

Intégrales généralisées

Exercice 1 : Calculs directs par primitive

Pour chaque intégrale, précisez la ou les bornes impropres, puis déterminez sa nature en revenant à la définition. En cas de convergence, donnez sa valeur.

1. $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt .$

2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} .$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} .$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t} .$

5. $\int_0^{+\infty} \cos t dt .$

Exercice 2 : Comparaison avec les intégrales de Riemann

Déterminez la nature des intégrales suivantes, en utilisant une intégrale de Riemann comme référence.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{t}}.$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^2+3} dt.$
3. $\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{t}}.$ Calculez ensuite sa valeur à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}.$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}.$
5. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt.$

Exercice 3 : Intégrales faussement généralisées

1. Montrez que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est faussement généralisée.
2. Montrez que $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ est faussement généralisée.
3. Justifiez la convergence de $\int_0^1 t \ln t dt$ et calculez sa valeur en travaillant sur un segment $[x, 1].$

Exercice 4 : Primitives et intégrales de Bertrand

À l'aide d'une primitive, déterminez la nature et, s'il y a lieu, la valeur de :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}.$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^2}.$

3. $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t (\ln t)^2}.$

4. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt.$

Exercice 5 : Changements de variable

Justifiez la convergence, puis calculez les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}},$ avec $u = e^t.$

2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}},$ avec $t = \sin^2 \theta, \theta \in]0, \pi/2[.$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 1}},$ avec $u = \sqrt{t^2 - 1}.$

Exercice 6 : Une intégrale impropre aux deux bornes

On considère
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

1. Expliquez pourquoi il faut étudier séparément le comportement en 0 et en $+\infty$.
2. Montrez que I converge à l'aide d'équivalents.
3. Calculez I avec le changement de variable $t = u^2$.

Exercice 7 : Une famille à paramètre

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose
$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt.$$

1. Déterminez l'ensemble des réels α pour lesquels $J(\alpha)$ converge.
2. Calculez $J(0)$.
3. Pour α dans cet ensemble, montrez que $J(\alpha) = J(-\alpha)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$.

Exercice 8 : La fonction Gamma

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrez que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$.
2. Soit $x > 0$. En justifiant une intégration par parties sur $]0, +\infty[$, montrez que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.
3. Calculez $\Gamma(1)$, puis $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrez que $\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 9 : Intégrale du logarithme du sinus

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

1. Montrez que I converge. On pourra écrire $\ln(\sin t) = \ln t + \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)$.
2. Montrez que J converge et que $J = I$.
3. Montrez que $\int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = 2I$.
4. En calculant $I + J$ à l'aide de la formule $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, déduisez-en la valeur de I .

Exercice 10 : Intégrales de Bertrand en zéro

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on étudie $K(\alpha, \beta) = \int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$.

1. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, transformez $K(\alpha, \beta)$ en une intégrale sur $[2, +\infty[$.
2. Dédisez-en, grâce au théorème sur les intégrales de Bertrand, les couples (α, β) pour lesquels $K(\alpha, \beta)$ converge.

3. Application : nature de $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t \sqrt{|\ln t|}}$ et de $\int_0^{1/2} \frac{|\ln t|^5}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 11 : Nature par développement asymptotique

Déterminez la nature des intégrales suivantes à l'aide d'un développement limité ou asymptotique de l'intégrande.

1. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t} \right) dt$.

2. $\int_1^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{1}{t} \right) dt$.

3. $\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t - e \right) dt$.

$$4. \int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Exercice 12 : Convergence absolue

Montrez que les intégrales suivantes sont absolument convergentes.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt.$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t) \ln t}{t^2} dt.$$

$$4. \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt. \text{ Calculez de plus sa valeur, en passant par } \int_0^{+\infty} e^{(-1+i)t} dt.$$

Exercice 13 : Semi-convergence de l'intégrale de $\sin(t)/t$

$$1. \text{ Montrez par une intégration par parties sur } [1, x] \text{ que } \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge.}$$

$$2. \text{ Vérifiez que } |\sin t| \geq \sin^2 t \text{ pour tout réel } t, \text{ puis que } \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}.$$

3. Montrez que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ converge, puis que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

4. Concluez sur la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 14 : Règle d'Abel

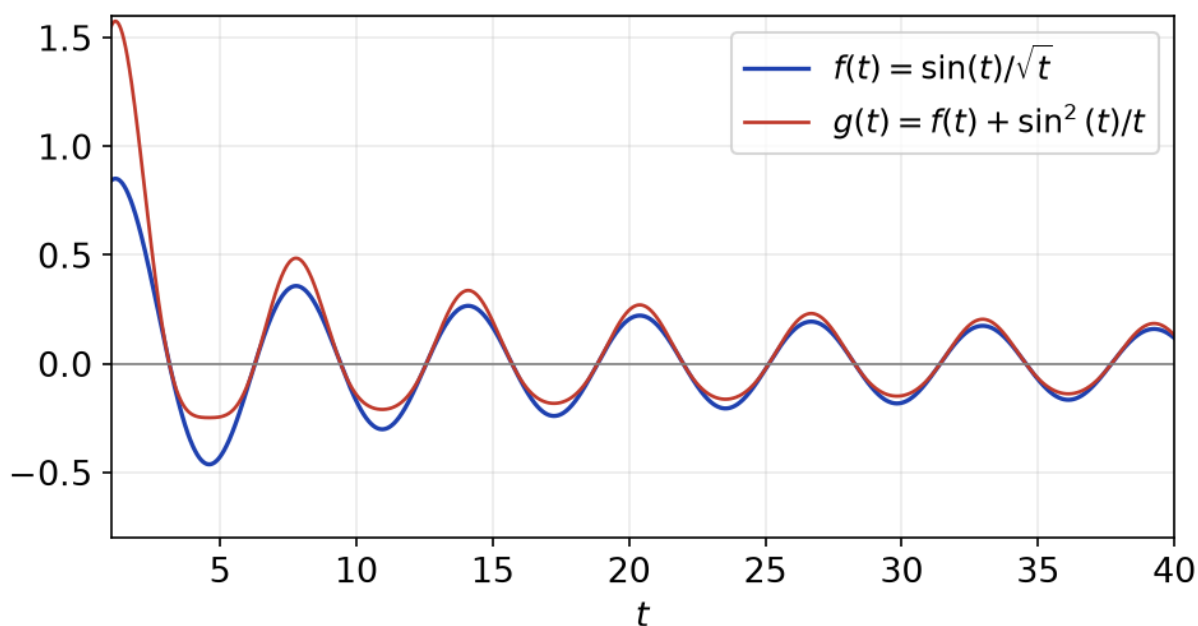
1. Soit $\alpha > 0$. Montrez que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ converge. Montrez qu'elle converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Montrez que $\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln t} dt$ est semi-convergente.

3. Montrez que $\int_1^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est semi-convergente. On admettra l'inégalité $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ pour $x \in [0, \pi/2]$.

Exercice 15 : Équivalence sans signe constant

Sur $[1, +\infty[$, on pose $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ et $g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}$. La figure ci-dessous représente ces deux fonctions.



1. Montrez que $\int_1^{+\infty} f$ converge.
2. Montrez que $g = f(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$, autrement dit $g \sim f$.
3. Montrez que $\int_1^{+\infty} g$ diverge.
4. Quelle hypothèse du critère d'équivalence n'est pas satisfaite ici ?

Exercice 16 : Critère de Cauchy et fonctions décroissantes

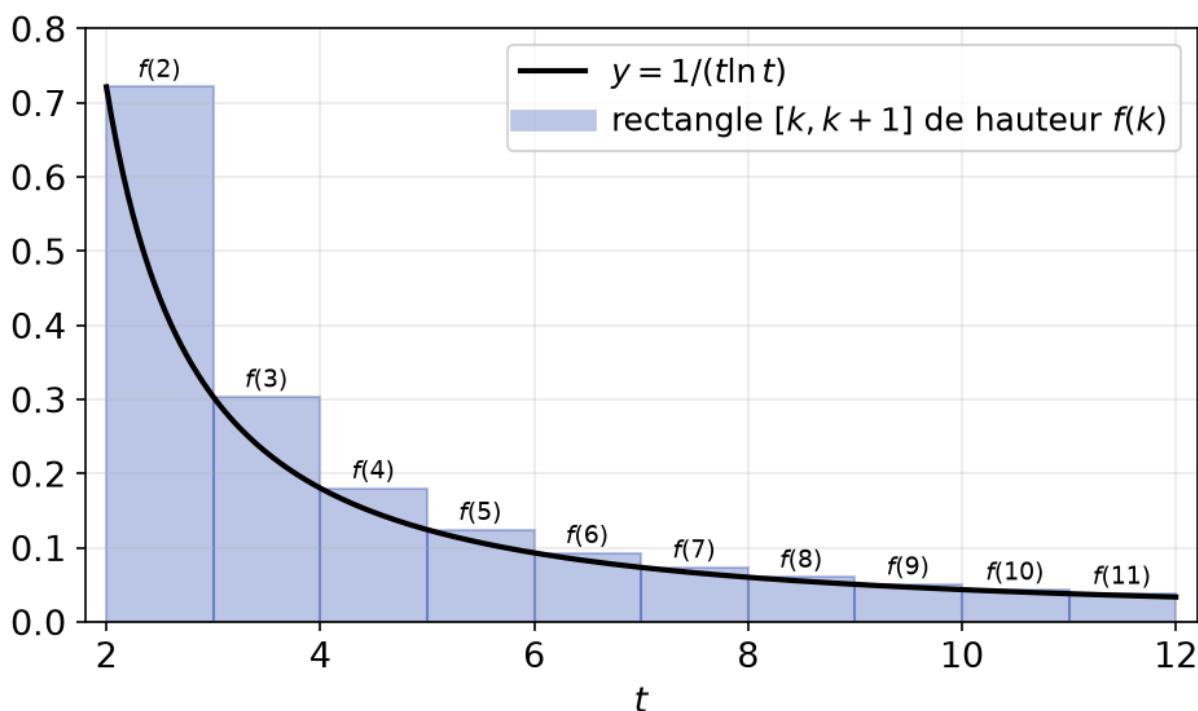
Soit f continue, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge.

1. Montrez que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. Montrez que $\frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f(t) dt$ pour $x > 0$. À l'aide du critère de Cauchy, déduisez-en que $xf(x) \rightarrow 0$.
3. Montrez que la réciproque est fausse, en étudiant $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 17 : Comparaison série-intégrale

Soit $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$. La figure ci-dessous représente la courbe de f et les rectangles de hauteur $f(k)$.



- Montrez que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.
- Montrez que $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq f(2) + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$ pour $n \geq 2$.

3. Déduisez-en la nature de $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et l'équivalent $S_n \sim \ln(\ln n)$.

4. Par la même méthode, montrez que $\sum \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge et que son reste

$$R_n = \sum_{k > n} \frac{1}{k (\ln k)^2} \text{ vérifie } R_n \sim \frac{1}{\ln n}.$$

Exercice 18 : Intégration des relations de comparaison

1. Justifiez la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Pour $x > 0$, montrez à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt.$$

2. Déduisez-en que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

3. Pour $x \geq 2$, on pose $L(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Montrez que $L(x) \rightarrow +\infty$, puis que $L(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Exercice 19 : Intégrales de Fresnel

1. Montrez que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du$ converge.

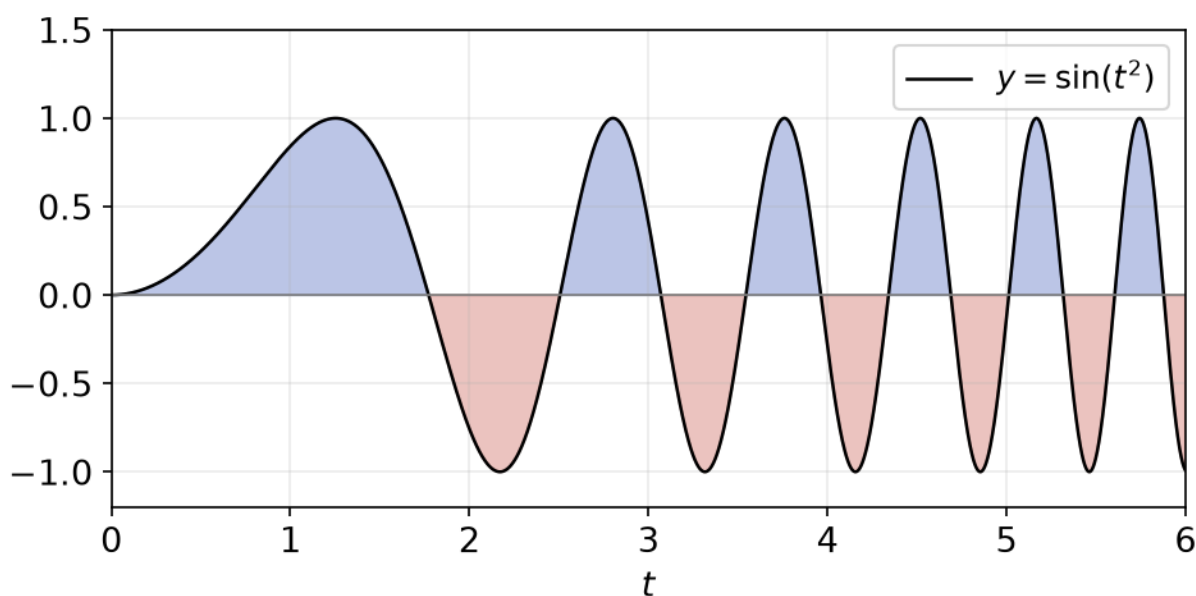
2. Déduisez-en que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ converge.

3. Montrez que $t \rightarrow \sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

4. Montrez que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ n'est pas absolument convergente.

5. Montrez que $\int_0^{+\infty} t \sin(t^4) dt$ converge, alors que $t \rightarrow t \sin(t^4)$ n'est pas bornée.

La figure ci-dessous montre les oscillations de $\sin(t^2)$, de plus en plus rapides.



Exercice 20 : Intégrales de Frullani

Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$.

1. Montrez que $F = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge.

2. Pour $0 < \varepsilon < X$, montrez que

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

3. Encadrez chacune de ces deux intégrales, puis montrez que $F = \ln \frac{b}{a}$.

4. Par la même méthode, montrez que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(bt) - \arctan(at)}{t} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$.

Exercice 21 : Problème, valeur de l'intégrale de Dirichlet

On admet (exercice 13) que $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. On se propose de montrer que $D = \frac{\pi}{2}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \pi/2]$, montrez que $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$. En

déduire que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}$.

2. **Lemme de Riemann-Lebesgue.** Soit φ de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$. Montrez que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

3. On pose $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ pour $t \in]0, \pi/2]$ et $\varphi(0) = 0$. Montrez que φ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

4. Déduisez-en que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \rightarrow \frac{\pi}{2}$, puis que $D = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 22 : Problème, intégrale de Gauss

On pose $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, dont la convergence a été établie à l'exercice 18. On note

$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$ les intégrales de Wallis, et l'on admet l'équivalent $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1.    l'aide de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour $u > -1$, montrez que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \sqrt{n}], \\ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \text{ et } \forall t \geq 0, \\ e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

2. Montrez que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$, avec $t = \sqrt{n} \sin \theta$.

3. Montrez que $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} W_{2n-2}$, avec $t = \sqrt{n} \tan \theta$.

4. Déduisez-en l'encadrement $\sqrt{n} W_{2n+1} \leq G \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$, puis la valeur $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Déduisez-en $\Gamma(1/2)$, avec les notations de l'exercice 8.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [intégrales généralisées, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre précédent : [Séries à termes quelconques](#)
- Chapitre suivant : [Valeurs propres et diagonalisation](#)
- Le même thème en maths spé : [intégrales généralisées, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)