

Intégrales multiples

Corrigé de l'exercice 1 : Sommes de Riemann sur un carré

1. Chaque pavé a pour aire $\frac{1}{n^2}$. Donc

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

Le pas vaut $\frac{1}{n}$ et tend vers 0. Ainsi, $S_n \rightarrow \frac{1}{4}$.

2. La fonction f est continue sur le rectangle $[0,1]^2$. Le théorème de Fubini s'applique, et la fonction est à variables séparées : $\iint_R xy = \int_0^1 x \, dx \cdot \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. On retrouve bien $\frac{1}{4}$.

3. Pour g , on sépare la somme double : $\sum_{i,j} (i+j) = n \sum_i i + n \sum_j j = n^2(n+1)$.

Donc $S_n = \frac{1}{n^3} \cdot n^2(n+1) = \frac{n+1}{n}$, qui tend vers 1. Ensuite, par Fubini,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1. \text{ Les deux méthodes donnent } 1.$$

Point de méthode : une somme double de termes produits se factorise en produit de deux sommes simples, exactement comme une intégrale à variables séparées.

Corrigé de l'exercice 2 : Calculs sur des rectangles par Fubini

Les quatre fonctions sont continues sur des rectangles fermés : le théorème de Fubini s'applique dans les deux ordres.

1. À x fixé, $\int_1^2 (xy^2 + 1) dy = x \cdot \frac{8-1}{3} + 1 = \frac{7x}{3} + 1$. Ensuite,

$$\int_0^1 \left(\frac{7x}{3} + 1 \right) dx = \frac{7}{6} + 1. \text{ Donc } I_1 = \frac{13}{6}.$$

2. À x fixé, $\int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy = \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x + \sin x$. Puis

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x) dx = 1 + 1. \text{ Donc } I_2 = 2.$$

3. Comme $e^{x+y} = e^x e^y$, l'intégrale se factorise : $I_3 = \left(\int_0^1 e^x dx \right)^2$. Ainsi,

$$I_3 = (e-1)^2.$$

4. La fonction est continue, car $1 + xy \geq 1$ sur le carré. On intègre d'abord en y , car $\frac{x}{1+xy}$ est exactement la dérivée de $y \rightarrow \ln(1+xy)$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy = \ln(1+x)$. Ensuite, une primitive de $\ln(1+x)$ est $(1+x)\ln(1+x) - (1+x)$. Donc $I_4 = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$, soit $I_4 = 2\ln 2 - 1$. Dans l'autre ordre, il faudrait intégrer $\frac{x}{1+xy}$ en x , ce qui est nettement plus long.

Corrigé de l'exercice 3 : Un contre-exemple au théorème de Fubini

1. Par la formule de dérivation d'un quotient,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On obtient bien $f(x, y)$.

2. Pour $x \in]0, 1]$ fixé, la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est continue sur $[0, 1]$. D'après la question 1,

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1 + x^2}. \text{ Par conséquent, } I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan 1, \\ \text{donc } I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

3. On constate que $f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -f(x, y)$. Ainsi, pour y fixé,

$$\int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(y, x) dx. \text{ La question 2, où l'on échange les noms des variables,} \\ \text{donne } \int_0^1 f(y, x) dx = \frac{1}{1 + y^2}. \text{ Donc } I_2 = - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2}, \text{ soit } I_2 = -\frac{\pi}{4} \neq I_1.$$

4. Le théorème de Fubini demande une fonction continue sur le rectangle fermé $[0, 1]^2$. Or

$f(x, 0) = \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0$. Donc f n'est pas bornée et ne se prolonge pas par continuité en $(0, 0)$. **L'hypothèse du théorème n'est pas satisfaite : il n'y a aucune contradiction.**

Point de méthode : avant d'échanger deux intégrales, vérifiez toujours la continuité sur un domaine fermé et borné. En troisième année, le théorème de Fubini-Tonelli précisera ces hypothèses.

Corrigé de l'exercice 4 : Intégrales sur un triangle

1. En type 1 : $T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{array} \right\}$. En type 2 : $T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - y \end{array} \right\}$. **Les deux descriptions se lisent sur la figure de l'énoncé.**

2. En intégrant d'abord en y :

$$\iint_T xy = \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.$$

En intégrant d'abord en x , on obtient $\int_0^1 y \cdot \frac{(1-y)^2}{2} dy$, qui est le même calcul avec la lettre y . **Dans les deux ordres, on trouve $\frac{1}{24}$.**

3. À x fixé, $\int_0^{1-x} (x+y) dy = x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}$. Ensuite, $\int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}$ et $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$. Donc $\iint_T (x+y) = \frac{1}{3}$.

4. À x fixé, $\int_0^{1-x} e^{x+y} dy = e^x(e^{1-x} - 1) = e - e^x$. Puis $\int_0^1 (e - e^x) dx = e - (e - 1)$. Ainsi, $\iint_T e^{x+y} = 1$.

Corrigé de l'exercice 5 : Aire et centre de gravité entre deux paraboles

1. Pour $x \in [0,1]$, les deux membres sont positifs. Donc $x^2 \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 \leq x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) \leq 0$, ce qui est vrai sur $[0,1]$. **Le domaine D est un fuseau entre les deux paraboles, qui se coupent en $(0,0)$ et $(1,1)$.**

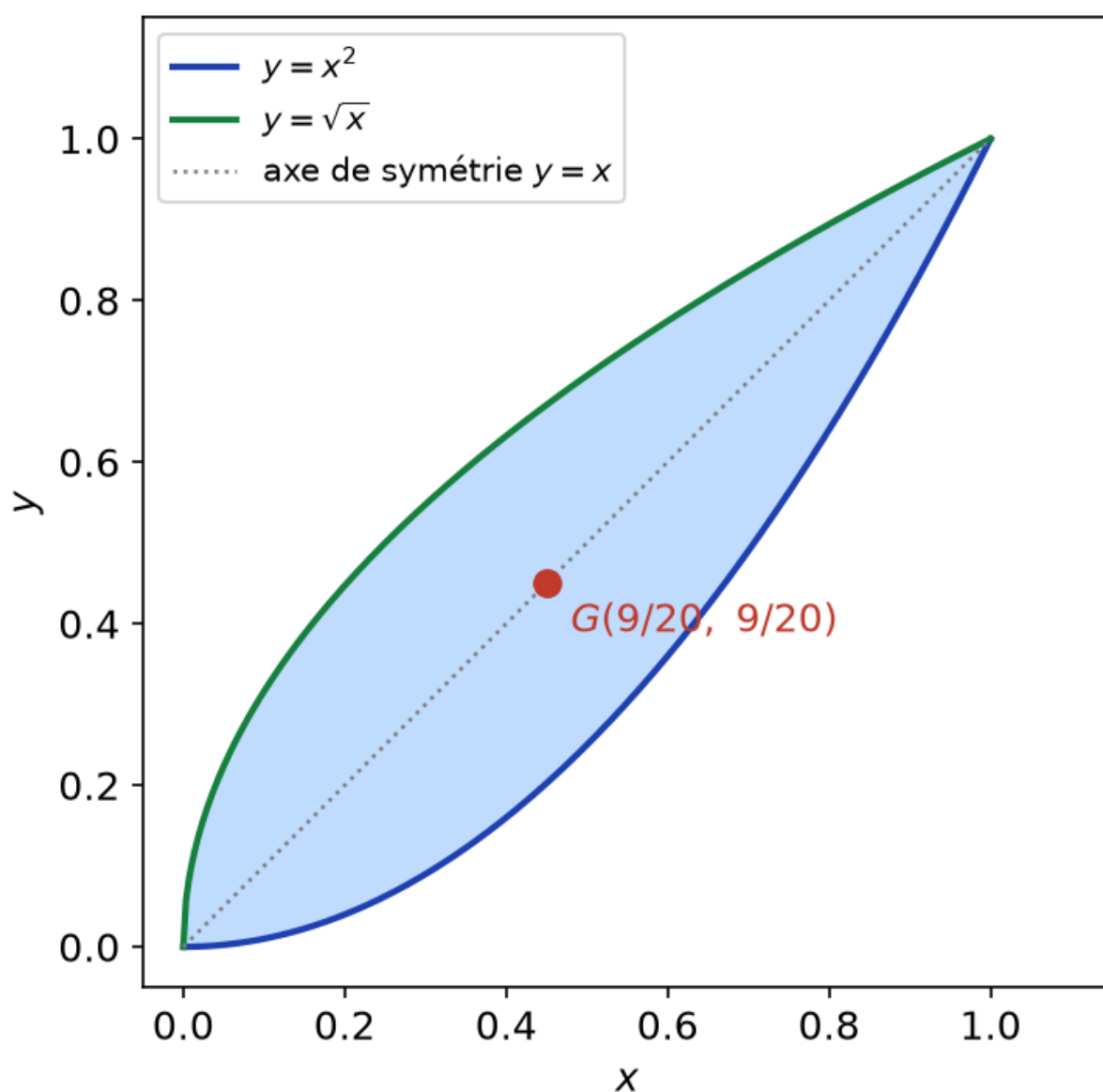
2. Par Fubini sur ce domaine de type 1, $\mathcal{A}(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$. Donc $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{3}$.

3. D'abord, $\iint_D x = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$. Ensuite,

$\iint_D y = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20}$. Les deux intégrales valent $\frac{3}{20}$.

4. Les coordonnées de G sont les moyennes $\bar{x} = \frac{3/20}{1/3} = \frac{9}{20}$ et $\bar{y} = \frac{9}{20}$. Donc

$G = \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20} \right)$. Cette égalité s'explique par une symétrie. En effet, $y \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{y}$ et $y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow x \geq y^2$ pour des nombres positifs. Ainsi, la symétrie $(x,y) \rightarrow (y,x)$ laisse D invariant, et G est sur la droite $y = x$, comme le montre la figure.

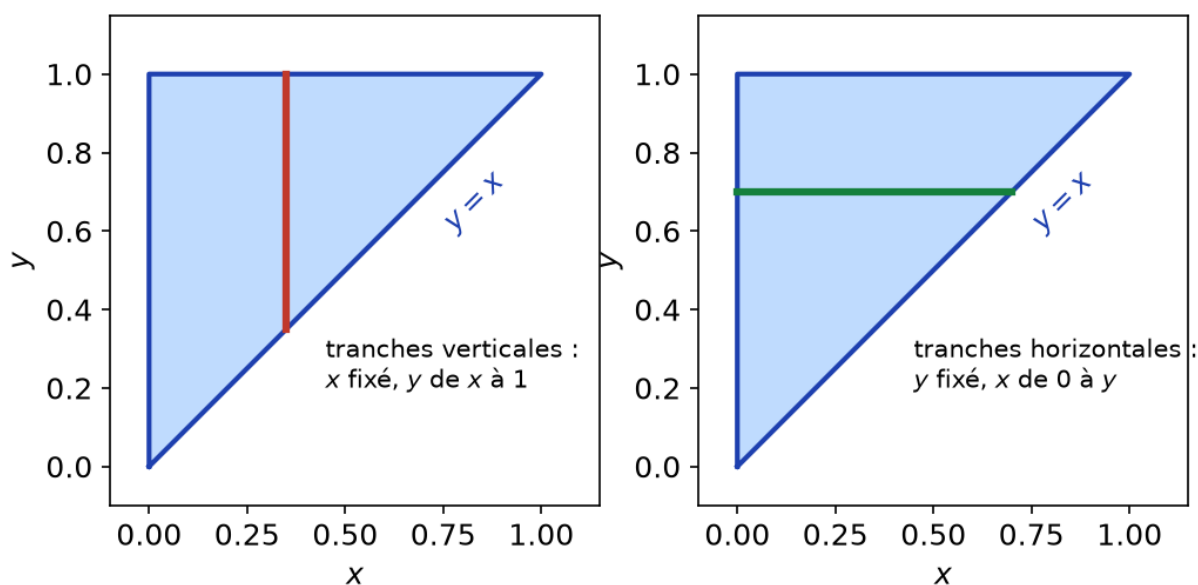


Corrigé de l'exercice 6 : Inversion de l'ordre d'intégration

1. Le domaine est $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ x \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$: c'est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. En type 2, il s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq y \end{array} \right\}$. La figure ci-dessous montre les deux lectures, par tranches verticales puis horizontales. Comme $(x,y) \rightarrow e^{y^2}$ est continue, Fubini donne

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y dx \right) e^{y^2} dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Ainsi, $I = \frac{e-1}{2}$.



2. La fonction $y \rightarrow \frac{\sin y}{y}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. Le domaine est $\{0 \leq x \leq y \leq \pi\}$. Par conséquent,

$$J = \int_0^\pi \left(\int_0^y dx \right) \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^\pi \sin y dy = 2.$$

Donc $J = 2$.

3. Pour $x, y \geq 0$, on a $y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x \leq y^2$. Ainsi, le domaine s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{array} \right\}$. Donc

$$K = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3} \right]_0^1, \text{ soit } K = \frac{e-1}{3}.$$

Point de méthode : quand l'intégrale intérieure bloque, l'échange d'ordre fait souvent apparaître un facteur qui est la dérivée de l'argument, comme y devant e^{y^3} .

Corrigé de l'exercice 7 : Premiers calculs en coordonnées polaires

Dans chaque cas, on remplace $dx dy$ par $r dr d\theta$ et on décrit le domaine par des bornes constantes.

1. Le disque D_1 correspond à $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Donc

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4}. \text{ Le résultat vaut } \frac{\pi}{2}.$$

2. La couronne correspond à $r \in [1,2]$. La fonction est continue sur C , qui ne contient pas

l'origine. Ainsi, $\iint_C \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = 2\pi \ln 2$. **Le résultat vaut** $2\pi \ln 2$.

3. Le quart de disque correspond à $r \in [0,1]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc

$$\iint_Q xy = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}. \text{ Le résultat vaut } \frac{1}{8}.$$

4. On calcule $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$. **Le résultat vaut** $\frac{2\pi}{3}$.

C'est le volume du solide situé entre le disque D_1 et la surface $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, c'est-à-

dire d'une demi-boule de rayon 1. On retrouve bien $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Disque décentré en coordonnées polaires

1. On a $x^2 + y^2 \leq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Donc D est le disque fermé de centre $(1,0)$ et de rayon 1.
2. En polaires, l'inégalité devient $r^2 \leq 2r\cos\theta$. Pour $r > 0$, elle équivaut à $r \leq 2\cos\theta$, ce qui impose $\cos\theta \geq 0$, donc $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Le point $r = 0$ est l'origine, qui appartient à D . Ainsi, D est décrit par $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \leq r \leq 2\cos\theta$.

3. On calcule $\mathcal{A}(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\theta \, d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. On retrouve l'aire π d'un disque de rayon 1.

4. On a $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \, dr \, d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta$. Or $\cos^3\theta = \cos\theta (1 - \sin^2\theta)$, donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}$. Le résultat vaut $\frac{32}{9}$.

5. De même, $\iint_D x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \cdot \frac{8\cos^3\theta}{3} \, d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta$. La linéarisation $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$ donne une intégrale égale à $\frac{3\pi}{8}$. Donc $\iint_D x = \pi$. C'est cohérent : l'abscisse moyenne vaut $\frac{\pi}{\pi} = 1$, qui est l'abscisse du centre du disque.

Corrigé de l'exercice 9 : L'intégrale de Gauss

1. La fonction $g(x,y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$ est continue et à variables séparées sur le carré C_R . Par

Fubini,
$$\iint_{C_R} g = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy. \text{ On obtient } F(R)^2.$$

2. En polaires, Δ_R correspond à $r \in [0, R]$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc

$$\iint_{\Delta_R} g = \frac{\pi}{2} \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

Ainsi,
$$\iint_{\Delta_R} g = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

3. Si $(x,y) \in \Delta_R$, alors $x \geq 0$ et $x^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, donc $x \leq R$; de même pour y . Donc $\Delta_R \subset C_R$. Si $(x,y) \in C_R$, alors $x^2 + y^2 \leq R^2$, donc $(x,y) \in \Delta_{R\sqrt{2}}$.

La figure de l'énoncé illustre ces inclusions. Comme $g \geq 0$, l'intégrale croît avec le domaine. Par conséquent, $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq F(R)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$.

4. Les deux bornes tendent vers $\frac{\pi}{4}$ quand $R \rightarrow +\infty$. Par le théorème des gendarmes, $F(R)^2 \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Or $F(R) \geq 0$ et la racine carrée est continue. Donc $F(R) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par

définition, l'intégrale généralisée converge et
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Point de méthode : on ne peut pas passer directement en polaires sur le carré, car ses bornes en r dépendent de θ de façon compliquée. L'encadrement par deux quarts de disque contourne cette difficulté.

Corrigé de l'exercice 10 : Changement de variables affine

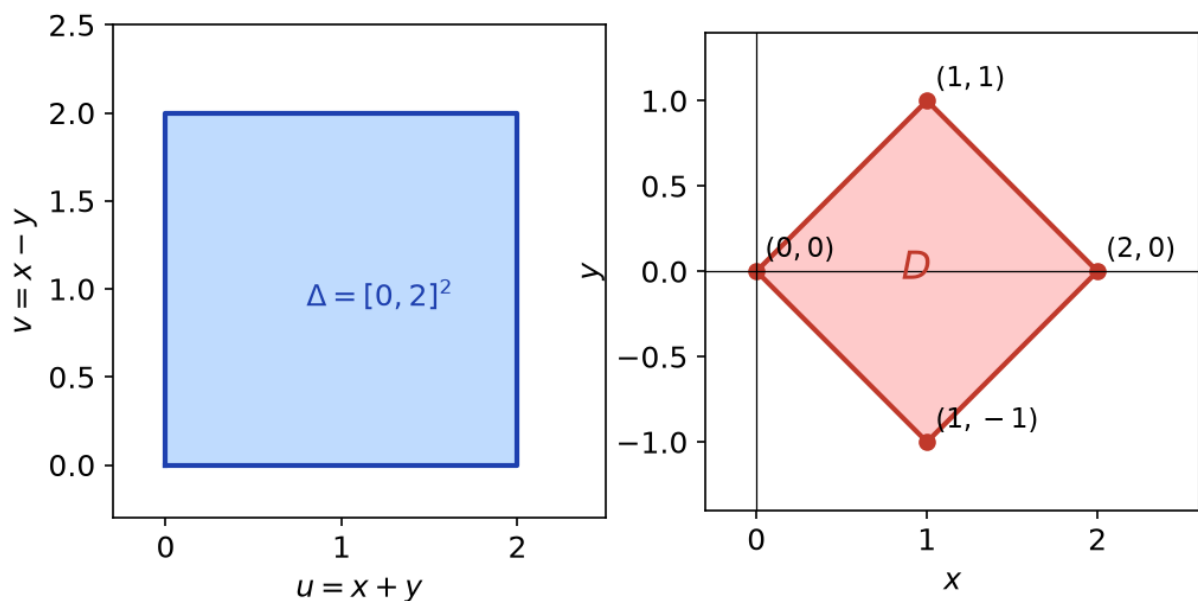
1. Les sommets sont les intersections des droites $x + y \in \{0, 2\}$ et $x - y \in \{0, 2\}$. On trouve

$(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ et $(1,-1)$: D est un carré dont les côtés sont inclinés à 45° .

2. En additionnant et en soustrayant, $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$. Le jacobien vaut

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Donc $|J| = \frac{1}{2}$ et $dx dy = \frac{1}{2} du dv$. L'application linéaire $(x,y) \rightarrow (u,v)$ est bijective et envoie D sur $\Delta = [0,2]^2$, comme le montre la figure ci-dessous.



3. Par la formule du changement de variables, $\mathcal{A}(D) = \iint_{\Delta} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \cdot 4$. **L'aire vaut 2**, ce que confirme le côté $\sqrt{2}$ du carré incliné.

4. La fonction s'écrit $u e^v$. Donc

$$\iint_D (x+y)e^{x-y} = \frac{1}{2} \int_0^2 u du \int_0^2 e^v dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (e^2 - 1). \text{ **Le résultat vaut } e^2 - 1.**}$$

5. On factorise $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv$. Ainsi,

$$\iint_D (x^2 - y^2) = \frac{1}{2} \int_0^2 u du \int_0^2 v dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2. \text{ **Le résultat vaut 2.}**}$$

Corrigé de l'exercice 11 : Aire et moments d'une ellipse

1. Le jacobien vaut

$$\begin{vmatrix} a \cos \theta & -a r \sin \theta \\ b r \sin \theta & b r \cos \theta \end{vmatrix} = a b r \cos^2 \theta + a b r \sin^2 \theta = a b r.$$

De plus, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$. Donc E correspond à $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec $dx dy = a b r dr d\theta$.

2. On calcule $\mathcal{A}(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a b r dr d\theta = a b \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}$. L'aire vaut $\pi a b$.

3. On a $\iint_E x^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a^2 r^2 \cos^2 \theta \cdot a b r dr d\theta = a^3 b \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = a^3 b \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$.
Le résultat vaut $\frac{\pi a^3 b}{4}$.

4. La fonction vaut r^2 . Donc l'intégrale vaut $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot a b r dr d\theta = a b \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}$. Le résultat vaut $\frac{\pi a b}{2}$. On peut le vérifier avec la question 3 : par symétrie des rôles, $\iint_E \frac{y^2}{b^2} = \frac{\pi a b}{4}$, et $\frac{\pi a^3 b}{4 a^2} + \frac{\pi a b}{4} = \frac{\pi a b}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Un domaine limité par des hyperboles

1. Si $(x,y) \in D$, alors $u = xy \in [1,2]$ et $v = \frac{y}{x} \in [1,3]$. Réciproquement, soit $(u,v) \in \Delta$. Si $x > 0$ et y conviennent, alors $y = vx$ et $u = vx^2$, donc $x = \sqrt{u/v}$ et $y = vx = \sqrt{uv}$. Ces valeurs vérifient bien $xy = u$ et $\frac{y}{x} = v$.

L'application est donc une bijection de D sur Δ , de réciproque

$(u,v) \rightarrow (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$. Les deux applications sont de classe C^1 sur les ouverts $]0, +\infty[^2$ concernés.

2. On écrit $x = u^{1/2} v^{-1/2}$ et $y = u^{1/2} v^{1/2}$. Alors

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} u^{1/2} v^{-1/2} + \frac{1}{2} u^{1/2} v^{-3/2} \cdot \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{1/2} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v}.$$

Donc $J = \frac{1}{2v}$, qui est strictement positif.

3. Par la formule du changement de variables, $\mathcal{A}(D) = \int_1^2 \int_1^3 \frac{dv}{2v} du = 1 \cdot \frac{\ln 3}{2}$. **L'aire vaut $\frac{\ln 3}{2}$.**

4. D'abord, $\iint_D xy = \int_1^2 u du \cdot \int_1^3 \frac{dv}{2v} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\ln 3}{2}$, donc $\iint_D xy = \frac{3 \ln 3}{4}$. Ensuite,

$$\iint_D \frac{y}{x} = \int_1^2 \int_1^3 v \cdot \frac{1}{2v} dv du = \frac{1}{2} \cdot 2, \text{ donc } \iint_D \frac{y}{x} = 1.$$

Point de méthode : quand un domaine est limité par des courbes de la forme $\varphi(x,y) = \text{constante}$ et $\psi(x,y) = \text{constante}$, posez $u = \varphi(x,y)$ et $v = \psi(x,y)$. Le domaine devient un rectangle.

Corrigé de l'exercice 13 : Volumes sous une surface

1. La fonction $4 - x^2 - y^2$ est positive sur le disque de rayon 2. Le volume vaut donc

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy \text{ sur ce disque. En polaires,}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 2\pi(8 - 4). \text{ **Le volume vaut } 8\pi.**}$$

2. La fonction xy est positive sur $[0,1] \times [0,2]$. Donc le volume vaut

$$\int_0^1 x dx \int_0^2 y dy = \frac{1}{2} \cdot 2. \text{ **Le volume vaut } 1.**}$$

3. Sur T , $1 - x - y \geq 0$. Donc le volume vaut

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx. \text{ **Le volume vaut } \frac{1}{6}.** Ce solide est le$$

tétraèdre de sommets O , $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; on retrouve la formule « base fois hauteur sur trois », avec $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.

Corrigé de l'exercice 14 : Tétraèdre et intégrale triple

1. Le tétraèdre s'écrit $\{(x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$, où T est le triangle de l'exercice 4. Par la méthode des piles, $\text{Vol}(V) = \iint_T (1 - x - y) dx dy$. Le calcul de l'exercice 13 donne $\text{Vol}(V) = \frac{1}{6}$.

2. Pour $z \in [0, 1]$ fixé, $V_z = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1 - z \end{array} \right\}$. C'est un triangle rectangle isocèle de côté $1 - z$, d'aire $\frac{(1-z)^2}{2}$. Par tranches,

$$\iiint_V z = \int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.$$

Ainsi, $\iiint_V z = \frac{1}{24}$.

3. La cote moyenne vaut $\bar{z} = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$. Or V est invariant par toute permutation des coordonnées. Donc $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. **Le centre de gravité est** $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$.

4. Par linéarité et par la même symétrie, $\iiint_V (x + y + z) = 3 \iiint_V z = \frac{3}{24}$. **Le résultat vaut** $\frac{1}{8}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Coordonnées cylindriques et bol parabolique

1. En cylindriques, $x^2 + y^2 = r^2$. La condition devient $r^2 \leq z \leq 1$, ce qui impose $r \leq 1$.

Ainsi, V correspond à $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$ et $r^2 \leq z \leq 1$.

2. Le jacobien vaut r . Donc $\text{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \, d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$. Le volume vaut $\frac{\pi}{2}$.

3. On intègre d'abord en z : $\int_{r^2}^1 z \, dz = \frac{1 - r^4}{2}$. Ensuite,

$$\iiint_V z = 2\pi \int_0^1 \frac{1 - r^4}{2} r \, dr = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Donc $\iiint_V z = \frac{\pi}{3}$ et $\bar{z} = \frac{\pi/3}{\pi/2} = \frac{2}{3}$. Le centre de gravité est plus près du bord supérieur, là où le bol est le plus large.

4. Pour $z \in [0, 1]$, la section V_z est le disque $x^2 + y^2 \leq z$, de rayon $\sqrt{z}$ et d'aire πz .
Donc $\text{Vol}(V) = \int_0^1 \pi z \, dz$. On retrouve $\frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 16 : Coordonnées sphériques, boule et cornet

1. La boule correspond à $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec le jacobien $r^2 \sin \varphi$.
Donc $\text{Vol}(B) = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi$. Le volume vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$.

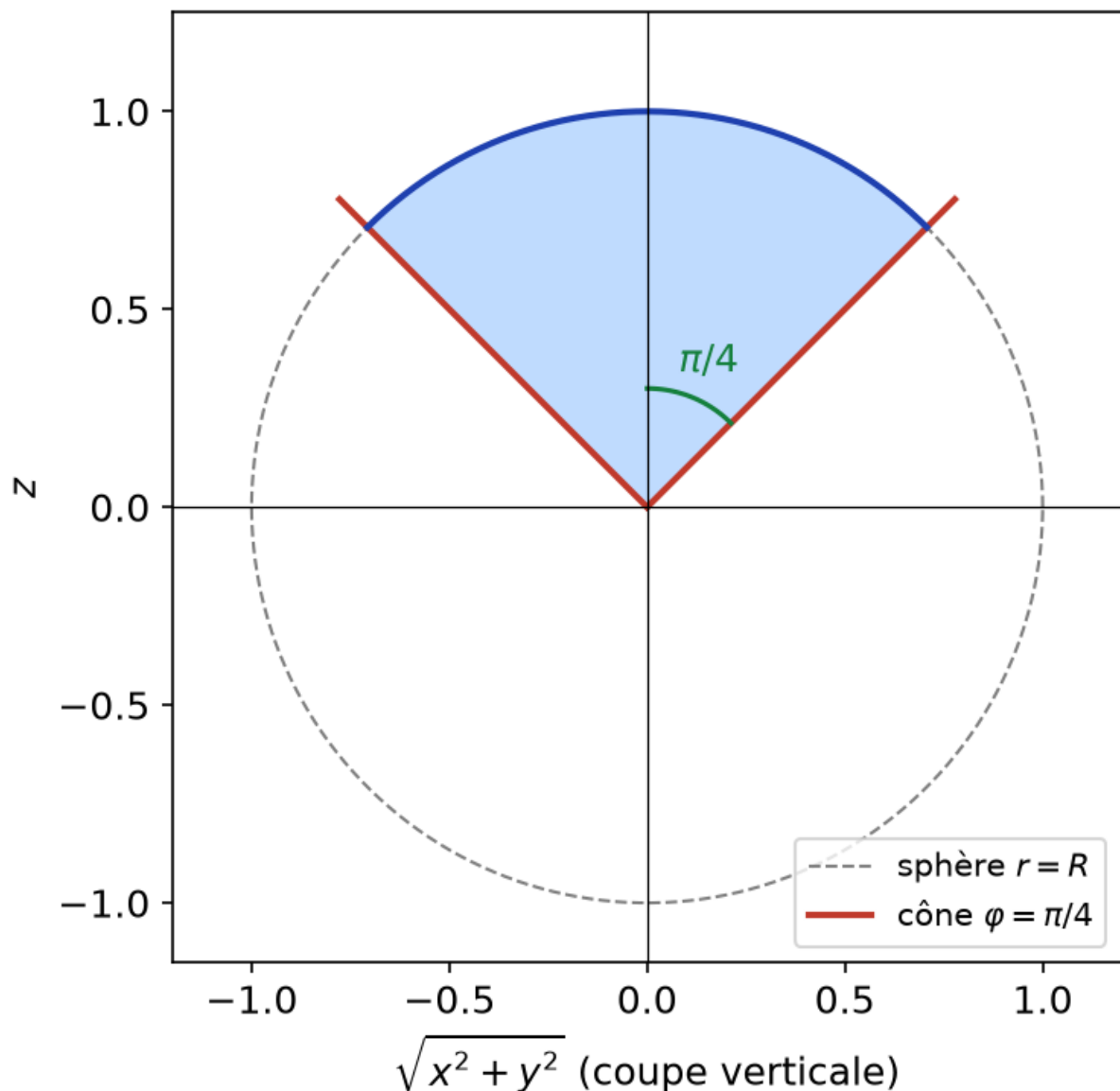
2. La fonction vaut r^2 . Ainsi, $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) = \int_0^R r^4 \, dr \cdot 2 \cdot 2\pi$. Le résultat vaut $\frac{4\pi R^5}{5}$.

3. La boule est invariante par permutation des coordonnées. Par le changement de variables correspondant, de jacobien ± 1 , on a $\iiint_B x^2 = \iiint_B y^2 = \iiint_B z^2$. Leur somme vaut $\frac{4\pi R^5}{5}$. Donc $\iiint_B z^2 = \frac{4\pi R^5}{15}$.

4. La condition $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ s'écrit $r \cos \varphi \geq r \sin \varphi$. Comme $\sin \varphi \geq 0$, elle équivaut à $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. La coupe verticale ci-dessous montre le secteur obtenu. Par conséquent,

$$\text{Vol}(K) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^R r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{R^3}{3}.$$

Le volume du cornet vaut $\frac{(2 - \sqrt{2})\pi R^3}{3}$.



Corrigé de l'exercice 17 : Longueurs d'arcs

1. On a $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, donc $|\gamma'(t)|^2 = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$. Sur $[0, 2\pi]$, $\sin \frac{t}{2} \geq 0$, donc $|\gamma'(t)| = 2\sin \frac{t}{2}$. Ainsi, $L = \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{t}{2} dt = 4 + 4$. **La longueur vaut 8.**
2. On a $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$, donc $|\gamma'(t)| = 3|\sin t \cos t| = \frac{3}{2}|\sin 2t|$. Sur une période de longueur $\frac{\pi}{2}$, $\int |\sin 2t| dt = 1$. Donc $L = \frac{3}{2} \cdot 4$. **La longueur vaut 6.**
3. On a $\sqrt{1 + \text{sh}^2 x} = \text{ch } x$, car $\text{ch } x > 0$. Donc $L = \int_0^1 \text{ch } x dx$. **La longueur vaut sh 1.**
4. On a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, de norme $\sqrt{2}$. **La longueur vaut $2\pi\sqrt{2}$.** Autrement dit, en déroulant le cylindre, le tour d'hélice devient la diagonale d'un rectangle de côtés 2π et 2π .

Corrigé de l'exercice 18 : Formes exactes et chemins

1. Posons $P = 3x^2y + y$ et $Q = x^3 + x + 2y$, de classe C^1 . On a $\partial_y P = 3x^2 + 1 = \partial_x Q$. **Donc ω_1 est fermée.** Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, donc étoilé, le théorème de Poincaré assure qu'elle est exacte.
2. On intègre P en x : $F(x, y) = x^3 y + xy + c(y)$. Puis $\partial_y F = x^3 + x + c'(y)$ doit valoir Q , donc $c'(y) = 2y$. **Un potentiel est $F(x, y) = x^3 y + xy + y^2$.**
3. Directement, avec $x = t$, $y = 2t$, $dx = dt$ et $dy = 2 dt$:

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_0^1 ((6t^3 + 2t) + 2(t^3 + 5t)) dt = \int_0^1 (8t^3 + 12t) dt = 2 + 6 = 8.$$

Avec le potentiel, $F(1, 2) - F(0, 0) = 2 + 2 + 4 = 8$. **Les deux calculs donnent 8.**

4. Pour un chemin fermé, le point de départ et le point d'arrivée coïncident. **L'intégrale vaut donc**
 $F(A) - F(A) = 0$.

5. Le long du segment $t \rightarrow (t, t) : \int_0^1 (t^2 + t) dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Le long de la parabole

$t \rightarrow (t, t^2) : \int_0^1 (t^4 + t \cdot 2t) dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$. Les deux chemins ont les mêmes extrémités, mais $\frac{5}{6} = \frac{25}{30} \neq \frac{26}{30}$. **Donc ω_2 n'est pas exacte.** On le voit aussi directement : $\partial_y(y^2) = 2y$ diffère de $\partial_x(x) = 1$, donc ω_2 n'est même pas fermée.

Corrigé de l'exercice 19 : La forme angle

1. Posons $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, de classe C^1 sur U . On calcule

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

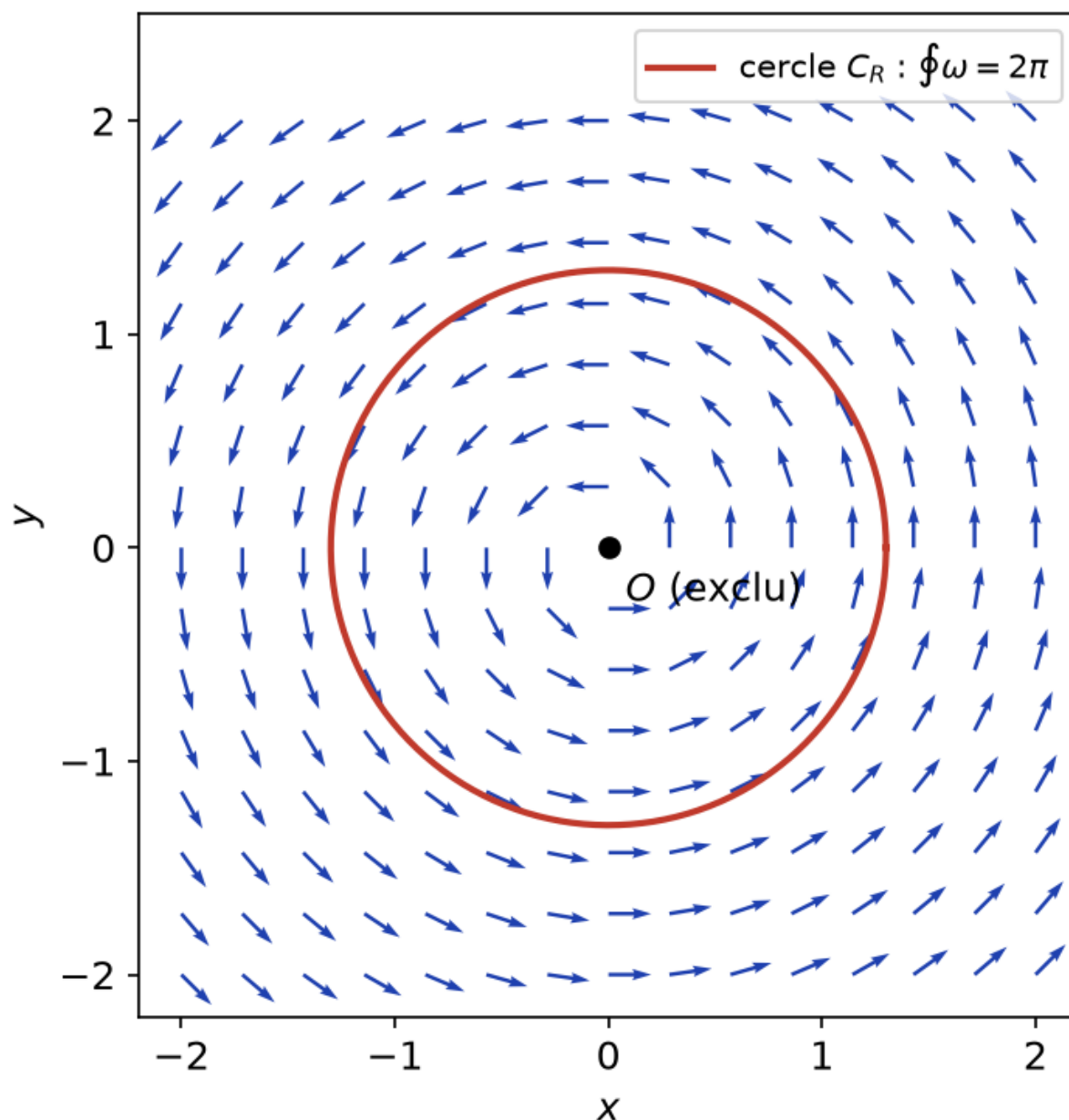
Les deux dérivées sont égales : ω est fermée sur U .

2. On paramètre C_R par $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$-y dx + x dy = (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) dt = R^2 dt, \text{ et } x^2 + y^2 = R^2. \text{ Donc}$$

$$\omega = dt \text{ le long du cercle. Ainsi, } \oint_{C_R} \omega = 2\pi.$$

3. Si ω était exacte sur U , son intégrale sur tout chemin fermé de U serait nulle. Or C_R est un chemin fermé de U et l'intégrale vaut 2π . **Donc ω n'est pas exacte sur U** , bien qu'elle soit fermée. Ce n'est pas contradictoire : U n'est pas étoilé. La figure ci-dessous montre le champ (P, Q) , qui tourne autour de l'origine.



4. Sur H , F est de classe C^1 . On calcule $\partial_x F = \frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = P$ et $\partial_y F = \frac{1/x}{1+y^2/x^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = Q$. **Donc F est un potentiel de ω sur H .**

5. Pour tout chemin de H allant de $(1,-1)$ à $(1,1)$, l'intégrale vaut

$F(1,1) - F(1,-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$. **Elle vaut $\frac{\pi}{2}$.** C'est l'angle balayé par le rayon vecteur, d'où le nom de forme angle.

Corrigé de l'exercice 20 : Vérification de la formule de Green-Riemann

1. On parcourt les côtés dans le sens direct. En bas, $y = 0$, x va de 0 à 1 : $P = 0$ et $dy = 0$, la contribution est nulle. À droite, $x = 1$, y va de 0 à 1 : $dx = 0$ et $Q = 1$, la contribution vaut 1. En haut, $y = 1$, x va de 1 à 0 : on obtient

$$\int_1^0 x \, dx = -\frac{1}{2}. \text{ À gauche, } x = 0 : dx = 0 \text{ et } Q = 0, \text{ la contribution est nulle. Au total, } \oint_{\partial D} \omega = \frac{1}{2}.$$

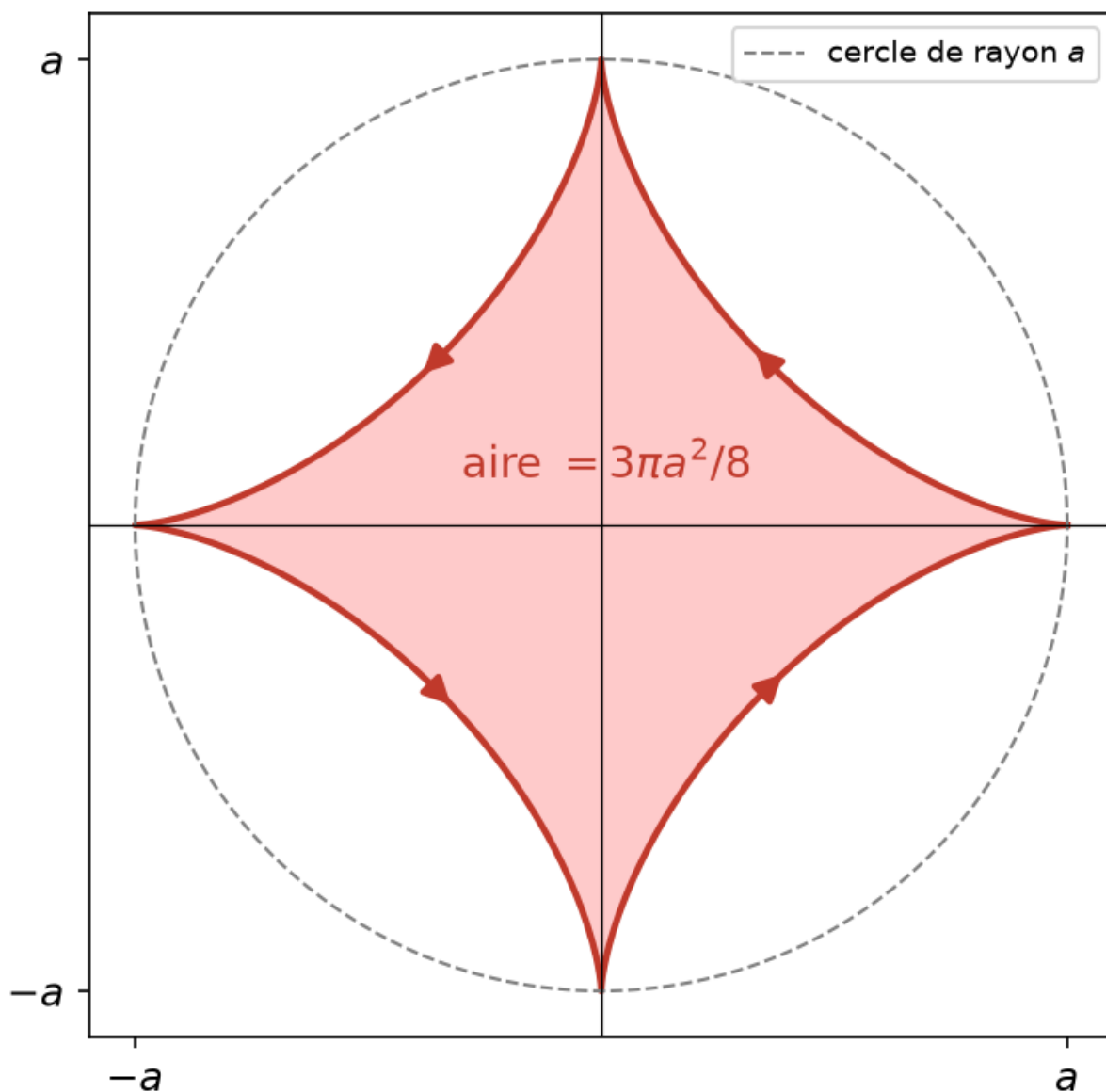
2. On a $\partial_x Q - \partial_y P = 2x - x = x$. Donc $\iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Les deux membres de la formule valent $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Aire par une intégrale curviligne

1. Quand t croît, le point tourne dans le sens direct, comme sur un cercle. Avec $x = a \cos^3 t$ et $y = a \sin^3 t$, on a $x y' = 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t$ et $-y x' = 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t$. Leur

somme vaut $3a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{3a^2}{4} \sin^2 2t$. Or $\int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, dt = \pi$.

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \pi$. **L'aire de l'astroïde vaut $\frac{3\pi a^2}{8}$** , soit les trois huitièmes du disque de rayon a , comme l'illustre la figure.



2. Pour laisser le domaine à gauche, on parcourt d'abord le segment de $(0,0)$ à $(2\pi, 0)$, puis l'arche de $t = 2\pi$ à $t = 0$. Sur le segment, $y = 0$, donc la contribution à $-\oint y \, dx$ est nulle. Sur l'arche parcourue à l'envers,

$$-\int_{2\pi}^0 y(t) x'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi + \pi.$$

L'aire sous une arche de cycloïde vaut 3π , soit trois fois l'aire du cercle qui l'engendre.

Point de méthode : choisissez entre $x \, dy$, $-y \, dx$ et la demi-somme selon les morceaux du bord : ici, $-y \, dx$ annule la contribution du segment.

Corrigé de l'exercice 22 : Green-Riemann autour d'une singularité

1. Sur le côté droit, $x = 1$ et y va de -1 à 1 : $dx = 0$, donc la contribution vaut

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} . \text{ Sur le côté haut, } y = 1 \text{ et } x \text{ va de } 1 \text{ à } -1 : \text{ on obtient}$$

$$\int_1^{-1} \frac{-dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} . \text{ Sur le côté gauche, } x = -1 \text{ et } y \text{ va de } 1 \text{ à } -1 : \text{ on obtient}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{-dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} . \text{ Enfin, sur le côté bas, } y = -1 \text{ et } x \text{ va de } -1 \text{ à } 1 : \text{ on obtient}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} . \text{ Au total, } \oint_{\Gamma} \omega = 2\pi .$$

2. Le domaine D est compact et ne contient pas l'origine. Donc P et Q sont de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, qui contient D . La formule de Green-Riemann s'applique. Comme

$$\omega \text{ est fermée, } \partial_x Q - \partial_y P = 0 . \text{ Donc } \oint_{\partial D} \omega = 0 .$$

3. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(O, \varepsilon)$ soit contenu dans l'intérieur de D . Le domaine $D_\varepsilon = D \setminus D(O, \varepsilon)$ ne contient plus l'origine. Son bord orienté dans le sens direct se compose de ∂D , parcouru dans le sens direct, et du cercle C_ε , parcouru dans le sens indirect, pour laisser D_ε à gauche. La formule de Green-Riemann, appliquée à D_ε , donne

$$\oint_{\partial D} \omega - \oint_{C_\varepsilon} \omega = 0 . \text{ Par l'exercice 19, } \oint_{C_\varepsilon} \omega = 2\pi . \text{ Donc } \oint_{\partial D} \omega = 2\pi . \text{ Pour le carré } [-1,1]^2, \text{ qui contient l'origine dans son intérieur, on retrouve bien le résultat de la question 1.}$$

4. Le long de l'ellipse, $-y dx + x dy = (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = ab dt$. De plus, $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$. L'ellipse est parcourue dans le sens direct et son intérieur

contient l'origine. Par la question 3, $\int_0^{2\pi} \frac{ab dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = 2\pi$. En divisant par ab , on

obtient
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab} .$$

Point de méthode : pour une forme fermée avec une singularité, isolez-la par un petit cercle. L'intégrale sur le bord ne dépend alors que des singularités entourées.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème, le demi-disque homogène

1. En polaires, D correspond à $r \in [0, R]$ et $\theta \in [0, \pi]$. Donc $\mathcal{A}(D) = \int_0^\pi \int_0^R r \, dr \, d\theta$.

L'aire vaut $\frac{\pi R^2}{2}$.

2. On calcule $\iint_D y = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^R r^2 \, dr = 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}$. Par ailleurs,

$$\iint_D x = \int_0^\pi \cos \theta \, d\theta \cdot \frac{R^3}{3} = 0, \text{ ce qu'annonçait la symétrie par rapport à l'axe } Oy. \text{ Donc}$$

$\bar{x} = 0$ et $\bar{y} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$. **Le centre de gravité est** $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$, soit environ $0,42 R$ au-dessus du diamètre.

3. Avec $P = -\frac{y^2}{2}$ et $Q = 0$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on a $\partial_x Q - \partial_y P = y$. Donc

$\iint_D y = \oint_{\partial D} -\frac{y^2}{2} \, dx$. Le bord direct se compose du diamètre, parcouru de $(-R, 0)$ à $(R, 0)$, puis du demi-cercle $t \rightarrow (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, \pi]$. Sur le diamètre, $y = 0$: la contribution est nulle. Sur le demi-cercle, $dx = -R \sin t \, dt$, donc

$$\int_0^\pi -\frac{R^2 \sin^2 t}{2} (-R \sin t) \, dt = \frac{R^3}{2} \int_0^\pi \sin^3 t \, dt = \frac{R^3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2R^3}{3}.$$

On retrouve $\iint_D y = \frac{2R^3}{3}$. On a utilisé $\int_0^\pi \sin^3 t \, dt = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$.

4. En polaires, $I_O = \int_0^\pi \int_0^R r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \pi \cdot \frac{R^4}{4}$. **Le moment d'inertie vaut** $\frac{\pi R^4}{4}$.

5. Le solide W est l'ensemble des points $(x, \rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ avec $(x, \rho) \in D$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$. Le jacobien de $(x, \rho, \alpha) \rightarrow (x, \rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\rho \sin \alpha \\ 0 & \rho \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho.$$

Donc $\text{Vol}(W) = \int_0^{2\pi} \left(\iint_D \rho \, dx \, d\rho \right) d\alpha = 2\pi \iint_D y \, dx \, dy$, en renommant ρ en y .

Avec la question 2, $\text{Vol}(W) = 2\pi \cdot \frac{2R^3}{3}$. **On retrouve $\frac{4}{3}\pi R^3$, volume de la boule.**

Point de méthode : le résultat de la question 5 s'écrit $\text{Vol}(W) = 2\pi \bar{y} \cdot \mathcal{A}(D)$. Cette relation, connue sous le nom de théorème de Guldin, est hors programme mais se redémontre en deux lignes comme ici.

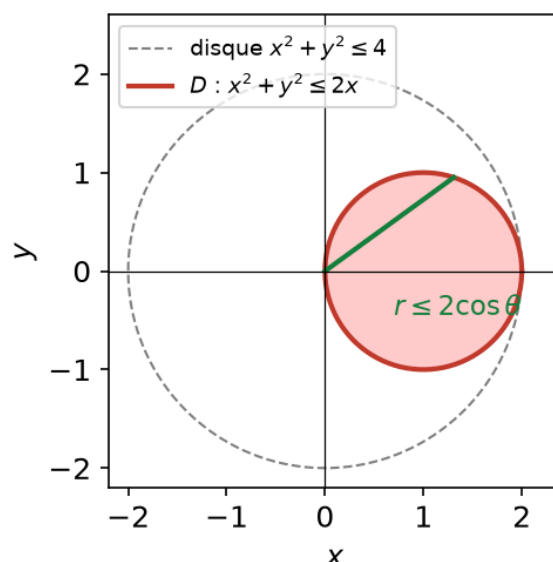
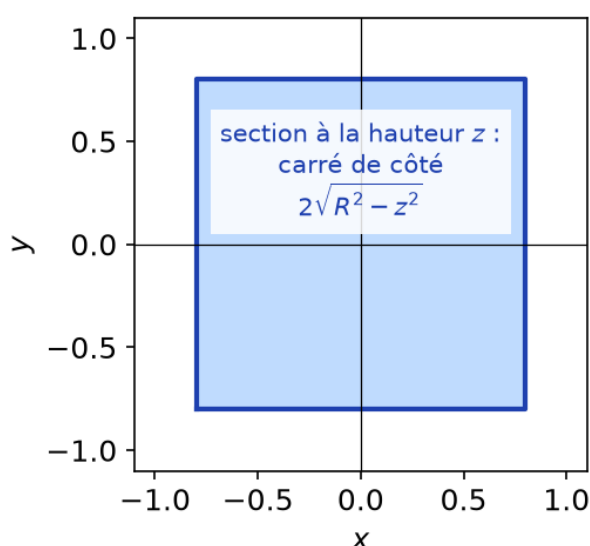
Corrigé de l'exercice 24 : Problème, intersections de cylindres et de sphères

Partie A.

- À la cote $z \in [-R, R]$, les conditions deviennent $x^2 \leq R^2 - z^2$ et $y^2 \leq R^2 - z^2$. **La section est le carré $[-\sqrt{R^2 - z^2}, \sqrt{R^2 - z^2}]^2$, de côté $2\sqrt{R^2 - z^2}$ et d'aire $4(R^2 - z^2)$.** Pour $|z| > R$, la section est vide.

- Par la méthode des tranches, $\text{Vol}(V_1) = \int_{-R}^R 4(R^2 - z^2) \, dz = 4\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right)$. **Le volume vaut $\frac{16R^3}{3}$.**

- Si $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, alors $x^2 + z^2 \leq R^2$ et $y^2 + z^2 \leq R^2$: la boule est bien contenue dans V_1 . À la cote z , sa section est le disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$, inscrit dans le carré précédent, comme le montre la partie gauche de la figure ci-dessous. Le rapport des aires vaut $\frac{\pi(R^2 - z^2)}{4(R^2 - z^2)} = \frac{\pi}{4}$ à chaque hauteur. **Par conséquent, le rapport des volumes vaut aussi $\frac{\pi}{4}$:** on vérifie que $\frac{4\pi R^3/3}{16R^3/3} = \frac{\pi}{4}$.



Partie B.

1. Pour $(x, y) \in D$, on a $x \leq 2$, donc $x^2 + y^2 \leq 2x \leq 4$. La quantité $4 - x^2 - y^2$ est donc positive. À $(x, y) \in D$ fixé, z décrit l'intervalle $[-\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \sqrt{4 - x^2 - y^2}]$.

Par la méthode des piles, $\text{Vol}(V_2) = 2 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$.

2. On utilise la description polaire de D obtenue à l'exercice 8. À θ fixé,

$$\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - r^2} \, r \, dr = \left[-\frac{(4 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2\cos\theta} = \frac{8 - (4\sin^2\theta)^{3/2}}{3} = \frac{8 - 8|\sin\theta|^3}{3}.$$

Ensuite, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin\theta|^3 \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Par conséquent,

$$\text{Vol}(V_2) = \frac{16}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right) = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}.$$

Le volume vaut $\frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9} \approx 9,64$. Ce nombre est bien inférieur au volume $\frac{32\pi}{3} \approx 33,5$ de la boule.

Point de méthode : attention à la valeur absolue dans $(\sin^2\theta)^{3/2} = |\sin\theta|^3$. L'oublier donnerait une intégrale de $\sin^3\theta$ nulle sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc un résultat faux.

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [intégrales multiples, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur intégrales multiples](#)
- À maîtriser avant : [Différentiabilité, formule de Taylor et extrema](#)
- Chapitre précédent : [Formes quadratiques, coniques et quadriques](#)
- Chapitre suivant : [Variables aléatoires à densité](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)