

Intégrales généralisées

Exercice 1 : Intégrales de référence

Dans cet exercice, α et α sont des réels. Toutes les réponses se justifient par un calcul de primitive.

1. Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et donner sa valeur lorsqu'elle converge.

2. Même question pour $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

3. Même question pour $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.

4. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge pour tout réel α .

Exercice 2 : Calculs directs par primitive

Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2}$.

$$2. \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}.$$

$$3. \quad C = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$4. \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}.$$

Exercice 3 : Exponentielles complexes

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose $z = a + ib$.

1. Montrer que $t \rightarrow e^{-zt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$.

2. En déduire les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt) dt$ et de $\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(bt) dt$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(2t) dt$.

Exercice 4 : Comparaison de fonctions positives

1. Montrer que $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge et que sa valeur est inférieure ou égale à 1.

3. Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$ diverge.

4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ converge et que sa valeur est inférieure ou égale à $\frac{4}{3}$.

Exercice 5 : Intégrabilité par équivalents aux bornes

Étudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt$.

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$.

3. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\sqrt{t}} dt$.

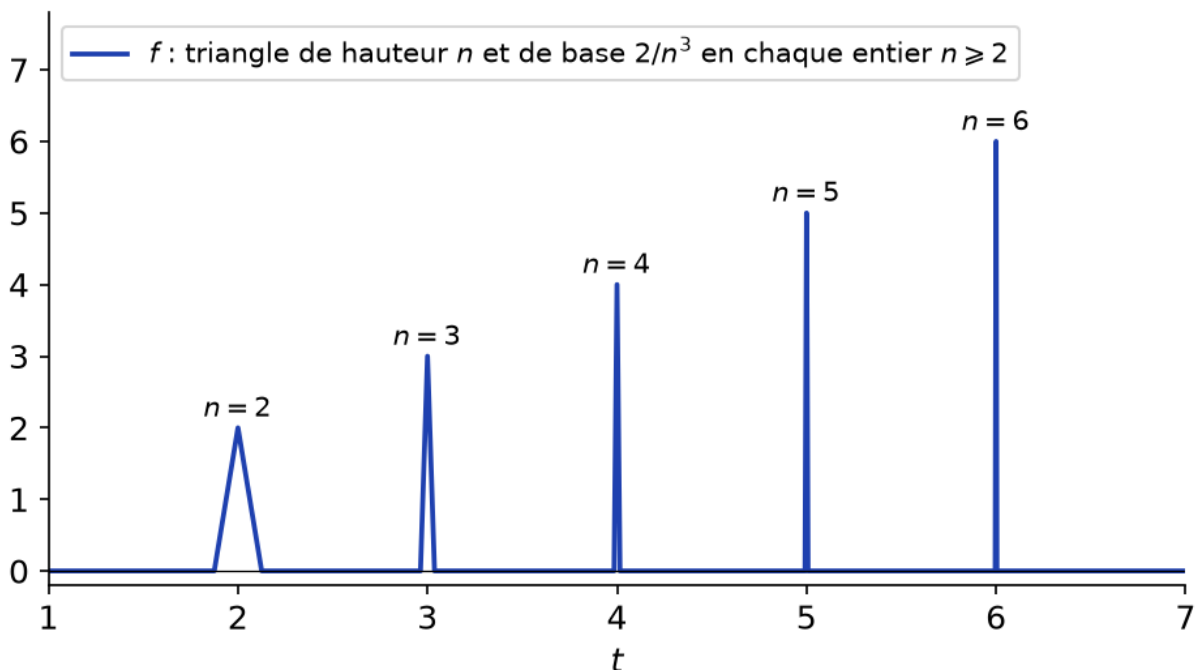
4. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$.

5. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$, dont on calculera la valeur à l'aide de la primitive $t \rightarrow 2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t}$.

Exercice 6 : Fonctions intégrables et espace L^1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soient $f, g \in L^1(I, \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda f + g \in L^1(I, \mathbb{C})$.
2. Montrer que $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, mais pas son carré.
3. Montrer que $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, alors que sa racine carrée $t \rightarrow \frac{1}{t}$ ne l'est pas.
4. Soit f continue, bornée et intégrable sur I . Montrer que f^2 est intégrable sur I .
5. On définit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, affine par morceaux, nulle en dehors des intervalles $[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$ pour $n \geq 2$, avec $f(n) = n$, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$, mais que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.



Exercice 7 : Intégration par parties et factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = (n+1) I_n$.
3. En déduire I_n pour tout n .
4. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 8 : Intégration par parties sur]0, 1]

1. Justifier la convergence et calculer $\int_0^1 \ln t dt$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et calculer $J_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$.
3. Justifier la convergence et calculer $K = \int_0^1 t (\ln t)^2 dt$.

Exercice 9 : Changements de variable

Justifier la convergence et calculer, à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$, avec $u = e^t$;
2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$, avec $t = \sin^2 \theta$;
3. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$, avec $u = \sqrt{t}$;
4. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$, avec $u = \sqrt{t-1}$.

Exercice 10 : Une intégrale nulle par symétrie

1. Montrer que $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.
3. Soit $\alpha > 0$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2 + t^2} dt$.

Exercice 11 : Intégrales de Bertrand

Soient α, β deux réels. On étudie $J(\alpha, \beta) = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. En introduisant $\gamma \in]1, \alpha[$, montrer que $J(\alpha, \beta)$ converge.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $J(\alpha, \beta)$ diverge.
3. On suppose $\alpha = 1$. À l'aide du changement de variable $u = \ln t$, déterminer la nature de $J(1, \beta)$.
4. Résumer les résultats et dessiner, dans le plan des couples (α, β) , la zone de convergence.

Exercice 12 : Convergence selon un paramètre

Déterminer l'ensemble des réels α pour lesquels chaque intégrale converge.

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)}.$$

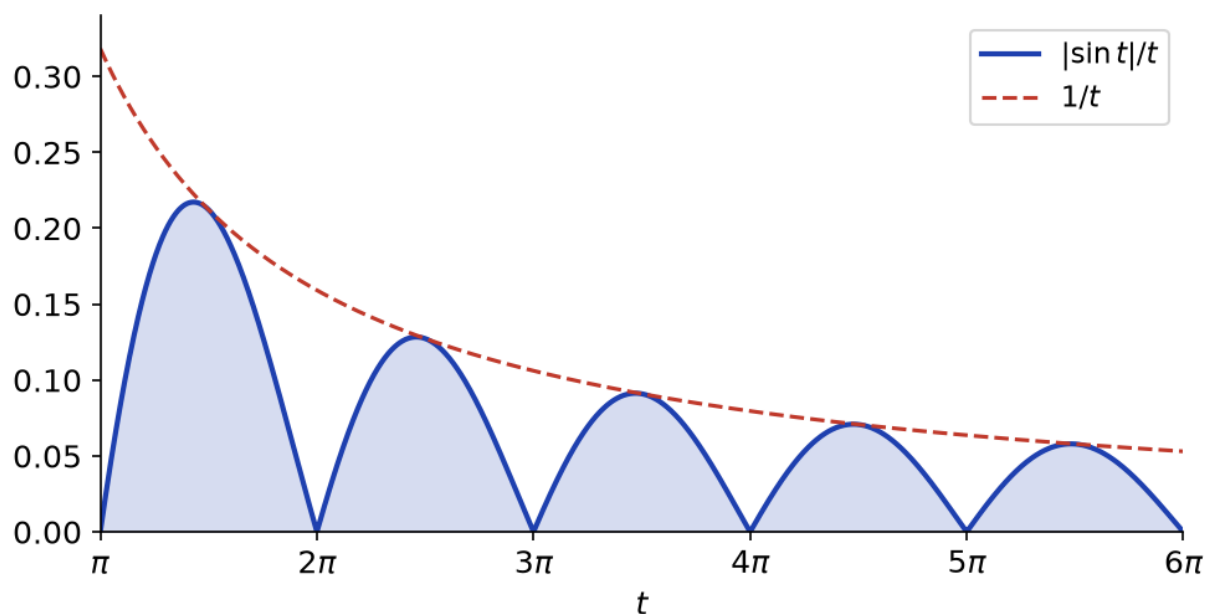
$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt.$$

$$3. \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt.$$

$$4. \int_1^{+\infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})^\alpha dt.$$

Exercice 13 : Le sinus cardinal n'est pas intégrable

On considère $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ sur $]0, +\infty[$. La figure ci-dessous représente $|f|$ sur $[\pi, 6\pi]$.



1. Montrer que f est intégrable sur $]0, \pi]$.

2. Pour $k \geq 1$, montrer que
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer en revanche que $t \rightarrow \frac{\sin t}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 14 : Série et intégrale de $1/(t \ln t)$

On pose $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ pour $t \geq 2$, et $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que f est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

2. Calculer $\int_2^x f(t) dt$ pour $x \geq 2$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} f$ converge-t-elle ?

3. Montrer que $\int_3^{n+1} f \leq S_n - f(2) \leq \int_2^n f$ pour $n \geq 3$.
4. En déduire que $S_n \sim \ln(\ln n)$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$?
5. Par la même méthode, déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$.

Exercice 15 : Équivalents de sommes par comparaison série-intégrale

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$.
2. Pour $n \geq 2$, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que $\frac{1}{n} \leq R_n \leq \frac{1}{n-1}$, puis que $R_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $\ln(n!) \sim n \ln n$.

Exercice 16 : Équivalent d'un reste de Riemann

Déterminer un équivalent simple, quand $x \rightarrow +\infty$, de chacune des quantités suivantes.

1. $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$.
2. $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3 + 1} dt$.
3. $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t}$, dont on calculera aussi la valeur exacte pour vérifier le résultat.

Exercice 17 : Équivalent d'une intégrale partielle divergente

1. Calculer la dérivée de $t \rightarrow \frac{e^t}{t}$. En déduire que $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \sim \frac{e^x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
2. Montrer de même que $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 18 : Reste de l'intégrale de Gauss

Pour $x > 0$, on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier l'existence de $R(x)$.
2. Soit $\varphi(t) = \frac{e^{-t^2}}{2t}$. Calculer $\varphi'(t)$ et en déduire que $R(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Par une intégration par parties, montrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2x^2}} \leq R(x) \leq \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

4. En déduire un encadrement de $R(3)$ à 10^{-6} près environ.

Exercice 19 : Comportement en 0 d'une intégrale partielle

1. Montrer que $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \sim -\ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$.
2. Montrer que $\int_x^1 \frac{e^t}{t^2} dt \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.
3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = -\ln x + C + o(1)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 20 : Une intégrale de type Frullani

On pose
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$$

1. Montrer que la fonction intégrée est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$
3. En déduire que $I = \ln 2$.
4. Pour $0 < a < b$, calculer de même
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

Exercice 21 : Fonction intégrable décroissante et limite de $x f(x)$

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive, décroissante et intégrable.

1. Montrer que $\int_{x/2}^x f(t) dt \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
2. En déduire que $x f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, autrement dit que $f(x) = o(1/x)$.
3. Montrer que l'hypothèse de décroissance est indispensable, à l'aide de la fonction de l'exercice 6.
4. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ vérifie $t f(t) \rightarrow 0$. Est-elle intégrable sur $[2, +\infty[$? Conclure sur la réciproque du résultat de la question 2.

Exercice 22 : Intégrale du logarithme du sinus

On pose
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt.$$

1. Montrer que $t \rightarrow \ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt.$$
3. Montrer que
$$\int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = 2I.$$
4. En calculant $2I$ à l'aide de la formule $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$, montrer que $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.
5. En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Exercice 23 : Problème, intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta$. On pose aussi $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$, dont la convergence a été établie à l'exercice 4.

Partie A : intégrales de Wallis.

1. Calculer W_0 et W_1 . Montrer que la suite (W_n) est positive et décroissante.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.
3. Montrer que la suite $((n+1) W_{n+1} W_n)$ est constante et donner sa valeur.
4. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie B : intégrale de Gauss. Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $1 + u \leq e^u$ pour tout réel u . En déduire que, pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$, et que, pour tout $t \geq 0$, $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
2. Avec $t = \sqrt{n} \sin \theta$, montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$.
3. Avec $t = \sqrt{n} \tan \theta$, montrer que $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, dt = \sqrt{n} W_{2n-2}$.
4. En déduire un encadrement de G , puis la valeur $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [intégrales généralisées, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#)
- Chapitre suivant : [Convergence dominée et intégration terme à terme](#)
- Le même thème en L2 : [intégrales généralisées, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)