

Intégrales généralisées

Corrigé de l'exercice 1 : Intégrales de référence

1. La fonction $t \rightarrow t^{-\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour $\alpha \neq 1$ et $x > 1$, on a

$$\int_1^x t^{-\alpha} dt = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}. \text{ Si } \alpha > 1, \text{ alors } x^{1-\alpha} \rightarrow 0 \text{ et la limite vaut } \frac{1}{\alpha-1}. \text{ Si } \alpha < 1,$$

alors $x^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$. Enfin, pour $\alpha = 1$, l'intégrale partielle vaut $\ln x$, qui tend vers $+\infty$. **L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$, et vaut alors $\frac{1}{\alpha-1}$.**

2. La fonction est continue sur $]0, 1]$. Pour $\alpha \neq 1$ et $0 < x < 1$, on a

$$\int_x^1 t^{-\alpha} dt = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \text{ Si } \alpha < 1, \text{ alors } x^{1-\alpha} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0^+. \text{ En revanche, si}$$

$\alpha > 1$, alors $x^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$. Pour $\alpha = 1$, on obtient $-\ln x \rightarrow +\infty$. **L'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$, et vaut alors $\frac{1}{1-\alpha}$.**

3. Pour $a \neq 0$, $\int_0^x e^{-at} dt = \frac{1 - e^{-ax}}{a}$. Si $a > 0$, cette quantité tend vers $\frac{1}{a}$. Si $a < 0$,

elle tend vers $+\infty$. Pour $a = 0$, l'intégrale partielle vaut x . **L'intégrale converge si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\frac{1}{a}$.**

4. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ a deux bornes à problème. Elle converge si et seulement si $\int_0^1$ et

$\int_1^{+\infty}$ convergent. Or cela exige à la fois $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$, ce qui est impossible. **Donc**
 $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ **diverge pour tout réel α .**

Corrigé de l'exercice 2 : Calculs directs par primitive

1. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $\int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x}$, qui tend vers 1. **Ainsi, $A = 1$.**
2. La décomposition en éléments simples donne $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$. Une primitive sur $[1, +\infty[$ est donc $t \rightarrow \ln \frac{t}{t+1}$. Cette primitive tend vers $\ln 1 = 0$ en $+\infty$ et vaut $\ln \frac{1}{2}$ en 1. **Par conséquent, $B = 0 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2$.**
3. La fonction est continue sur $[0, 1[$. Pour $0 < x < 1$, $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$. Quand $x \rightarrow 1^-$, cette quantité tend vers $\frac{\pi}{2}$, par continuité de $\arcsin$ en 1. **Donc $C = \frac{\pi}{2}$.**
4. On a $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1 > 0$, donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Une primitive est $t \rightarrow \arctan(t+1)$, qui tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et vers $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$. Ainsi, les deux intégrales $\int_{-\infty}^0$ et $\int_0^{+\infty}$ convergent. **Finalement, $D = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Exponentielles complexes

1. Pour $t \geq 0$, on a $|e^{-zt}| = e^{-at}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $a > 0$. Donc $t \rightarrow e^{-zt}$ est intégrable. Ensuite, comme $z \neq 0$, $\int_0^x e^{-zt} dt = \frac{1 - e^{-zx}}{z}$. Or $|e^{-zx}| = e^{-ax} \rightarrow 0$. **Par conséquent, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.**
2. On a $e^{-zt} = e^{-at} \cos(bt) - i e^{-at} \sin(bt)$. Ces deux fonctions réelles sont dominées par e^{-at} , donc intégrables. En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt) dt = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(bt) dt = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

3. Avec $a = b = 1$, on trouve $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{2}$. Ensuite, avec $a = 1$ et $b = 2$, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(2t) dt = \frac{1}{5}$. **Les deux valeurs sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$.**

Point de méthode : passer par l'exponentielle complexe évite deux intégrations par parties successives.

Corrigé de l'exercice 4 : Comparaison de fonctions positives

1. Pour $t \geq 1$, on a $t^2 \geq t$, donc $-t^2 \leq -t$. Comme l'exponentielle est croissante, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Or $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. De plus, sur le segment $[0, 1]$, il n'y a aucun problème. **Donc** $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2. Pour $t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$ (Riemann avec $\alpha = 2$). **Par comparaison, l'intégrale converge et sa valeur est au plus 1.**

3. Pour $t > 1$, on a $0 < \ln t < t$, donc $\frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t} > 0$. Or $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. **Par comparaison de fonctions positives, $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$ diverge.**

4. Sur $[0, 1]$, la fonction est continue et majorée par 1, donc $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} \leq 1$. Sur $[1, +\infty[$, on a $0 \leq \frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^4}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{3}$. Ainsi, l'intégrale converge et vaut au plus $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Intégrabilité par équivalents aux bornes

- La fonction $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Le seul problème est en $+\infty$. Là, $f(t) \sim \frac{t^{1/2}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}$, qui est intégrable car $\frac{3}{2} > 1$. **Donc l'intégrale converge.**
- La fonction $\frac{1}{\sin t}$ est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En 0, $\sin t \sim t$, donc $\frac{1}{\sin t} \sim \frac{1}{t}$. Or $\frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0. **Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale diverge.**
- La fonction $f(t) = t^3 e^{-\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Posons $s = \sqrt{t}$. Alors $t^2 f(t) = t^5 e^{-\sqrt{t}} = s^{10} e^{-s}$, qui tend vers 0 par croissances comparées. Donc $f(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$. **Par conséquent, l'intégrale converge.**
- La fonction est continue et positive sur $[0, 1[$. En 1, on factorise : $1 - t^3 = (1-t)(1+t+t^2) \sim 3(1-t)$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{1-t^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}(1-t)^{1/2}}$, intégrable en 1 car $\frac{1}{2} < 1$. **L'intégrale converge.**
- La fonction $f(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et négative. On a $t^{3/4} |f(t)| = t^{1/4} |\ln t| \rightarrow 0$ en 0. Donc $|f(t)| = o(1/t^{3/4})$, intégrable car $\frac{3}{4} < 1$. Ensuite, la dérivée de $F(t) = 2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t}$ vaut $\frac{\ln t}{\sqrt{t}} + \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{\sqrt{t}} = f(t)$. Or $F(1) = -4$ et $F(t) \rightarrow 0$ en 0. Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = -4$.

Corrigé de l'exercice 6 : Fonctions intégrables et espace L^1

1. La fonction $\lambda f + g$ est continue par morceaux. De plus, $|\lambda f + g| \leq |\lambda| |f| + |g|$, et le majorant est intégrable par linéarité de l'intégrale des fonctions positives convergentes. **Par comparaison, $\lambda f + g \in L^1(I, \mathbb{C})$: c'est un sous-espace vectoriel.**
2. D'après l'intégrale de Riemann sur $]0, 1]$, $\frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable car $\frac{1}{2} < 1$. En revanche, son carré $\frac{1}{t}$ ne l'est pas. **Donc $L^1(]0, 1])$ n'est pas stable par produit.**
3. Sur $[1, +\infty[$, $\frac{1}{t^2}$ est intégrable car $2 > 1$, alors que $\frac{1}{t}$ ne l'est pas. **Une fonction de carré intégrable n'est donc pas forcément intégrable.**
4. Soit M un majorant de $|f|$ sur I . Alors $|f^2| = |f| \cdot |f| \leq M |f|$, qui est intégrable. **Par comparaison, f^2 est intégrable sur I .**
5. Pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{8}$, donc les intervalles $[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$ sont deux à deux disjoints et inclus dans $[1, +\infty[$. Sur chacun, le graphe de f est un triangle de base $\frac{2}{n^3}$ et de hauteur n , d'aire $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}$. Soit $x \geq 1$ et $N = \lfloor x \rfloor + 1$. Comme $f \geq 0$, on obtient $\int_1^x f \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. L'intégrale partielle d'une fonction positive est donc majorée, et f est intégrable. Cependant, $f(n) = n \rightarrow +\infty$. **Ainsi, f est intégrable mais ne tend pas vers 0 ; elle n'est même pas bornée.**

Corrigé de l'exercice 7 : Intégration par parties et factorielle

1. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $t^2 \cdot t^n e^{-t} = t^{n+2} e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $t^n e^{-t} = o(1/t^2)$ en $+\infty$. **Par conséquent, I_n existe.**
2. Posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$, de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Le produit $uv(t) = -t^{n+1} e^{-t}$ vaut 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. Le théorème d'intégration par parties s'applique donc, et les deux intégrales convergent d'après la question 1 :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Ainsi, $I_{n+1} = (n+1) I_n$.

3. On a $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Par récurrence immédiate, $I_n = n \cdot (n-1) \dots 1 \cdot I_0$. **Donc**
 $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'application $u \rightarrow \frac{u}{a}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = \frac{u}{a}$ et $dt = \frac{du}{a}$, on obtient $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{a^n} e^{-u} \frac{du}{a}$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Intégration par parties sur]0, 1]

1. La fonction $\ln$ est continue sur $]0, 1]$, et $\sqrt{t} |\ln t| \rightarrow 0$ en 0 . Donc $|\ln t| = o(1/t^{1/2})$, intégrable en 0 . Une primitive est $t \rightarrow t \ln t - t$, qui tend vers 0 en 0 et vaut -1 en 1 .

. Ainsi, $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

2. Pour $t \in]0, 1]$, on a $|t^n \ln t| \leq |\ln t|$, donc J_n converge. Posons $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. Le produit $uv(t) = \frac{t^{n+1} \ln t}{n+1}$ tend vers 0 en 0 et vaut 0 en 1 . Par intégration par parties :

$$J_n = \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt.$$

Donc $J_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

3. La fonction $t (\ln t)^2$ tend vers 0 en 0 : c'est un faux problème, et K converge. Posons

$u(t) = (\ln t)^2$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$. Le crochet $\frac{t^2 (\ln t)^2}{2}$ tend vers 0 en 0 et vaut 0 en 1. On obtient alors

$$K = - \int_0^1 \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2 \ln t}{t} dt = - \int_0^1 t \ln t dt = -J_1.$$

Par conséquent, $K = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 9 : Changements de variable

1. La fonction est continue, positive et majorée par e^{-t} , donc intégrable sur $[0, +\infty[$.
L'application $t \rightarrow e^t$ est une bijection C^1 strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Avec $u = e^t$, on a $dt = \frac{du}{u}$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

La valeur est $\frac{\pi}{4}$.

2. La fonction $\theta \rightarrow \sin^2 \theta$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, 1[$.
On a $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ et $\sqrt{t(1-t)} = \sin \theta \cos \theta$, car sinus et cosinus sont positifs sur cet intervalle. Ainsi, l'intégrale devient $\int_0^{\pi/2} 2 d\theta$, qui converge. D'après le théorème, les deux intégrales sont de même nature. **Donc l'intégrale converge et vaut π .**

Questions 3 et 4

3. La fonction $u \rightarrow u^2$ est une bijection C^1 strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur lui-

même. Avec $t = u^2$, on a $dt = 2u du$, et l'intégrale devient $2 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = 2 I_1$, avec les notations de l'exercice 7. **La valeur est 2.**

4. L'application $u \rightarrow 1 + u^2$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. Avec $t = 1 + u^2$, on obtient $dt = 2u du$ et $t\sqrt{t-1} = (1 + u^2)u$.
L'intégrale devient donc $\int_0^{+\infty} \frac{2 du}{1 + u^2}$, qui converge et vaut $2 \cdot \frac{\pi}{2}$. **Ainsi,** $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = \pi$.

Point de méthode : le théorème de changement de variable donne à la fois la nature et la valeur ; il suffit donc de vérifier la convergence de l'intégrale la plus simple.

Corrigé de l'exercice 10 : Une intégrale nulle par symétrie

1. La fonction $f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $|f(t)| \leq |\ln t| = o(1/t^{1/2})$, intégrable. En $+\infty$, $t^{3/2} |f(t)| \sim \frac{\ln t}{t^{1/2}} \rightarrow 0$, donc $f(t) = o(1/t^{3/2})$, intégrable. **Ainsi, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.**
2. Notons I l'intégrale. L'application $u \rightarrow \frac{1}{u}$ est une bijection C^1 strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = \frac{1}{u}$, on a $dt = -\frac{du}{u^2}$, $\ln t = -\ln u$ et $1 + t^2 = \frac{u^2 + 1}{u^2}$. En échangeant les bornes, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u \cdot u^2}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{u^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1 + u^2} du = -I.$$

Donc $I = 0$.

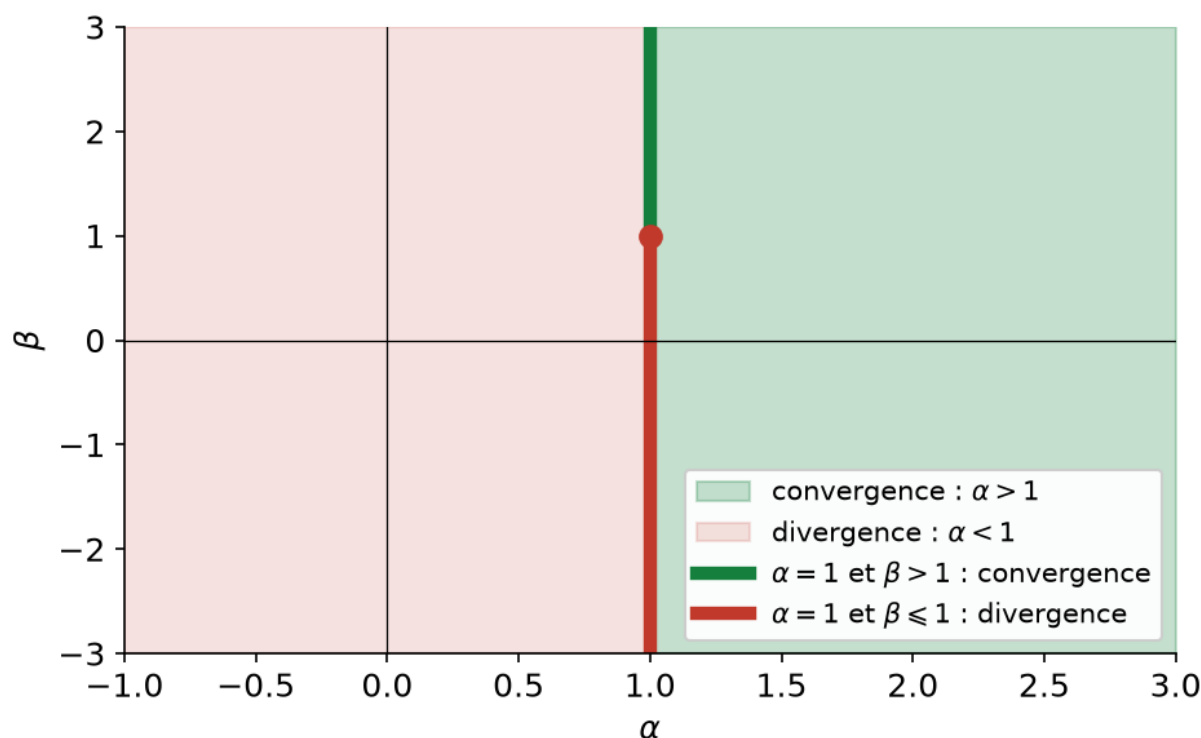
3. Avec $t = a u$, bijection C^1 strictement croissante, on a $dt = a du$ et $a^2 + t^2 = a^2(1 + u^2)$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{1 + u^2} du = \frac{1}{a} \left(\ln a \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \right).$$

La séparation est légitime, car les deux intégrales obtenues convergent. **La valeur est** $\frac{\pi \ln a}{2a}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Intégrales de Bertrand

- La fonction $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[e, +\infty[$. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln t)^\beta}$. Comme $\alpha - \gamma > 0$, cette quantité tend vers 0 par croissances comparées, quel que soit le signe de β . Donc $f(t) = o(1/t^\gamma)$, avec $\gamma > 1$. **Par comparaison, $J(\alpha, \beta)$ converge.**
- Si $\alpha < 1$, alors $t f(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Il existe donc A tel que $f(t) \geq \frac{1}{t}$ pour $t \geq A$. Or $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. **Par comparaison, $J(\alpha, \beta)$ diverge.**
- L'application $t \rightarrow \ln t$ est une bijection C^1 strictement croissante de $[e, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, avec $du = \frac{dt}{t}$. Donc $J(1, \beta)$ a la même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$. **Ainsi, $J(1, \beta)$ converge si et seulement si $\beta > 1$.**
- En résumé, $J(\alpha, \beta)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.** La figure ci-dessous représente cette zone : un demi-plan ouvert, auquel s'ajoute une demi-droite verticale.



Corrigé de l'exercice 12 : Convergence selon un paramètre

- La fonction est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0 , elle est équivalente à $\frac{1}{t^\alpha}$, intégrable si et seulement si $\alpha < 1$. En $+\infty$, elle est équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable si et seulement si $\alpha + 1 > 1$. **L'intégrale converge si et seulement si $0 < \alpha < 1$.**
- La fonction est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0 , $\arctan t \sim t$, donc elle est équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$, intégrable si et seulement si $\alpha - 1 < 1$. En $+\infty$, $\arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc elle est équivalente à $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^\alpha}$, intégrable si et seulement si $\alpha > 1$. **L'intégrale converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.**
- En 0 , $t^\alpha e^{-t} \sim t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$, intégrable si et seulement si $-\alpha < 1$. En $+\infty$, $t^{\alpha+2} e^{-t} \rightarrow 0$, donc la fonction est intégrable pour tout α . **L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > -1$.**
- Par quantité conjuguée, $\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$, qui est strictement positif et équivalent à $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Par conséquent, la fonction intégrée est positive et équivalente à $\frac{1}{2^\alpha t^{\alpha/2}}$. Elle est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$. **L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 2$.**

$$\alpha > 2.$$

Point de méthode : on étudie chaque borne séparément, puis on prend l'intersection des conditions obtenues.

Corrigé de l'exercice 13 : Le sinus cardinal n'est pas intégrable

1. La fonction f est continue sur $]0, \pi]$ et tend vers 1 en 0. Elle se prolonge donc par continuité sur le segment $[0, \pi]$. **Ainsi, f est intégrable sur $]0, \pi]$: c'est un faux problème.**

2. Pour $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, on a $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$. De plus, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$, par π -

périodicité de $|\sin|$. **Donc** $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$.

3. En sommant pour k de 1 à n , on obtient $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} |f| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$. Or la série harmonique diverge, donc ce minorant tend vers $+\infty$. L'intégrale partielle de $|f|$ n'est pas majorée. **Par conséquent, f n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$, ni sur $]0, +\infty[$.**

4. Pour $t \geq 1$, on a $\left| \frac{\sin t}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$, intégrable car $\frac{3}{2} > 1$. **Donc $t \rightarrow \frac{\sin t}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.**

Corrigé de l'exercice 14 : Série et intégrale de $1/(t \ln t)$

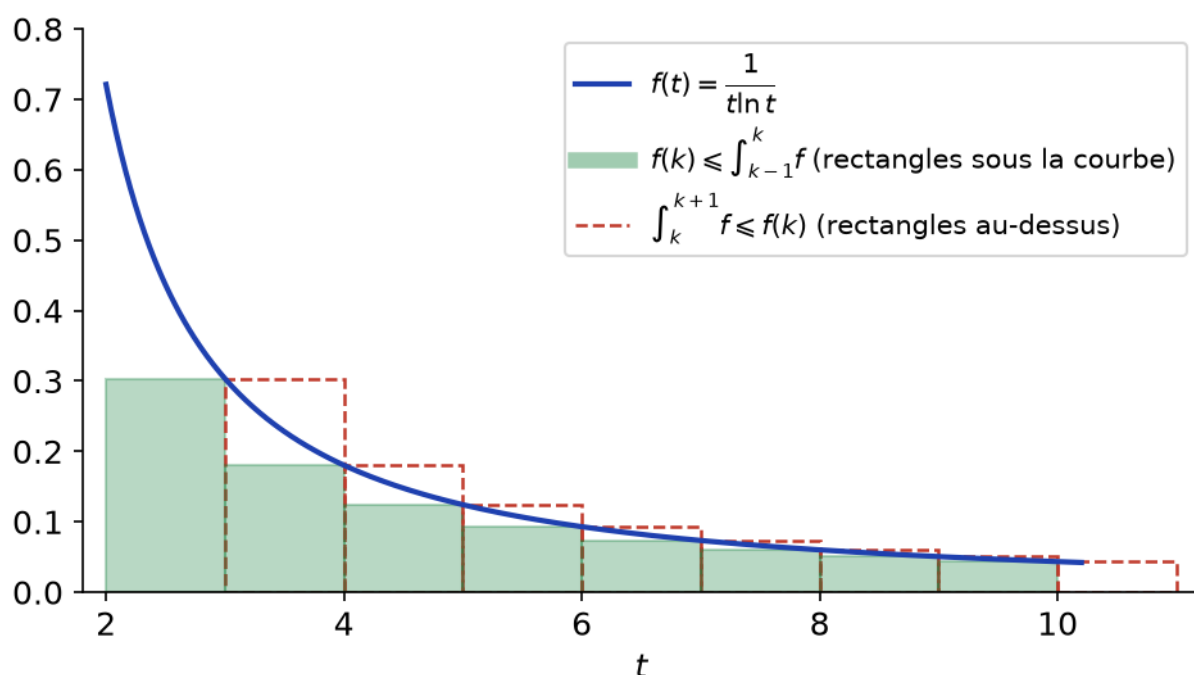
1. Sur $[2, +\infty[$, les fonctions t et $\ln t$ sont strictement positives et croissantes. Leur produit est donc strictement positif et croissant. **Ainsi, f est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$**

2. La dérivée de $t \rightarrow \ln(\ln t)$ est $\frac{1}{t \ln t}$. Donc $\int_2^x f = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$, qui tend vers $+\infty$. **L'intégrale $\int_2^{+\infty} f$ diverge.**

3. Soit $k \geq 3$. Pour $t \in [k-1, k]$, la décroissance donne $f(t) \geq f(k)$, et pour $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$. En intégrant, $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$. En sommant de $k = 3$ à n , on obtient l'encadrement demandé. **Donc** $\int_3^{n+1} f \leq S_n - f(2) \leq \int_2^n f$. La figure ci-dessous montre les deux familles de rectangles.

4. L'encadrement s'écrit $\ln \ln(n+1) - \ln \ln 3 + f(2) \leq S_n \leq \ln \ln n - \ln \ln 2 + f(2)$. Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \ln n$. Donc $\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 0$. Les deux bornes valent ainsi $\ln \ln n + O(1)$, et $\ln \ln n \rightarrow +\infty$. **Par conséquent, $S_n \sim \ln(\ln n)$, et la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.**

5. La fonction $g(t) = \frac{1}{t (\ln t)^2}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, pour la même raison. Une primitive est $-\frac{1}{\ln t}$, donc $\int_2^x g = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \rightarrow \frac{1}{\ln 2}$. L'intégrale converge. **Par comparaison série-intégrale, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.**



Corrigé de l'exercice 15 : Équivalents de sommes par comparaison série-intégrale

1. La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, on a donc

$$\int_{k-1}^k \sqrt{t} \, dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} \, dt. \text{ En sommant de } 1 \text{ à } n :$$

$$\frac{2}{3} n^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} \left((n+1)^{3/2} - 1 \right).$$

Or $(n+1)^{3/2} = n^{3/2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \sim n^{3/2}$. Les deux bornes sont donc équivalentes à $\frac{2}{3} n^{3/2}$. **Par encadrement**, $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$.

2. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 2$, on a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}. \text{ En sommant de } k = n \text{ à } N, \text{ puis en faisant tendre } N \text{ vers}$$

$+\infty$, on obtient $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. Ainsi, $\frac{1}{n} \leq R_n \leq \frac{1}{n-1}$. Comme $\frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$,
on conclut que $R_n \sim \frac{1}{n}$.

3. On a $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$. La fonction $\ln$ est croissante, donc pour $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt. \text{ En sommant, } \int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln t \, dt.$$

Avec la primitive $t \ln t - t$, la borne inférieure vaut $n \ln n - n + 1$. De même, la borne supérieure vaut $(n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 2 - 2 \ln 2$. Toutes deux sont équivalentes à $n \ln n$, car $n = o(n \ln n)$. **Donc** $\ln(n!) \sim n \ln n$.

Corrigé de l'exercice 16 : Équivalent d'un reste de Riemann

1. Quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{t^3+1} \sim \frac{1}{t^3}$, fonction positive et intégrable sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison (cas intégrable), les restes sont équivalents. Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2x^2}. \text{ Donc } \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1} \sim \frac{1}{2x^2}.$$

2. De même, $\frac{\sqrt{t}}{t^3+1} \sim \frac{1}{t^{5/2}}$, positive et intégrable. Or $\int_x^{+\infty} t^{-5/2} \, dt = \frac{2}{3} x^{-3/2}$. **Ainsi,**

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^3+1} \, dt \sim \frac{2}{3} x^{-3/2}.$$

3. On a $\frac{1}{t^2+t} \sim \frac{1}{t^2}$, donc le reste est équivalent à $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$. Pour vérifier, on écrit

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}, \text{ d'où } \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t} = \left[\ln \frac{t}{t+1} \right]_x^{+\infty} = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right). \text{ Cette valeur exacte}$$

est bien équivalente à $\frac{1}{x}$. **Le reste vaut** $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{x}$.

Corrigé de l'exercice 17 : Équivalent d'une intégrale partielle divergente

1. Pour $t > 0$, $\left(\frac{e^t}{t}\right)' = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} = \frac{e^t}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)$. Donc cette dérivée est équivalente à $\frac{e^t}{t}$ en $+\infty$. La fonction $\frac{e^t}{t}$ est positive et non intégrable sur $[1, +\infty[$, puisqu'elle tend vers

$+\infty$. Le théorème (cas non intégrable) donne alors $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \sim \int_1^x \left(\frac{e^t}{t}\right)' dt = \frac{e^x}{x} - e$.

Enfin, $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$, donc la constante est négligeable. **Ainsi,** $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \sim \frac{e^x}{x}$.

2. Pour $t > 1$, $\left(\frac{t}{\ln t}\right)' = \frac{\ln t - 1}{(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(\ln t)^2} \sim \frac{1}{\ln t}$. D'après l'exercice 4, $\frac{1}{\ln t}$ est positive et non intégrable sur $[2, +\infty[$. Par conséquent, $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}$. Comme

$\frac{x}{\ln x} \rightarrow +\infty$, on conclut que $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$.

Point de méthode : on devine l'équivalent en dérivant le candidat, puis on intègre la relation $\sim$.

Corrigé de l'exercice 18 : Reste de l'intégrale de Gauss

1. D'après l'exercice 4, $t \rightarrow e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc sur $[x, +\infty[$. **Ainsi,** $R(x)$ existe pour tout $x > 0$.

2. On calcule $\varphi'(t) = \frac{-2t e^{-t^2} \cdot 2t - 2 e^{-t^2}}{4t^2} = -e^{-t^2} - \frac{e^{-t^2}}{2t^2}$. Donc $-\varphi'(t) \sim e^{-t^2}$ en $+\infty$, et e^{-t^2} est positive et intégrable. D'après le théorème (cas intégrable), les restes sont

équivalents : $R(x) \sim \int_x^{+\infty} -\varphi'(t) dt = \varphi(x) - \lim_{+\infty} \varphi$. Or φ tend vers 0 en $+\infty$.

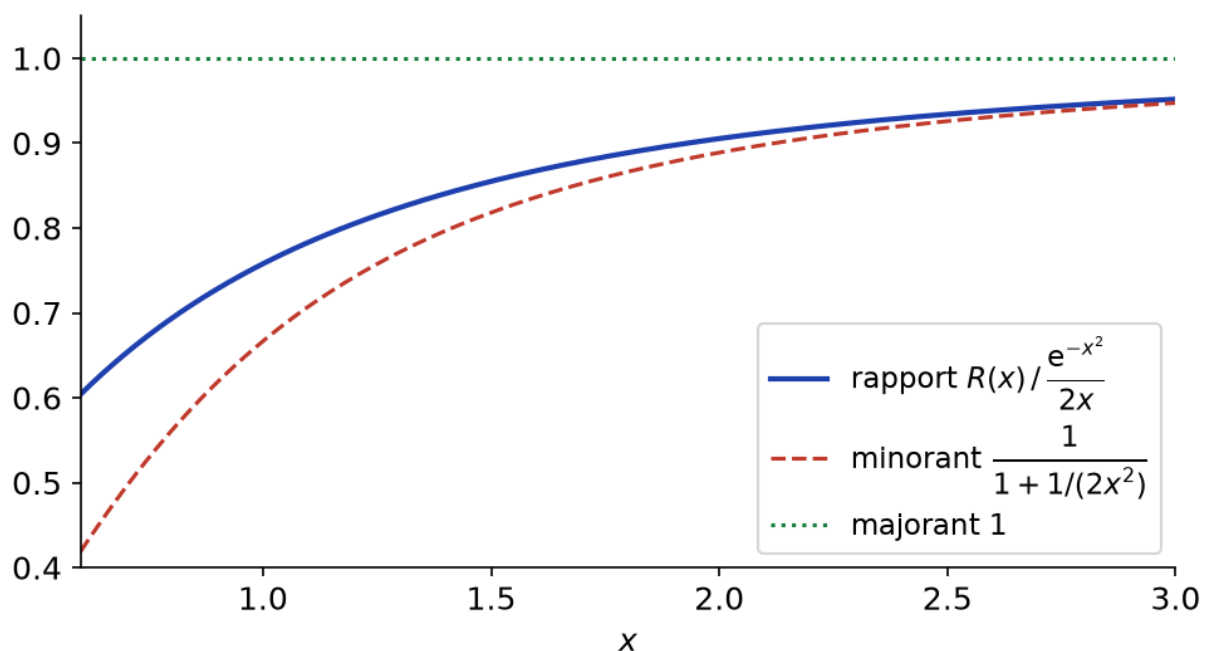
Donc $R(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

3. On écrit $e^{-t^2} = \frac{1}{2t} \cdot 2t e^{-t^2}$. Posons $u(t) = \frac{1}{2t}$ et $v(t) = -e^{-t^2}$. Le produit uv tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties sur $[x, +\infty[$:

$$R(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt.$$

La dernière intégrale est positive, d'où $R(x) \leq \frac{e^{-x^2}}{2x}$. De plus, pour $t \geq x$, $\frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{2x^2}$, donc cette intégrale est au plus $\frac{R(x)}{2x^2}$. Ainsi, $R(x) \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \geq \frac{e^{-x^2}}{2x}$. **On obtient l'encadrement demandé.**

4. Pour $x = 3$, on a $\frac{e^{-9}}{6} \approx 2,0568 \cdot 10^{-5}$ et $1 + \frac{1}{18} = \frac{19}{18}$. La borne inférieure vaut donc environ $1,9485 \cdot 10^{-5}$. **Ainsi,** $1,94 \cdot 10^{-5} \leq R(3) \leq 2,06 \cdot 10^{-5}$. La figure ci-dessous montre le rapport $R(x) / \varphi(x)$, coincé entre les deux bornes et tendant vers 1.



Corrigé de l'exercice 19 : Comportement en 0 d'une intégrale partielle

1. Quand $t \rightarrow 0^+$, $\frac{\cos t}{t} \sim \frac{1}{t}$, fonction positive et non intégrable sur $]0, 1]$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison (cas non intégrable, appliqué à la borne 0), on a $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \sim \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$. **Donc** $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \sim -\ln x$.
2. De même, $\frac{e^t}{t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ en 0, positive et non intégrable sur $]0, 1]$. Par conséquent, $\int_x^1 \frac{e^t}{t^2} dt \sim \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1$. **Comme** $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, **on obtient l'équivalent** $\frac{1}{x}$.
3. On écrit $\frac{\cos t}{t} = \frac{1}{t} + \frac{\cos t - 1}{t}$. Or $\cos t - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$, donc $\frac{\cos t - 1}{t} \rightarrow 0$ en 0. Cette fonction est prolongeable par continuité, donc intégrable sur $]0, 1]$. Posons $C = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t} dt$. Alors $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = -\ln x + \int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t} dt$, et la dernière intégrale tend vers C . **Ainsi**, $\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = -\ln x + C + o(1)$.

Corrigé de l'exercice 20 : Une intégrale de type Frullani

1. Notons $f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$, continue et positive sur $]0, +\infty[$, car $e^{-t} \geq e^{-2t}$. En 0, $e^{-t} - e^{-2t} = t + o(t)$, donc $f(t) \rightarrow 1$: c'est un faux problème. En $+\infty$, $0 \leq f(t) \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$. **Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$.**
2. Soit $\varepsilon > 0$. Les fonctions $\frac{e^{-t}}{t}$ et $\frac{e^{-2t}}{t}$ sont intégrables sur $[\varepsilon, +\infty[$, car elles sont majorées par $\frac{e^{-t}}{\varepsilon}$. On peut donc séparer l'intégrale. Ensuite, avec $u = 2t$, on obtient $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$. Par la relation de Chasles, la différence vaut $\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$. **L'égalité demandée est établie.**
3. Pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, on a $\frac{e^{-2\varepsilon}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-\varepsilon}}{t}$. En intégrant, et puisque $\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dt}{t} = \ln 2$, on obtient

$$e^{-2\varepsilon} \ln 2 \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) dt \leq e^{-\varepsilon} \ln 2.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le terme central tend vers I , car l'intégrale converge. **Par encadrement**, $I = \ln 2$.

4. Le même raisonnement, avec $u = at$ et $u = bt$, donne

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du. \text{ Cette quantité est comprise entre } e^{-b\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \text{ et } e^{-a\varepsilon} \ln \frac{b}{a}. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

Point de méthode : on ne sépare pas l'intégrale sur $]0, +\infty[$, car chaque morceau diverge en 0 ; on coupe d'abord à ε .

Corrigé de l'exercice 21 : Fonction intégrable décroissante et limite de $x f(x)$

1. Posons $F(x) = \int_0^x f$. Comme f est intégrable, $F(x)$ tend vers une limite finie L quand

$x \rightarrow +\infty$. Or $\int_{x/2}^x f = F(x) - F(x/2)$, et $F(x/2) \rightarrow L$ également. **Donc**

$$\int_{x/2}^x f(t) dt \rightarrow L - L = 0.$$

2. Pour $t \in [\frac{x}{2}, x]$, la décroissance donne $f(t) \geq f(x)$. En intégrant sur un intervalle de

longueur $\frac{x}{2}$, on obtient $\int_{x/2}^x f \geq \frac{x}{2} f(x)$. De plus, $f(x) \geq 0$. Ainsi,

$0 \leq x f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f$, et le majorant tend vers 0. **Par encadrement**, $x f(x) \rightarrow 0$,
c'est-à-dire $f(x) = o(1/x)$.

3. La fonction f de l'exercice 6 est continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$. Pourtant,
 $n f(n) = n^2 \rightarrow +\infty$. **Sans décroissance, la conclusion est donc fausse.**

4. D'après l'exercice 14, $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge, alors que $t \cdot \frac{1}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \rightarrow 0$. **La réciproque**
est fausse : $f(x) = o(1/x)$ n'entraîne pas l'intégrabilité, même pour une fonction
 décroissante.

Corrigé de l'exercice 22 : Intégrale du logarithme du sinus

- La fonction est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et négative. En 0, $\ln(\sin t) = \ln t + \ln \frac{\sin t}{t}$, et le
 second terme tend vers $\ln 1 = 0$. Donc $\ln(\sin t) \sim \ln t$. Or $|\ln t| = o(1/t^{1/2})$ est
 intégrable en 0. **Par équivalence**, $t \rightarrow \ln(\sin t)$ **est intégrable sur** $]0, \frac{\pi}{2}]$.
- L'application $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$ est une bijection C^1 strictement décroissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur
 $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$. Le changement de variable donne donc la convergence
 et l'égalité. **Ainsi**, $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

Questions 3 à 5

- En π , $\sin u = \sin(\pi - u) \sim \pi - u$, donc la fonction est aussi intégrable près de π . Par la
 relation de Chasles, on coupe en $\frac{\pi}{2}$. Sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$, le changement de variable $u = \pi - v$ donne

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin v) dv = I. \text{ Donc } \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = 2I.$$

4. En ajoutant les deux expressions de I , on obtient, par linéarité :

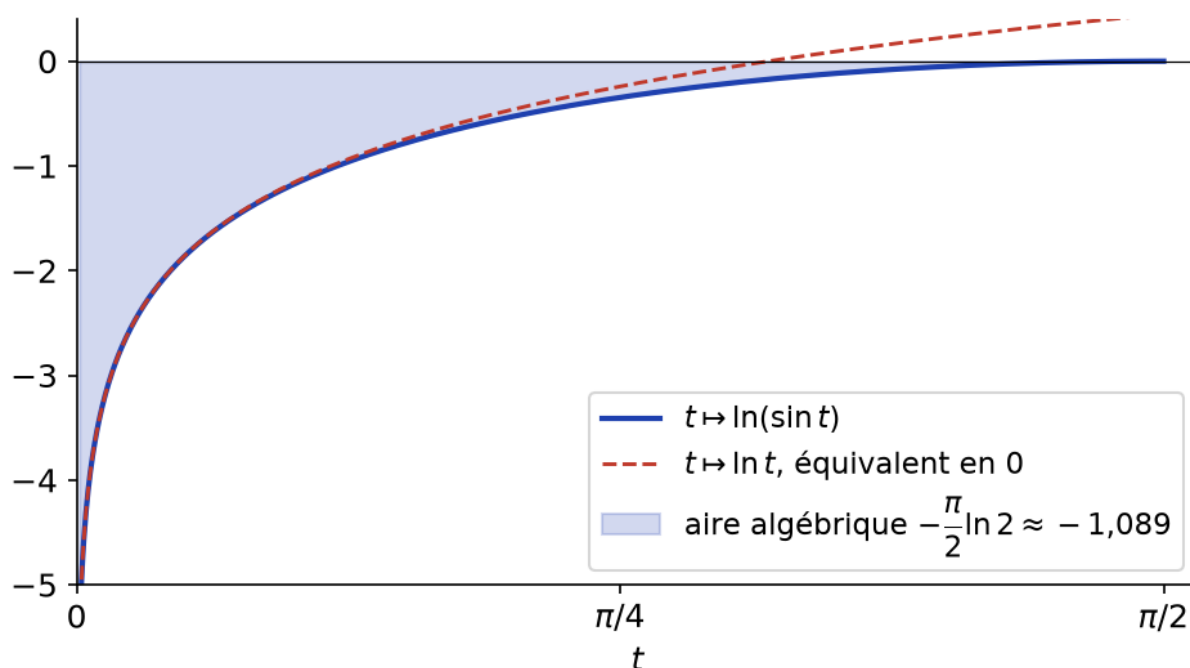
$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Ensuite, avec $u = 2t$, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = I$. Ainsi,

$2I = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$. **Finalement**, $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. La figure ci-dessous représente l'aire algébrique correspondante.

5. L'application $\theta \rightarrow \sin \theta$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, 1[$. Avec $t = \sin \theta$, on a $dt = \cos \theta d\theta$ et $\sqrt{1-t^2} = \cos \theta$. L'intégrale devient

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta, \text{ qui converge. Donc } \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$



Corrigé de l'exercice 23 : Problème, intégrales de Wallis et

intégrale de Gauss

Partie A.

1. On a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \left[\sin \theta \right]_0^{\pi/2} = 1$. Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos \theta \leq 1$, donc $0 \leq \cos^{n+1} \theta \leq \cos^n \theta$. Par positivité de l'intégrale, $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. De plus, $\cos^n$ est continue, positive et non nulle, donc $W_n > 0$. **La suite (W_n) est strictement positive et décroissante.**

2. On écrit $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} \theta \cdot \cos \theta \, d\theta$. Posons $u = \cos^{n+1}$ et $v = \sin$. Le crochet $\left[\cos^{n+1} \theta \sin \theta \right]_0^{\pi/2}$ est nul. Donc

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \sin^2 \theta \, d\theta = (n+1) (W_n - W_{n+2}),$$

en utilisant $\sin^2 = 1 - \cos^2$. **Ainsi,** $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.

3. Posons $u_n = (n+1) W_{n+1} W_n$. Alors $u_{n+1} = (n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_n W_{n+1} = u_n$. La suite est donc constante, égale à $u_0 = W_1 W_0$. **Pour tout n ,** $(n+1) W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2}$.

4. Par décroissance, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. En divisant par $W_n > 0$, on obtient $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. Par encadrement, $W_{n+1} \sim W_n$. Ensuite, $\frac{\pi}{2} = (n+1) W_{n+1} W_n \sim n W_n^2$. Donc $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, et comme $W_n > 0$, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie B

Partie B.

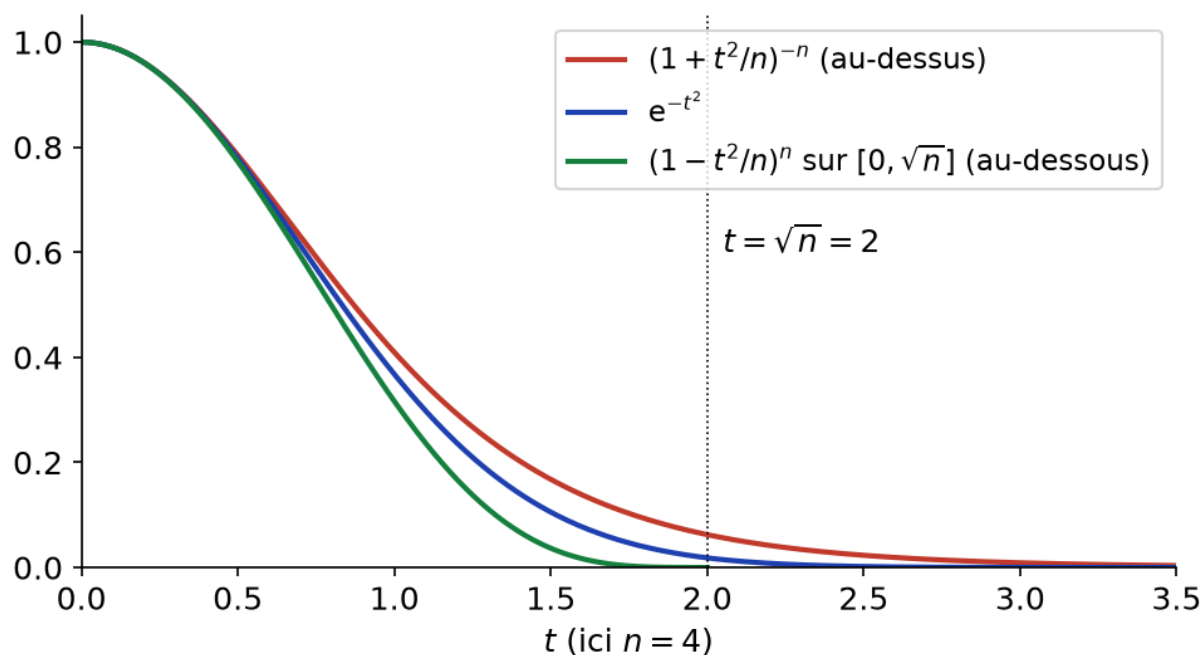
1. La fonction $h(u) = e^u - 1 - u$ a pour dérivée $e^u - 1$, négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Son minimum vaut $h(0) = 0$, donc $1 + u \leq e^u$. Avec $u = -\frac{t^2}{n}$, on obtient $1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-t^2/n}$. Pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, les deux membres sont positifs, et $x \rightarrow x^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$. De même, avec $u = \frac{t^2}{n}$, on a $0 < 1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{t^2/n}$. En élevant à la puissance n , puis en passant à l'inverse, **on obtient** $e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ **pour tout** $t \geq 0$.
2. L'application $\theta \rightarrow \sqrt{n} \sin \theta$ est une bijection C^1 strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$. On a $dt = \sqrt{n} \cos \theta d\theta$ et $1 - \frac{t^2}{n} = \cos^2 \theta$. Donc l'intégrale vaut $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \cdot \sqrt{n} \cos \theta d\theta$. Ainsi, $\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$.
3. D'abord, l'inégalité de Bernoulli donne $(1 + \frac{t^2}{n})^n \geq 1 + t^2$. Donc $0 < (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \leq \frac{1}{1 + t^2}$, qui est intégrable : l'intégrale converge. Ensuite, $\theta \rightarrow \sqrt{n} \tan \theta$ est une bijection C^1 strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$. On a $dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 \theta} d\theta$ et $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$. L'intégrale devient $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \cdot \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 \theta} d\theta$. Donc $\int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \sqrt{n} W_{2n-2}$.
4. En intégrant les inégalités de la question 1, et puisque $e^{-t^2} \geq 0$ sur $[\sqrt{n}, +\infty[$, on obtient

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq G \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

D'après la partie A, $\sqrt{n} W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2(2n+1)}}$, qui tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. De même,

$$\sqrt{n} W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2(2n-2)}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \text{ Par encadrement, } G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La figure ci-dessous montre, pour $n = 4$, les deux fonctions qui encadrent e^{-t^2} .



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [intégrales généralisées, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur intégrales généralisées](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#)
- Chapitre suivant : [Convergence dominée et intégration terme à terme](#)
- Le même thème en L2 : [intégrales généralisées, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)