^2$, comme le montre la figure ci-dessous.



3. Par la formule du changement de variables, $\mathcal{A}(D) = \iint_{\Delta} \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2} \cdot 4$. **L'aire vaut** 2, ce que confirme le côté $\sqrt{2}$ du carré incliné.

4. La fonction s'écrit $u\,e^{v}$. Donc

$$\iint_D (x+y)e^{x-y} = \frac{1}{2}\int_0^2 u\,du \int_0^2 e^{v}\,dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (e^2 - 1).$$ **Le résultat vaut** $e^2 - 1$ **.**

5. On factorise $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv$. Ainsi,

$$\iint_D (x^2 - y^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 u\,du \int_0^2 v\,dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2.$$ **Le résultat vaut** 2 **.**

Corrigé de l'exercice 11 : Aire et moments d'une ellipse

1. Le jacobien vaut
$$\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ sin\theta & brbr\cos\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr.$$
De plus, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$. **Donc** E **correspond à** $r\in[0,1]$ **et** $\theta\in[0,2\pi]$**, avec** $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$**.**

2. On calcule $\mathcal{A}(E)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = ab\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}$. **L'aire vaut** $\pi\,ab$**.**

3. On a $\iint_E x^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2\,r^2\cos^2\theta\cdot abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = a^3\,b\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^3\,b\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi$.
Le résultat vaut $\frac{\pi\,a^3\,b}{4}$**.**

4. La fonction vaut r^2. Donc l'intégrale vaut $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = ab\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}$. **Le résultat vaut** $\frac{\pi\,ab}{2}$**.** On peut le vérifier avec la question 3 : par symétrie des rôles, $\iint_E \frac{y^2}{b^2} = \frac{\pi\,ab}{4}$, et $\frac{\pi\,a^3\,b}{4a^2}+\frac{\pi\,ab}{4}=\frac{\pi\,ab}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Un domaine limité par des hyperboles

1. Si $(x,y)\in D$, alors $u=xy\in[1,2]$ et $v=\frac{y}{x}\in[1,3]$. Réciproquement, soit $(u,v)\in\Delta$. Si $x>0$ et y conviennent, alors $y=vx$ et $u=vx^2$, donc $x=\sqrt{u/v}$ et $y=vx=\sqrt{uv}$. Ces valeurs vérifient bien $xy=u$ et $\frac{y}{x}=v$.
L'application est donc une bijection de D **sur** Δ**, de réciproque** $(u,v)\to\left(\sqrt{u/v},\sqrt{uv}\right)$**.** Les deux applications sont de classe C^1 sur les ouverts $]0,+\infty[^2$ concernés.

2. On écrit $x=u^{1/2}\,v^{-1/2}$ et $y=u^{1/2}\,v^{1/2}$. Alors

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} + \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2}\cdot\frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v}.$$

Donc $J = \frac{1}{2v}$**, qui est strictement positif.**

3. Par la formule du changement de variables, $\mathcal{A}(D) = \int_1^2\int_1^3 \frac{\mathrm{d}v}{2v}\,\mathrm{d}u = 1\cdot\frac{\ln 3}{2}$. **L'aire vaut** $\frac{\ln 3}{2}$**.**

4. D'abord, $\iint_D xy = \int_1^2 u\,\mathrm{d}u\cdot\int_1^3 \frac{\mathrm{d}v}{2v} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\ln 3}{2}$, donc $\iint_D xy = \frac{3\ln 3}{4}$. Ensuite, $\iint_D \frac{y}{x} = \int_1^2\int_1^3 v\cdot\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot 2$, donc $\iint_D \frac{y}{x} = 1$.

Point de méthode : quand un domaine est limité par des courbes de la forme $\varphi(x,y) = \text{constante}$ et $\psi(x,y) = \text{constante}$, posez $u = \varphi(x,y)$ et $v = \psi(x,y)$. Le domaine devient un rectangle.

Corrigé de l'exercice 13 : Volumes sous une surface

1. La fonction $4 - x^2 - y^2$ est positive sur le disque de rayon 2. Le volume vaut donc $\iint_{2\pi}(4 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur ce disque. En polaires, $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(8 - 4)$. **Le volume vaut** 8π **.**

2. La fonction xy est positive sur $[0,1]\times[0,2]$. Donc le volume vaut $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot 2$. **Le volume vaut** 1 **.**

3. Sur T, $1 - x - y \geq 0$. Donc le volume vaut $\int_0^1\int_0^{1-x}(1 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x$. **Le volume vaut** $\frac{1}{6}$ **.** Ce solide est le tétraèdre de sommets O, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; on retrouve la formule « base fois hauteur sur trois », avec $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$.

Corrigé de l'exercice 14 : Tétraèdre et intégrale triple

1. Le tétraèdre s'écrit $\begin{Bmatrix}(x,y) \in T, \\ ,,\leq z \leq 1-x-|\, y\end{Bmatrix}$, où T est le triangle de l'exercice 4. Par la méthode des piles, $\mathrm{Vol}(V) = \iint_T (1-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Le calcul de l'exercice 13 donne $\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{6}$.

2. Pour $z \in [0,1]$ fixé, $V_z = \begin{Bmatrix}x \geq 0, \\ ,y > 0, \\ ,x +,+ y \leq 1-z\end{Bmatrix}$. C'est un triangle rectangle isocèle de côté $1-z$, d'aire $\frac{(1-z)^2}{2}$. Par tranches,

$$\iiint_V z = \int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

Ainsi, $\iiint_V z = \frac{1}{24}$**.**

3. La cote moyenne vaut $\overline{z} = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$. Or V est invariant par toute permutation des coordonnées. Donc $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z}$. **Le centre de gravité est** $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$**.**

4. Par linéarité et par la même symétrie, $\iiint_V (x+y+z) = 3\iiint_V z = \frac{3}{24}$. **Le résultat vaut** $\frac{1}{8}$**.**

Corrigé de l'exercice 15 : Coordonnées cylindriques et bol parabolique

1. En cylindriques, $x^2+y^2 = r^2$. La condition devient $r^2 \leq z \leq 1$, ce qui impose $r \leq 1$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Ainsi, V **correspond à** $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$ **et** $r^2 \leq z \leq 1$**.**

2. Le jacobien vaut r. Donc $\mathrm{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$. **Le volume vaut** $\frac{\pi}{2}$**.**

3. On intègre d'abord en z : $\int_{r^2}^1 z \, \mathrm{d}z = \frac{1 - r^4}{2}$. Ensuite, $\iiint_V z = 2\pi \int_0^1 \frac{1 - r^4}{2} r \, \mathrm{d}r = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$. **Donc** $\iiint_V z = \frac{\pi}{3}$ **et** $\overline{z} = \frac{\pi/3}{\pi/2} = \frac{2}{3}$**.** Le centre de gravité est plus près du bord supérieur, là où le bol est le plus large.

4. Pour $z \in [0,1]$, la section V_z est le disque $x^2 + y^2 \leq z$, de rayon $\sqrt{z}$ et d'aire $\pi\, z$. Donc $\mathrm{Vol}(V) = \int_0^1 \pi\, z \, \mathrm{d}z$. **On retrouve** $\frac{\pi}{2}$**.**

Corrigé de l'exercice 16 : Coordonnées sphériques, boule et cornet

1. La boule correspond à $r \in [0,R]$, $\varphi \in [0,\pi]$ et $\theta \in [0,2\pi]$, avec le jacobien $r^2 \sin\varphi$. Donc $\mathrm{Vol}(B) = \int_0^R r^2 \, \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi$. **Le volume vaut** $\frac{4}{3}\pi\, R^3$**.**

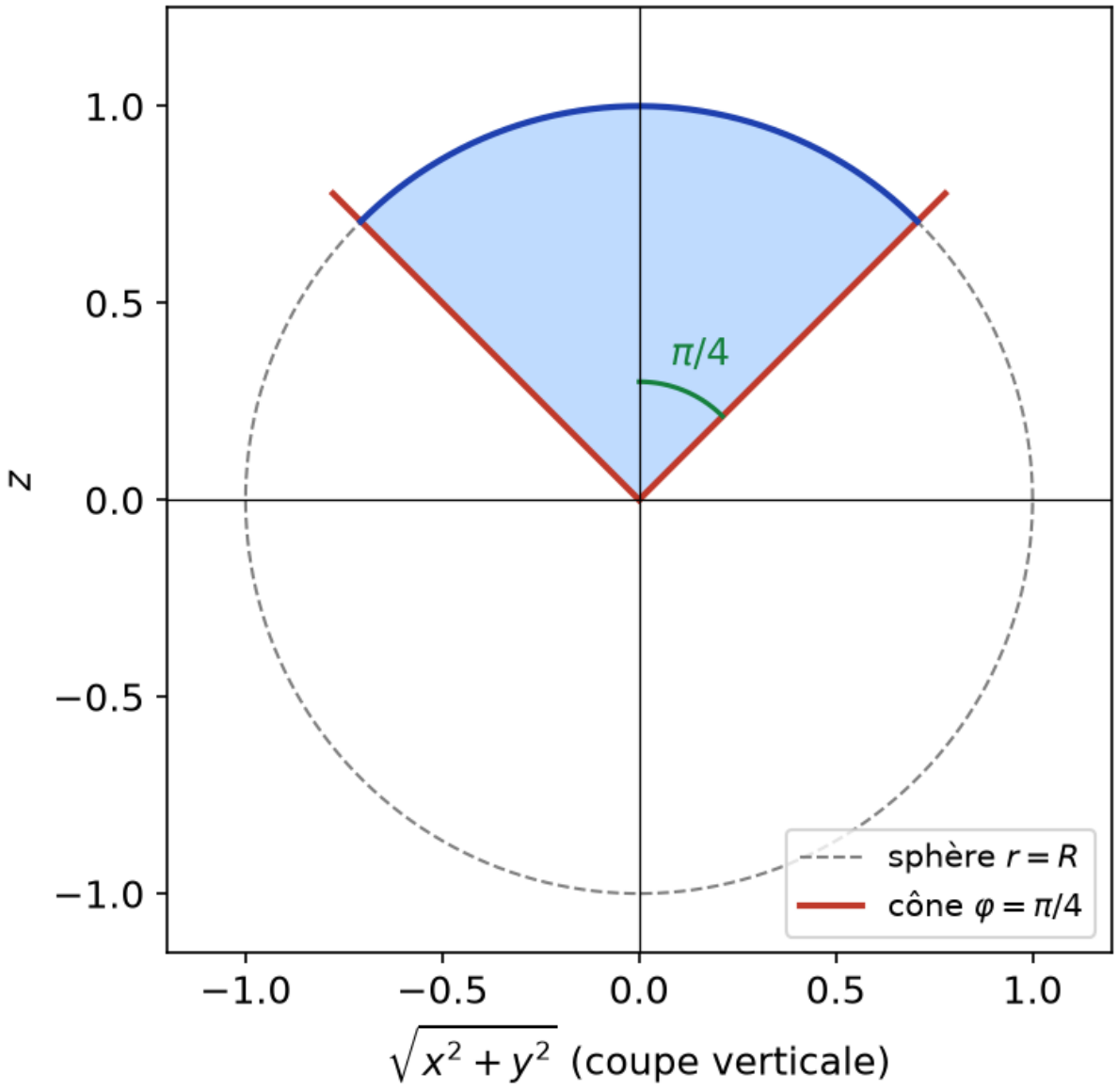
2. La fonction vaut r^2. Ainsi, $\iiint_B (x^2+y^2+z^2) = \int_0^R r^4 \, \mathrm{d}r \cdot 2 \cdot 2\pi$. **Le résultat vaut** $\frac{4\pi\, R^5}{5}$**.**

3. La boule est invariante par permutation des coordonnées. Par le changement de variables correspondant, de jacobien ± 1, on a $\iiint_B x^2 = \iiint_B y^2 = \iiint_B z^2$. Leur somme vaut $\frac{4\pi\, R^5}{5}$. **Donc** $\iiint_B z^2 = \frac{4\pi\, R^5}{15}$**.**

4. La condition $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ s'écrit $r\cos\varphi \geq r\sin\varphi$. Comme $\sin\varphi \geq 0$, elle équivaut à $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. La coupe verticale ci-dessous montre le secteur obtenu. Par conséquent,

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{R} r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{R^3}{3}.$$

Le volume du cornet vaut $\frac{(2-\sqrt{2})\pi\, R^3}{3}$ **.**



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 17 : Longueurs d'arcs

1. On a $\gamma'(t) = (1-\cos t, \sin t)$, donc $|\gamma'(t)|^2 = 2 - 2\cos t = 4\sin^2\frac{t}{2}$. Sur $[0,2\pi]$, $\sin\frac{t}{2} \geq 0$, donc $|\gamma'(t)| = 2\sin\frac{t}{2}$. Ainsi, $L = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4+4$. **La longueur vaut 8.**

2. On a $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$, donc $|\gamma'(t)| = 3|\sin t \cos t| = \frac{3}{2}|\sin 2t|$. Sur une période de longueur $\frac{\pi}{2}$, $\int |\sin 2t|\,\mathrm{d}t = 1$. Donc $L = \frac{3}{2}\cdot 4$. **La longueur vaut 6.**

3. On a $\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{ch}\, x$, car $\mathrm{ch}\, x > 0$. Donc $L = \int_0^1 \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{d}x$. **La longueur vaut $\mathrm{sh}\, 1$.**

4. On a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, de norme $\sqrt{2}$. **La longueur vaut $2\pi\sqrt{2}$.** Autrement dit, en déroulant le cylindre, le tour d'hélice devient la diagonale d'un rectangle de côtés 2π et 2π.

Corrigé de l'exercice 18 : Formes exactes et chemins

1. Posons $P = 3x^2y + y$ et $Q = x^3 + x + 2y$, de classe C^1. On a $\partial_y P = 3x^2 + 1 = \partial_x Q$. **Donc ω_1 est fermée.** Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, donc étoilé, le théorème de Poincaré assure qu'elle est exacte.

2. On intègre P en x : $F(x,y) = x^3 y + xy + c(y)$. Puis $\partial_y F = x^3 + x + c'(y)$ doit valoir Q, donc $c'(y) = 2y$. **Un potentiel est $F(x,y) = x^3y + xy + y^2$.**

3. Directement, avec $x = t$, $y = 2t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}t$:

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_0^1 \Big((6t^3 + 2t) + 2(t^3 + 5t) \Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (8t^3 + 12t)\,\mathrm{d}t = 2 + 6 = 8.$$

Avec le potentiel, $F(1,2) - F(0,0) = 2 + 2 + 4 = 8$. **Les deux calculs donnent 8.**

4. Pour un chemin fermé, le point de départ et le point d'arrivée coïncident. **L'intégrale vaut donc** $F(A) - F(A) = 0$**.**

5. Le long du segment $t \to (t,t)$: $\int_0^1 (t^2 + t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Le long de la parabole $t \to (t,t^2)$: $\int_0^1 (t^4 + t \cdot 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$. Les deux chemins ont les mêmes extrémités, mais $\frac{5}{6} = \frac{25}{30} \neq \frac{26}{30}$. **Donc** ω_2 **n'est pas exacte.** On le voit aussi directement : $\partial_y(y^2) = 2y$ diffère de $\partial_x(x) = 1$, donc ω_2 n'est même pas fermée.

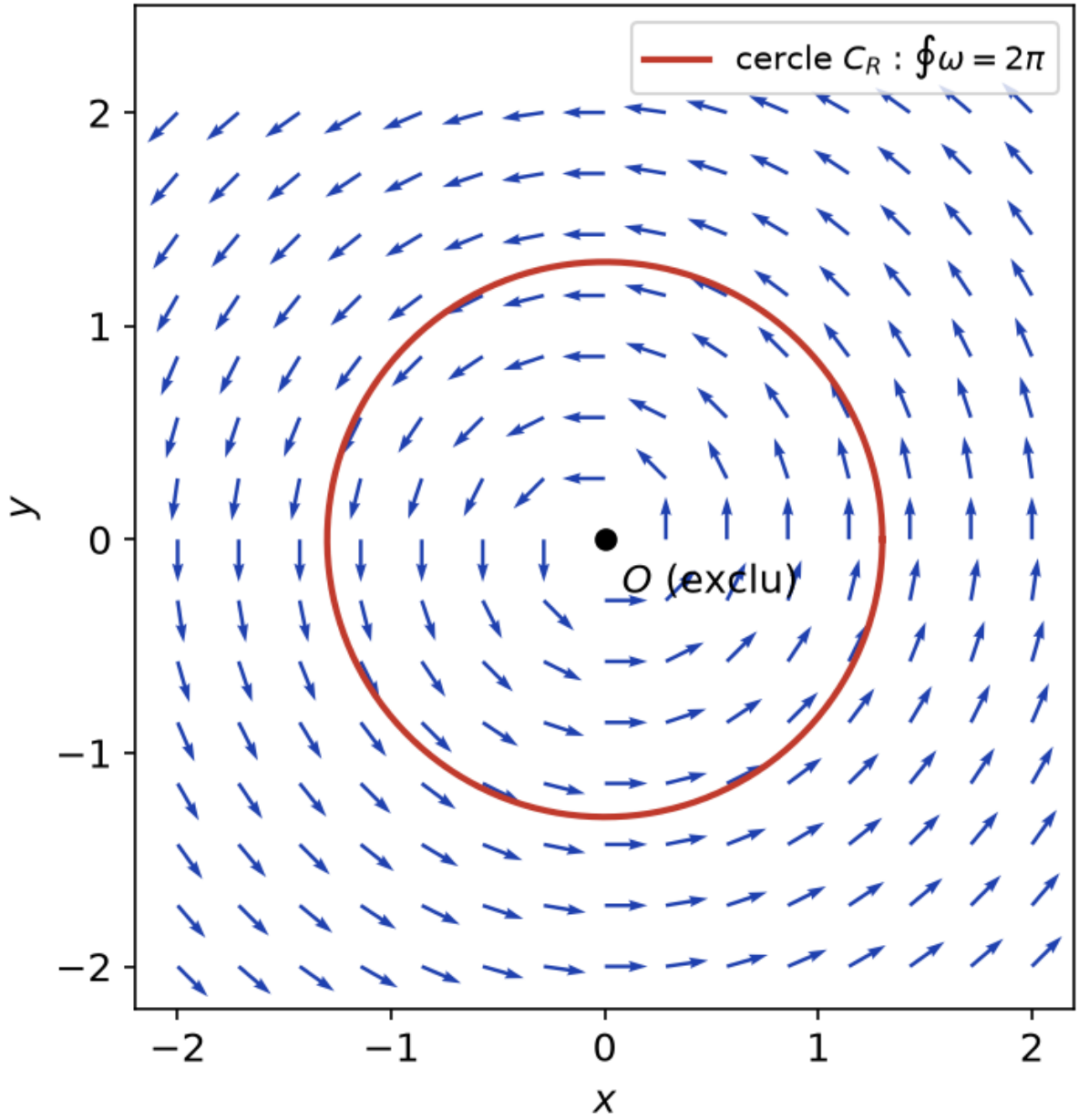
Corrigé de l'exercice 19 : La forme angle

1. Posons $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, de classe C^1 sur U. On calcule
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
Les deux dérivées sont égales : ω **est fermée sur** U**.**

2. On paramètre C_R par $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Alors $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = (R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = R^2\,\mathrm{d}t$, et $x^2 + y^2 = R^2$. Donc $\omega = \mathrm{d}t$ le long du cercle. **Ainsi,** $\oint_{C_R} \omega = 2\pi$**.**

3. Si ω était exacte sur U, son intégrale sur tout chemin fermé de U serait nulle. Or C_R est un chemin fermé de U et l'intégrale vaut 2π. **Donc** ω **n'est pas exacte sur** U, bien qu'elle soit fermée. Ce n'est pas contradictoire : U n'est pas étoilé. La figure ci-dessous montre le champ (P,Q), qui tourne autour de l'origine.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



4. Sur H, F est de classe C^1. On calcule $\partial_x F = \dfrac{-y/x^2}{1+y^2/x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} = P$ et $\partial_y F = \dfrac{1/x}{1+y^2/x^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = Q$. **Donc F est un potentiel de ω sur H.**

5. Pour tout chemin de H allant de $(1,-1)$ à $(1,1)$, l'intégrale vaut $F(1,1) - F(1,-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$. **Elle vaut $\frac{\pi}{2}$.** C'est l'angle balayé par le rayon vecteur, d'où le nom de forme angle.

Corrigé de l'exercice 20 : Vérification de la formule de Green-Riemann

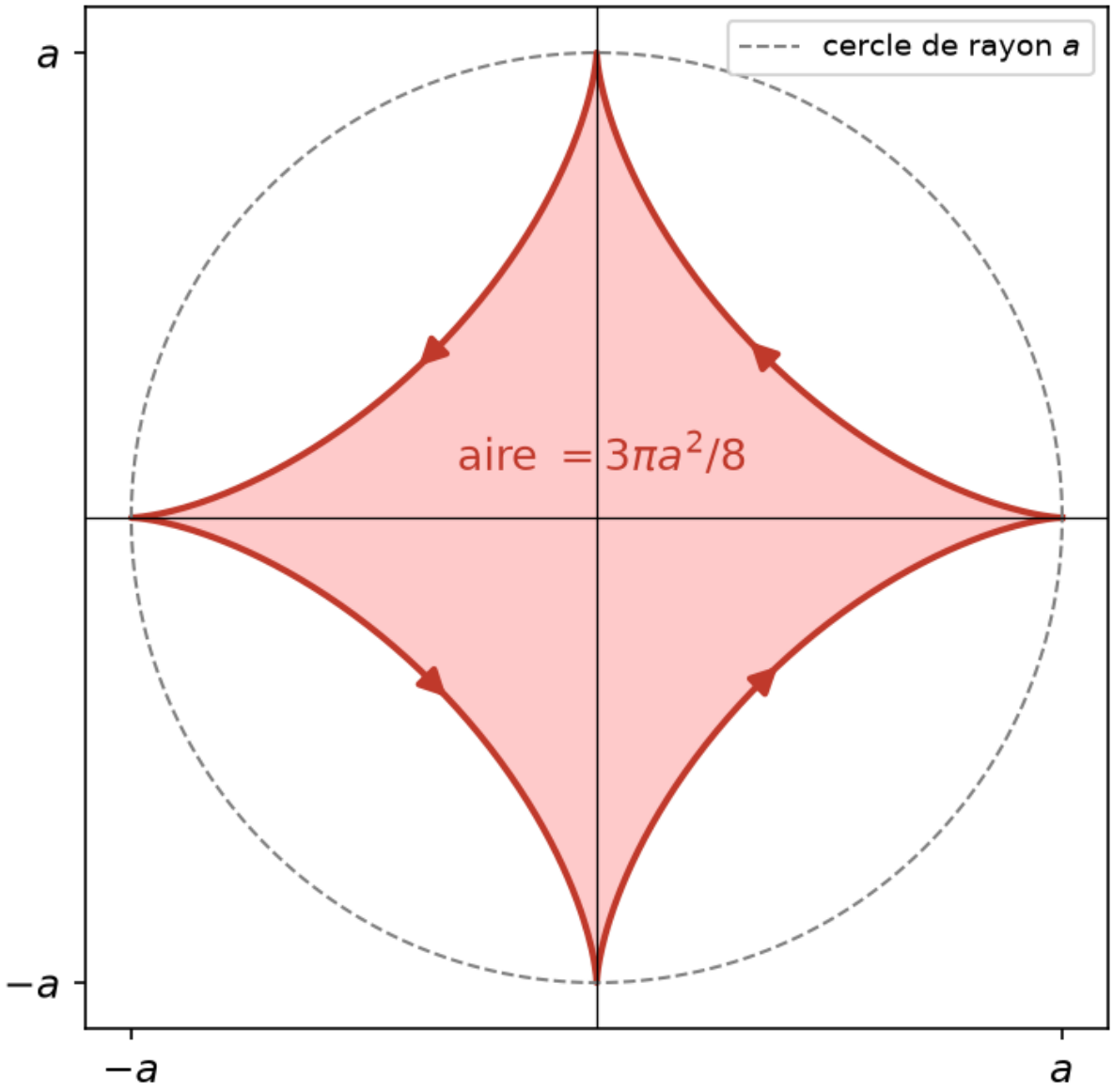
1. On parcourt les côtés dans le sens direct. En bas, $y = 0$, x va de 0 à 1 : $P = 0$ et $\mathrm{d}y = 0$, la contribution est nulle. À droite, $x = 1$, y va de 0 à 1 : $\mathrm{d}x = 0$ et $Q = 1$, la contribution vaut 1. En haut, $y = 1$, x va de 1 à 0 : on obtient $\int_1^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$. À gauche, $x = 0$: $\mathrm{d}x = 0$ et $Q = 0$, la contribution est nulle. **Au total,** $\oint_{\partial D} \omega = \frac{1}{2}$**.**

2. On a $\partial_x Q - \partial_y P = 2x - x = x$. Donc $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot 1 = \frac{1}{2}$. **Les deux membres de la formule valent** $\frac{1}{2}$**.**

Corrigé de l'exercice 21 : Aire par une intégrale curviligne

1. Quand t croît, le point tourne dans le sens direct, comme sur un cercle. Avec $x = a\cos^3 t$ et $y = a\sin^3 t$, on a $x\,y' = 3a^2\cos^4 t\sin^2 t$ et $-y\,x' = 3a^2\sin^4 t\cos^2 t$. Leur somme vaut $3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{3a^2}{4}\sin^2 2t$. Or $\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi$. Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \pi$. **L'aire de l'astroïde vaut** $\frac{3\pi\,a^2}{8}$, soit les trois huitièmes du disque de rayon a, comme l'illustre la figure.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



2. Pour laisser le domaine à gauche, on parcourt d'abord le segment de $(0,0)$ à $(2\pi, 0)$, puis l'arche de $t = 2\pi$ à $t = 0$. Sur le segment, $y = 0$, donc la contribution à $-\oint y\,\mathrm{d}x$ est nulle. Sur l'arche parcourue à l'envers,

$$-\int_{2\pi}^{0} y(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = 2\pi + \pi.$$

L'aire sous une arche de cycloïde vaut 3π, soit trois fois l'aire du cercle qui l'engendre.

Point de méthode : choisissez entre $x\,\mathrm{d}y$, $-y\,\mathrm{d}x$ et la demi-somme selon les morceaux du bord : ici, $-y\,\mathrm{d}x$ annule la contribution du segment.

Corrigé de l'exercice 22 : Green-Riemann autour d'une singularité

1. Sur le côté droit, $x = 1$ et y va de -1 à 1 : $\mathrm{d}x = 0$, donc la contribution vaut $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$. Sur le côté haut, $y = 1$ et x va de 1 à -1 : on obtient $\int_{-1}^{-1} \frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. Sur le côté gauche, $x = -1$ et y va de 1 à -1 : on obtient $\int_{1}^{-1} \frac{-\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$. Enfin, sur le côté bas, $y = -1$ et x va de -1 à 1 : on obtient $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. **Au total,** $\oint_{\Gamma} \omega = 2\pi$**.**

2. Le domaine D est compact et ne contient pas l'origine. Donc P et Q sont de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, qui contient D. La formule de Green-Riemann s'applique. Comme ω est fermée, $\partial_x Q - \partial_y P = 0$. **Donc** $\oint_{\partial D} \omega = 0$**.**

3. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(O,\varepsilon)$ soit contenu dans l'intérieur de D. Le domaine $D_\varepsilon = D \setminus D(O,\varepsilon)$ ne contient plus l'origine. Son bord orienté dans le sens direct se compose de ∂D, parcouru dans le sens direct, et du cercle C_ε, parcouru dans le sens indirect, pour laisser D_ε à gauche. La formule de Green-Riemann, appliquée à D_ε, donne $\oint_{\partial D} \omega - \oint_{C_\varepsilon} \omega = 0$. Par l'exercice 19, $\oint_{C_\varepsilon} \omega = 2\pi$. **Donc** $\oint_{\partial D} \omega = 2\pi$**.** Pour le carré $[-1,1]^2$, qui contient l'origine dans son intérieur, on retrouve bien le résultat de la question 1.

4. Le long de l'ellipse, $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = (ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = ab\,\mathrm{d}t$. De plus, $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t$. L'ellipse est parcourue dans le sens direct et son intérieur contient l'origine. Par la question 3, $\int_0^{2\pi} \frac{ab\,\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = 2\pi$. **En divisant par** ab**, on obtient** $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Point de méthode : pour une forme fermée avec une singularité, isolez-la par un petit cercle. L'intégrale sur le bord ne dépend alors que des singularités entourées.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème, le demi-disque homogène

1. En polaires, D correspond à $r \in [0,R]$ et $\theta \in [0,\pi]$. Donc $\mathcal{A}(D) = \int_0^{\pi}\int_0^{R} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.
   L'aire vaut $\frac{\pi R^2}{2}$**.**

2. On calcule $\iint_D y = \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{R} r^2 \,\mathrm{d}r = 2\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}$. Par ailleurs, $\iint_D x = \int_0^{\pi} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \cdot \frac{R^3}{3} = 0$, ce qu'annonçait la symétrie par rapport à l'axe Oy. Donc $\overline{x} = 0$ et $\overline{y} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$. **Le centre de gravité est** $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$, soit environ $0{,}42\,R$ au-dessus du diamètre.

3. Avec $P = -\frac{y^2}{2}$ et $Q = 0$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on a $\partial_x Q - \partial_y P = y$. Donc $\iint_D y = \oint_{\partial D} -\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x$. Le bord direct se compose du diamètre, parcouru de $(-R,0)$ à $(R,0)$, puis du demi-cercle $t \to (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0,\pi]$. Sur le diamètre, $y = 0$: la contribution est nulle. Sur le demi-cercle, $\mathrm{d}x = -R\sin t\,\mathrm{d}t$, donc
$$\int_0^{\pi} -\frac{R^2\sin^2 t}{2}\,(-R\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{R^3}{2}\int_0^{\pi} \sin^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{R^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2R^3}{3}.$$
   On retrouve $\iint_D y = \frac{2R^3}{3}$**.** On a utilisé $\int_0^{\pi} \sin^3 t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$.

4. En polaires, $I_O = \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi\cdot\frac{R^4}{4}$. **Le moment d'inertie vaut** $\frac{\pi R^4}{4}$**.**

5. Le solide W est l'ensemble des points $(x, \rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ avec $(x,\rho) \in D$ et $\alpha \in [0,2\pi]$. Le jacobien de $(x,\rho,\alpha) \to (x, \rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\rho\sin\alpha \\ 0 & \nu\alpha & [\backslash\mathrm{rhrho?}]\cos\alpha \end{vmatrix} = \rho.$$

Donc $\mathrm{Vol}(W) = \int_0^{2\pi} \left(\iint_D \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\alpha = 2\pi \iint_D y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, en renommant ρ en y.

Avec la question 2, $\mathrm{Vol}(W) = 2\pi \cdot \frac{2R^3}{3}$. **On retrouve $\frac{4}{3}\pi R^3$, volume de la boule.**

Point de méthode : le résultat de la question 5 s'écrit $\mathrm{Vol}(W) = 2\pi\overline{y} \cdot \mathcal{A}(D)$. Cette relation, connue sous le nom de théorème de Guldin, est hors programme mais se redémontre en deux lignes comme ici.

Corrigé de l'exercice 24 : Problème, intersections de cylindres et de sphères

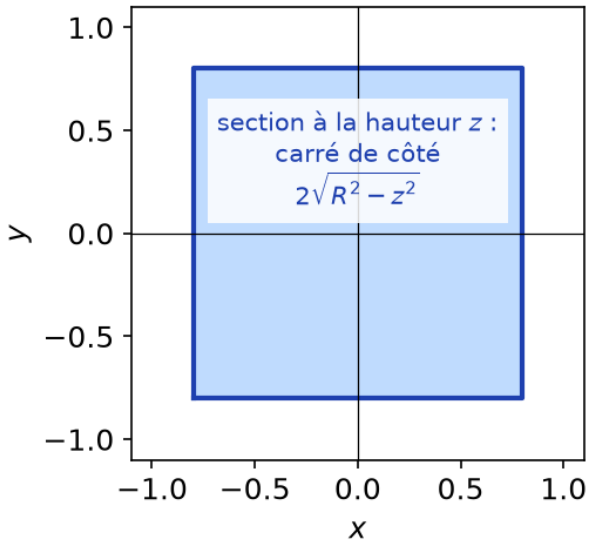
Partie A.

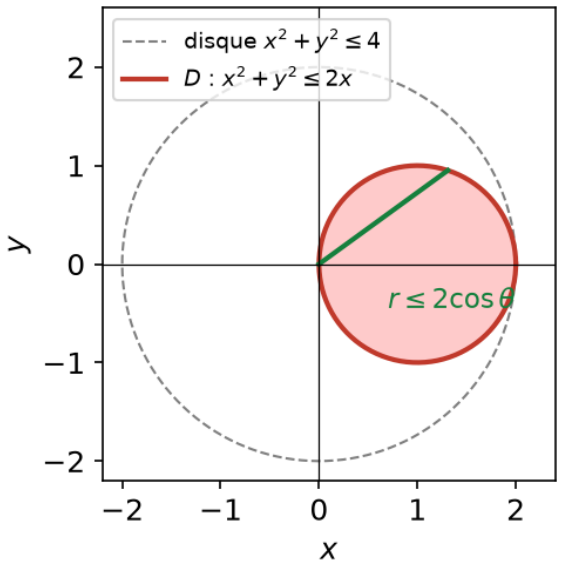
1. À la cote $z \in [-R,R]$, les conditions deviennent $x^2 \leq R^2 - z^2$ et $y^2 \leq R^2 - z^2$. **La section est le carré $\left[-\sqrt{R^2-z^2}, \sqrt{R^2-z^2}\right]^2$, de côté $2\sqrt{R^2-z^2}$ et d'aire $4(R^2-z^2)$.** Pour $|z| > R$, la section est vide.

2. Par la méthode des tranches, $\mathrm{Vol}(V_1) = \int_{-R}^{R} 4(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z = 4\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right)$. **Le volume vaut $\frac{16R^3}{3}$.**

3. Si $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, alors $x^2+z^2 \leq R^2$ et $y^2+z^2 \leq R^2$: la boule est bien contenue dans V_1. À la cote z, sa section est le disque de rayon $\sqrt{R^2-z^2}$, inscrit dans le carré précédent, comme le montre la partie gauche de la figure ci-dessous. Le rapport des aires vaut $\frac{\pi(R^2-z^2)}{4(R^2-z^2)} = \frac{\pi}{4}$ à chaque hauteur. **Par conséquent, le rapport des volumes vaut aussi $\frac{\pi}{4}$** : on vérifie que $\frac{4\pi R^3/3}{16R^3/3} = \frac{\pi}{4}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.





Partie B.

1. Pour $(x,y)\in D$, on a $x\leq 2$, donc $x^2+y^2\leq 2x\leq 4$. La quantité $4-x^2-y^2$ est donc positive. À $(x,y)\in D$ fixé, z décrit l'intervalle $\left[-\sqrt{4-x^2-y^2},\sqrt{4-x^2-y^2}\right]$. Par la méthode des piles, $\mathrm{Vol}(V_2)=2\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. On utilise la description polaire de D obtenue à l'exercice 8. À θ fixé,

$$\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\left[-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2\cos\theta}=\frac{8-(4\sin^2\theta)^{3/2}}{3}=\frac{8-8|\sin\theta|^3}{3}.$$

Ensuite, $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin\theta|^3\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Vol}(V_2)=\frac{16}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)=\frac{16\pi}{3}-\frac{64}{9}.$$

Le volume vaut $\frac{16\pi}{3}-\frac{64}{9}\approx 9{,}64$**.** Ce nombre est bien inférieur au volume $\frac{32\pi}{3}\approx 33{,}5$ de la boule.

Point de méthode : attention à la valeur absolue dans $(\sin^2\theta)^{3/2}=|\sin\theta|^3$. L'oublier donnerait une intégrale de $\sin^3\theta$ nulle sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc un résultat faux.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : intégrales multiples, cours de maths en L2
- Les énoncés : exercices de maths en L2 sur intégrales multiples
- À maîtriser avant : Différentiabilité, formule de Taylor et extrema
- Chapitre précédent : Formes quadratiques, coniques et quadriques
- Chapitre suivant : Variables aléatoires à densité
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L2 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L2 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.