

Intégrales généralisées

Corrigé de l'exercice 1 : Calculs directs par primitive

1. La fonction $t \rightarrow t e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$: seule la borne $+\infty$ est impropre. Une primitive est $-\frac{1}{2} e^{-t^2}$. Pour $x \geq 0$, on a donc $\int_0^x t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$, qui tend vers $\frac{1}{2}$. **L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$.**

2. L'intégrande est continu sur $[0, 1[$ et non borné près de 1 : la borne 1 est impropre. Pour $x \in [0, 1[$, on a $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x}$. Cette quantité tend vers 2 quand $x \rightarrow 1$. **L'intégrale converge et vaut 2.**

3. Les deux bornes sont impropres. On coupe en 0. D'abord, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Ensuite, $\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $x \rightarrow -\infty$. Les deux intégrales convergent. **Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.**

4. Pour $x \geq 0$, on a $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$, qui tend vers $+\infty$. **L'intégrale diverge.**

5. Pour $x \geq 0$, on a $\int_0^x \cos t dt = \sin x$. Or $\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$: en effet, $\sin(2n\pi) = 0$ et $\sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$. **L'intégrale diverge, sans tendre vers l'infini.**

Corrigé de l'exercice 2 : Comparaison avec les intégrales de Riemann

1. L'intégrande est continu et positif sur $[1, +\infty[$. De plus, $0 \leq \frac{1}{t^2 + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, car $2 > 1$. **Par comparaison, l'intégrale converge.**

2. L'intégrande est positif sur $[1, +\infty[$ et $\frac{t+1}{t^2+3} \sim \frac{1}{t}$ en $+\infty$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. Les fonctions étant positives, le critère d'équivalence s'applique. **L'intégrale diverge.**

3. La seule borne impropre est 0 . En 0 , on a $t = o(\sqrt{t})$, donc $t + \sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ et $\frac{1}{t + \sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\int_0^1 t^{-1/2} dt$ converge, car $\frac{1}{2} < 1$. L'intégrande étant positif, l'intégrale converge. Ensuite, l'application $u \rightarrow u^2$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, 1]$ sur $]0, 1]$. Avec $t = u^2$ et $dt = 2u du$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{2u du}{u^2 + u} = \int_0^1 \frac{2 du}{u + 1} = 2 \ln 2.$$

L'intégrale converge et vaut $2 \ln 2$.

4. Sur $]0, 1]$, $\sin t > 0$, et $\frac{1}{\sin t} \sim \frac{1}{t}$ en 0 . Or $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge. Par équivalence de fonctions positives, **l'intégrale diverge.**

5. L'intégrande est positif. Par croissances comparées, avec $s = \sqrt{t}$, on a $t^2 e^{-\sqrt{t}} = s^4 e^{-s} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc $e^{-\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. **Par comparaison à $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, l'intégrale converge.**

Point de méthode : pour une exponentielle décroissante, on montre que $t^2 f(t) \rightarrow 0$; on obtient ainsi $f = o(1/t^2)$ sans chercher de primitive.

Corrigé de l'exercice 3 : Intégrales faussement généralisées

1. La fonction $t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. Or $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$. Elle se prolonge donc par continuité en 0 par la valeur 1 . **L'intégrale est faussement généralisée, donc convergente.**
2. Le développement limité $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donne $\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$. Ainsi, la fonction se prolonge par continuité en 0 par $\frac{1}{2}$. **L'intégrale est faussement généralisée.**
3. Par croissances comparées, $t \ln t \rightarrow 0$ en 0 : l'intégrale est faussement généralisée, donc convergente. Pour le calcul, on intègre par parties sur $[x, 1]$, avec $x \in]0, 1[$. On dérive $\ln t$ et on primitive t :

$$\int_x^1 t \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2} \, dt = -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1-x^2}{4}.$$

Quand $x \rightarrow 0$, on a $x^2 \ln x \rightarrow 0$. **Donc** $\int_0^1 t \ln t \, dt = -\frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 4 : Primitives et intégrales de Bertrand

1. Sur $[2, +\infty[$, la fonction $\ln t$ est strictement positive. La dérivée de $\ln(\ln t)$ est $\frac{1}{t \ln t}$.
Donc $\int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$, qui tend vers $+\infty$. **L'intégrale diverge.**

2. La dérivée de $-\frac{1}{\ln t}$ est $\frac{1}{t(\ln t)^2}$. Ainsi, $\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$, qui tend vers $\frac{1}{\ln 2}$.
L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln 2}$.

3. Sur $]0, 1/2]$, $\ln t < 0$ et la borne impropre est 0. La même primitive donne, pour $x \in]0, 1/2[$:

$$\int_x^{1/2} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = -\frac{1}{\ln(1/2)} + \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln x}.$$

Quand $x \rightarrow 0$, $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$. **L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln 2}$.**

4. On intègre par parties sur $[e, x]$, en dérivant $\ln t$ et en primitivant $\frac{1}{t^2}$:

$$\int_e^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_e^x + \int_e^x \frac{dt}{t^2} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - \frac{1}{x}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$. **L'intégrale converge et vaut $\frac{2}{e}$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Changements de variable

1. L'intégrande est positif et inférieur à e^{-t} , dont l'intégrale converge : l'intégrale converge.

L'application $t \rightarrow e^t$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. Avec $u = e^t$, on a $dt = \frac{du}{u}$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u + \frac{1}{u})} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$.

2. Les deux bornes sont impropres. En 0, l'intégrande est équivalent à $t^{-1/2}$; en 1, il est

équivalent à $(1-t)^{-1/2}$. Ces deux références convergent, donc l'intégrale converge. Ensuite, $\theta \rightarrow \sin^2 \theta$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, \pi/2[$ sur $]0, 1[$. On a $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ et $\sqrt{t(1-t)} = \sin \theta \cos \theta$, car ces deux nombres sont positifs. Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\pi/2} 2 d\theta = \pi.$$

L'intégrale vaut π .

3. En 1, on a $t\sqrt{t^2-1} = t\sqrt{t+1}\sqrt{t-1} \sim \sqrt{2}\sqrt{t-1}$. L'intégrande est donc équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2}}(t-1)^{-1/2}$: convergence en 1. En $+\infty$, il est équivalent à $\frac{1}{t^2}$: convergence. Ensuite, $t \rightarrow \sqrt{t^2-1}$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. On a $t^2 = 1 + u^2$, donc $t dt = u du$ et $\frac{dt}{t u} = \frac{u du}{t^2 u} = \frac{du}{1+u^2}$. Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Une intégrale impropre aux deux bornes

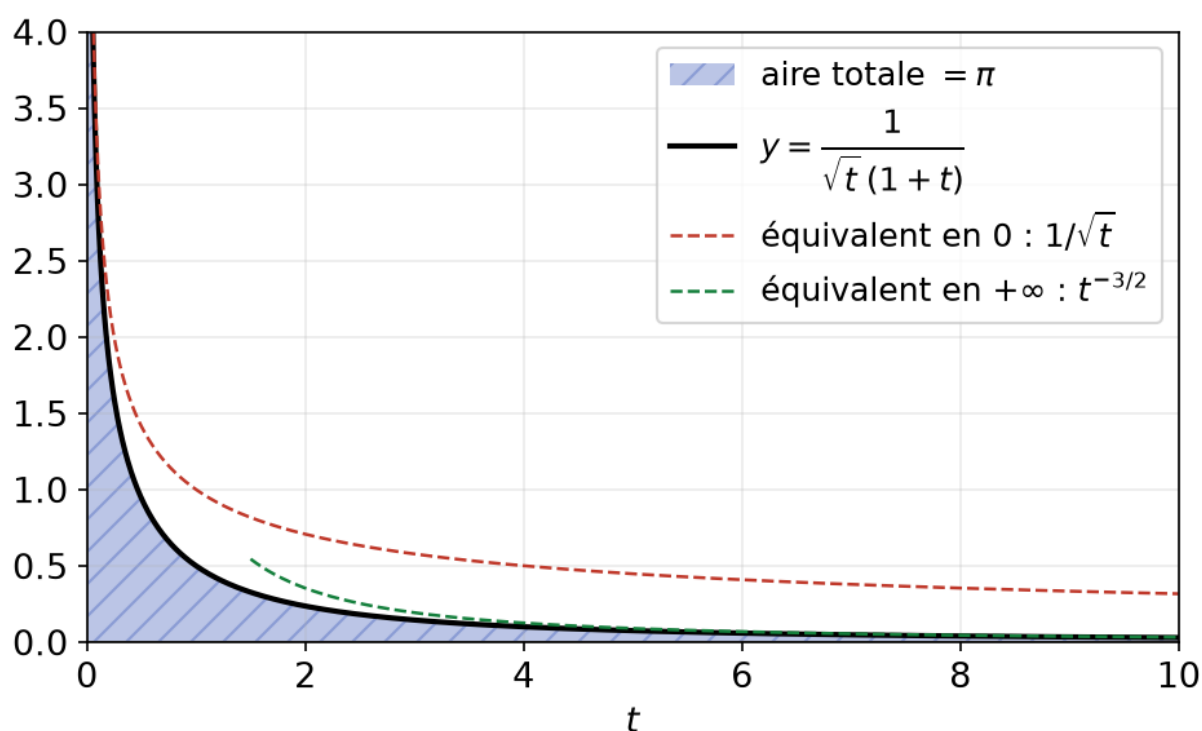
1. L'intégrande est continu sur $]0, +\infty[$. Il n'est pas borné près de 0, et l'intervalle n'est pas borné en $+\infty$. Par définition, I converge si et seulement si $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$ convergent. **Les deux bornes doivent être étudiées séparément.**
2. L'intégrande est positif. En 0, il est équivalent à $t^{-1/2}$, et $\frac{1}{2} < 1$: convergence. En $+\infty$, il est équivalent à $t^{-3/2}$, et $\frac{3}{2} > 1$: convergence. **Donc I converge.**

3. L'application $u \rightarrow u^2$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = u^2$, $dt = 2u du$ et $\sqrt{t} = u$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u du}{u(1+u^2)} = 2 \left[\arctan u \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Ainsi, $I = \pi$.

La figure ci-dessous représente l'intégrande. L'aire hachurée, infinie en largeur et en hauteur, vaut pourtant exactement π .



Corrigé de l'exercice 7 : Une famille à paramètre

1. L'intégrande est continu et positif sur $]0, +\infty[$. En 0 , il est équivalent à $t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$:

convergence si et seulement si $-\alpha < 1$, soit $\alpha > -1$. En $+\infty$, il est équivalent à $t^\alpha - 2 = \frac{1}{t^{2-\alpha}}$: convergence si et seulement si $2 - \alpha > 1$, soit $\alpha < 1$. **Donc** $J(\alpha)$ **converge si et seulement si** $-1 < \alpha < 1$.

2. On a $J(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$. **Donc** $J(0) = \frac{\pi}{2}$.

3. L'application $u \rightarrow 1/u$ est une bijection C^1 strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = 1/u$, on a $dt = -\frac{du}{u^2}$, et les bornes s'échangent :

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{-\alpha}}{1+u^{-2}} \cdot \frac{du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{-\alpha}}{u^2+1} du.$$

Ainsi, $J(\alpha) = J(-\alpha)$ pour $-1 < \alpha < 1$.

Corrigé de l'exercice 8 : La fonction Gamma

1. L'intégrande $t^{x-1} e^{-t}$ est continu et positif sur $]0, +\infty[$. En 0 , il est équivalent à

$t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$. Donc $\int_0^1$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, soit $x > 0$. En $+\infty$, on

a $t^2 \cdot t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \rightarrow 0$, par croissances comparées. L'intégrande est donc un

$o(1/t^2)$, et $\int_1^{+\infty}$ converge toujours. **Par conséquent**, $\Gamma(x)$ **converge si et seulement si** $x > 0$.

2. Soit $x > 0$. Posons $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = t^x$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Le produit $uv = -t^x e^{-t}$ tend vers 0 en 0 , car $x > 0$, et vers 0 en $+\infty$. Le théorème d'intégration par parties généralisée s'applique donc. Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} u' v = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} u v' = -x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ sont de même nature.}$$

Or elles convergent d'après la question 1. Ainsi, $\Gamma(x+1) = 0 - 0 + x \Gamma(x)$. **Donc** $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

3. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Ensuite, une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \dots 1 \cdot \Gamma(1)$. **Ainsi, $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**
4. On a $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$. L'application $u \rightarrow u^2$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = u^2$, on obtient $t^{-1/2} = \frac{1}{u}$ et $dt = 2u du$. **Donc $\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Intégrale du logarithme du sinus

1. La fonction $t \rightarrow \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et négative. Or $\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) \rightarrow \ln 1 = 0$ en 0 , tandis que $\ln t \rightarrow -\infty$. Donc $\ln(\sin t) \sim \ln t$. De plus, $\sqrt{t} |\ln t| \rightarrow 0$, donc $|\ln t| = o(t^{-1/2})$. Par comparaison de fonctions de signe constant, **I converge.**
2. L'application $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ décroissante de $[0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2]$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$, le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ transforme J en I . **Ainsi, J converge et $J = I$.**
3. On coupe en $\pi/2$. Sur $[\pi/2, \pi[$, on pose $u = \pi - v$, avec $v \in]0, \pi/2]$. Comme $\sin(\pi - v) = \sin v$, on obtient $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u) du = I$. **Donc $\int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = 2I$.**
4. Pour $t \in]0, \pi/2[$, on a $\ln(\sin t) + \ln(\cos t) = \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) = \ln(\sin 2t) - \ln 2$. Par linéarité, $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2$. Ensuite, avec $u = 2t$,
- $$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = I.$$
- Ainsi, $2I = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$. Donc $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Intégrales de Bertrand en zéro

1. L'application $u \rightarrow 1/u$ est une bijection C^1 décroissante de $[2, +\infty[$ sur $]0, 1/2]$.
Avec $t = \frac{1}{u}$, on a $dt = -\frac{du}{u^2}$, $t^\alpha = u^{-\alpha}$ et $|\ln t| = \ln u$. Les bornes s'échangent, d'où

$$K(\alpha, \beta) = \int_2^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(\ln u)^\beta} \cdot \frac{du}{u^2} = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^\beta}.$$

Les deux intégrales sont de même nature.

2. Le théorème des intégrales de Bertrand s'applique aussi sur $[2, +\infty[$, car seule la borne $+\infty$ compte. La convergence a lieu si et seulement si $2 - \alpha > 1$, ou $2 - \alpha = 1$ et $\beta > 1$. **Donc $K(\alpha, \beta)$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.**
3. La première intégrale correspond à $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2} \leq 1$: **elle diverge**. La seconde s'écrit $\frac{1}{t^{1/2} |\ln t|^{-5}}$: $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ et $\beta = -5$. **Elle converge.**

Corrigé de l'exercice 11 : Nature par développement asymptotique

1. Posons $x = \frac{1}{t} \rightarrow 0$. Comme $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a $\frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t} \sim \frac{1}{6t^3}$. De plus,
 $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$, donc l'intégrande est positif. Par comparaison à $\int_1^{+\infty} t^{-3} dt$,

l'intégrale converge.

2. Pour $t \geq 1$, $\frac{1}{t} \in]0, 1]$, donc $\cos \frac{1}{t} \in]0, 1[$ et l'intégrande est négatif. Ensuite,

$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \sim -\frac{x^2}{2}$. Ainsi, $\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) \sim -\frac{1}{2t^2}$, de signe constant.

L'intégrale converge.

3. On a $t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. En prenant l'exponentielle,

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \cdot \exp\left(-\frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = e - \frac{e}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Donc l'intégrande est équivalent à $-\frac{e}{2t}$, fonction de signe constant. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

L'intégrale diverge (vers $-\infty$).

4. En 0 , on a $\sin t = t\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)$, donc $\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)$. Ainsi, $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t}{6} + o(t) \rightarrow 0$. **L'intégrale est faussement généralisée, donc convergente.**

Point de méthode : on pousse le développement jusqu'au premier terme non nul ; c'est lui qui fournit l'équivalent et donc la nature.

Corrigé de l'exercice 12 : Convergence absolue

- Pour $t \geq 1$, $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, d'intégrale convergente. **L'intégrale est absolument convergente.**
- Deux bornes sont à étudier. En 0 , $\frac{\sin t}{t^{3/2}} \sim \frac{1}{t^{1/2}}$, qui est positif et intégrable en 0 . En $+\infty$, $\left|\frac{\sin t}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$, intégrable car $\frac{3}{2} > 1$. **L'intégrale est absolument convergente.**
- On a $\left|\frac{\cos(t)\ln t}{t^2}\right| \leq \frac{\ln t}{t^2}$. Or $t^{3/2} \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$, donc $\frac{\ln t}{t^2} = o(t^{-3/2})$. **L'intégrale est absolument convergente.**
- D'abord, $|e^{-t}\cos t| \leq e^{-t}$, donc l'intégrale converge absolument. Ensuite, $|e^{(-1+i)t}| = e^{-t}$, et

$$\int_0^x e^{(-1+i)t} dt = \frac{e^{(-1+i)x} - 1}{-1+i} \quad [x \rightarrow +\infty] \frac{1}{-i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

La partie réelle de l'intégrande est $e^{-t} \cos t$. **Donc** $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Semi-convergence de l'intégrale de $\sin(t)/t$

1. Sur $[1, x]$, on dérive $\frac{1}{t}$ et on primitive $\sin t$ en $-\cos t$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

D'abord, $\frac{|\cos x|}{x} \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$. Ensuite, $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, donc la dernière intégrale converge absolument. **Ainsi,** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ **converge.**

2. Comme $|\sin t| \leq 1$, on a $\sin^2 t = |\sin t| \cdot |\sin t| \leq |\sin t|$. De plus, $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$. **Donc** $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$.

3. La même intégration par parties, avec la primitive $\frac{\sin 2t}{2}$, donne

$$\int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin 2}{2} + \int_1^x \frac{\sin 2t}{2t^2} dt, \text{ qui converge. Par l'absurde, si } \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}$$

convergeait, alors $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}$ convergerait, ce qui est faux. Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} \text{ diverge. Par comparaison de fonctions positives, } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt \text{ **diverge.**}$$

4. Sur $]0, 1]$, l'intégrale est faussement généralisée (exercice 3). Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ converge.

Cependant, $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}$ diverge d'après la question 3. **L'intégrale de Dirichlet est semi-convergente.**

Corrigé de l'exercice 14 : Règle d'Abel

1. La fonction $f(t) = t^{-\alpha}$ est C^1 , positive et décroissante vers 0 sur $[1, +\infty[$, car $\alpha > 0$. De plus, $\left| \int_1^x \cos t \, dt \right| = |\sin x - \sin 1| \leq 2$. La règle d'Abel donne la convergence. Ensuite, si $\alpha > 1$, on a $\frac{|\cos t|}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$: convergence absolue. Si $0 < \alpha \leq 1$, on minore $|\cos t| \geq \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t^\alpha}$ converge par la règle d'Abel, tandis que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^\alpha}$ diverge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^\alpha}$ diverge. **L'intégrale converge pour tout $\alpha > 0$, absolument si et seulement si $\alpha > 1$.**

2. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{\ln t}$ est C^1 , positive et décroissante vers 0 sur $[2, +\infty[$. De plus, $\left| \int_2^x \sin t \, dt \right| \leq 2$. Par la règle d'Abel, l'intégrale converge. En revanche, $\ln t \leq t$, donc $\frac{|\sin t|}{\ln t} \geq \frac{|\sin t|}{t}$, dont l'intégrale diverge (exercice 13). **L'intégrale est semi-convergente.**

3. Pour $t \geq 1$, $\frac{1}{t} \in]0, 1] \subset [0, \pi/2]$. La fonction $f(t) = \sin \frac{1}{t}$ est C^1 , positive, de dérivée $-\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} \leq 0$, et tend vers 0. La règle d'Abel avec $g = \sin$ donne la convergence. Ensuite, l'inégalité admise donne $|\sin t| \sin \frac{1}{t} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{|\sin t|}{t}$. Or l'intégrale du minorant diverge. **L'intégrale est semi-convergente.**

Corrigé de l'exercice 15 : Équivalence sans signe constant

1. La fonction $t \rightarrow t^{-1/2}$ est C^1 , positive et décroissante vers 0, et les intégrales

$\int_1^x \sin t \, dt$ sont bornées par 2. **Par la règle d'Abel,** $\int_1^{+\infty} f$ **converge.**

2. On factorise : $g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$. Posons $\varepsilon(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. Alors $|\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$.
Donc $g = f(1 + \varepsilon)$ **avec** $\varepsilon \rightarrow 0$: $g \sim f$.

3. On a $\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$. Le second terme a une intégrale convergente (exercice 13), le

premier une intégrale divergente. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}$ diverge. Si $\int_1^{+\infty} g$ convergeait, alors

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} = \int_1^{+\infty} (g - f)$ convergerait. **Donc** $\int_1^{+\infty} g$ **diverge.**

4. Les fonctions f et g sont équivalentes, mais leurs intégrales n'ont pas la même nature.

L'hypothèse manquante est le signe constant : f change de signe sur tout intervalle $[k\pi, (k+2)\pi]$.

Corrigé de l'exercice 16 : Critère de Cauchy et fonctions décroissantes

1. La fonction f est décroissante et minorée par 0, donc elle admet une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$

. De plus, $f \geq \ell$ sur $[0, +\infty[$. Si $\ell > 0$, alors $\int_0^x f \geq \ell x \rightarrow +\infty$, ce qui contredit la convergence. **Donc** $\ell = 0$.

2. Pour $t \in [x/2, x]$, la décroissance donne $f(t) \geq f(x)$. En intégrant sur un segment de

longueur $\frac{x}{2}$, on obtient $\frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f$. Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Le critère de Cauchy fournit c

tel que $\left| \int_u^v f \right| \leq \varepsilon$ pour $u, v \geq c$. Pour $x \geq 2c$, on a $\frac{x}{2} \geq c$, donc $0 \leq x f(x) \leq 2\varepsilon$. **Ainsi, $x f(x) \rightarrow 0$, autrement dit $f(x) = o(1/x)$.**

3. La fonction $t \ln t$ est croissante et strictement positive sur $[2, +\infty[$, donc f est continue, positive et décroissante. De plus, $t f(t) = \frac{1}{\ln t} \rightarrow 0$. Pourtant, $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge (exercice

4). **La condition $x f(x) \rightarrow 0$ n'est donc pas suffisante.**

Corrigé de l'exercice 17 : Comparaison série-intégrale

1. La fonction $t \rightarrow t \ln t$ a pour dérivée $\ln t + 1 > 0$ sur $[2, +\infty[$. Elle est donc strictement croissante et strictement positive. **Par conséquent, $f = \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante.**

2. Pour $k \geq 2$ et $t \in [k, k+1]$, on a $f(t) \leq f(k)$, donc $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$. En sommant de

$k = 2$ à n , on obtient $S_n \geq \int_2^{n+1} f$. De même, pour $k \geq 3$, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f$, d'où

$S_n \leq f(2) + \int_2^n f$. Comme une primitive de f est $\ln(\ln t)$, **on obtient**

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq f(2) + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

3. La minoration montre que $S_n \rightarrow +\infty$: la série diverge. Ensuite,

$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, donc $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln n) + o(1)$. En divisant l'encadrement par $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$, les deux bornes tendent vers 1. **La série**

$\sum \frac{1}{n \ln n}$ **diverge et $S_n \sim \ln(\ln n)$.**

4. La fonction $h(t) = \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, et $\int_2^{+\infty} h = \frac{1}{\ln 2}$

(exercice 4). Par comparaison série-intégrale, la série converge. Ensuite, pour $k \geq n+1$, on a

$$\int_k^{k+1} h \leq h(k) \leq \int_{k-1}^k h. \text{ En sommant sur } k \geq n+1, \text{ il vient}$$

$$\frac{1}{\ln(n+1)} = \int_{n+1}^{+\infty} h \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} h = \frac{1}{\ln n}.$$

Comme $\ln(n+1) \sim \ln n$, on conclut que $R_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

Corrigé de l'exercice 18 : Intégration des relations de comparaison

1. Pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$, donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$. L'intégrale converge donc. Ensuite, on écrit $e^{-t^2} = (-2t e^{-t^2}) \cdot \left(-\frac{1}{2t}\right)$. Posons $u(t) = e^{-t^2}$ et $v(t) = -\frac{1}{2t}$, de classe C^1 sur $[x, +\infty[$. Le produit $uv = -\frac{e^{-t^2}}{2t}$ tend vers 0 en $+\infty$. De plus,

$\int_x^{+\infty} u v' = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$ converge, car l'intégrande est majoré par $\frac{1}{2t^2}$. L'intégration par parties généralisée donne alors

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0 - u(x)v(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt.$$

C'est la formule annoncée.

2. En $+\infty$, $\frac{e^{-t^2}}{2t^2} = o(e^{-t^2})$. La fonction e^{-t^2} est positive d'intégrale convergente. Par intégration des relations de comparaison (cas convergent), $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = o(R(x))$, où

$$R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt. \text{ La formule précédente s'écrit donc } R(x)(1 + o(1)) = \frac{e^{-x^2}}{2x}. \text{ Ainsi,}$$

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

3. Pour $t \geq 2$, $0 < \ln t \leq t$, donc $\frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t}$ et $L(x) \geq \ln x - \ln 2 \rightarrow +\infty$. Ensuite, on intègre par parties sur $[2, x]$, en dérivant $\frac{1}{\ln t}$, de dérivée $-\frac{1}{t(\ln t)^2}$:

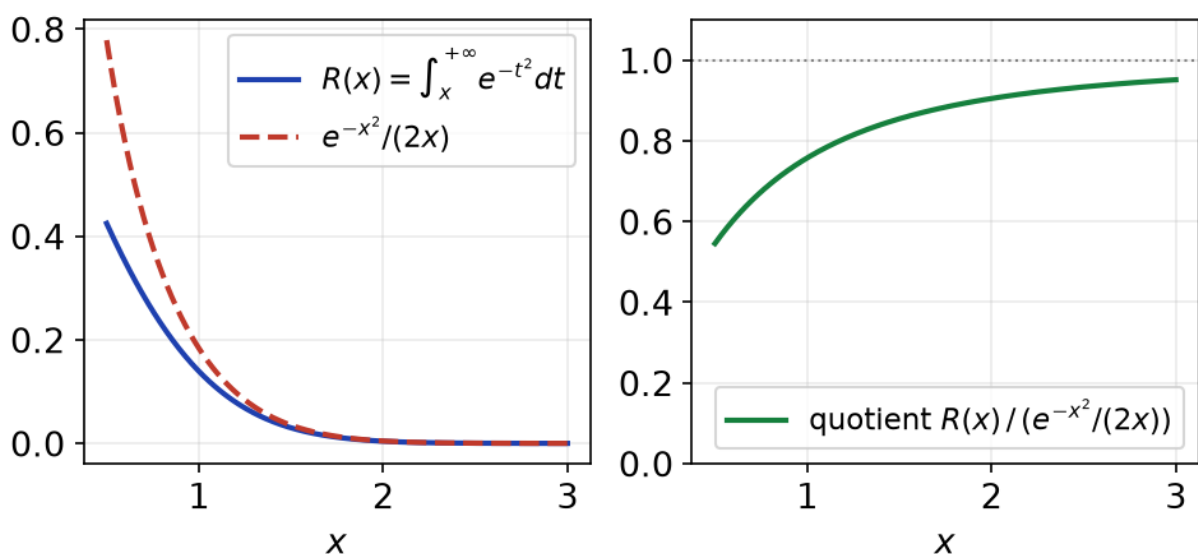
$$L(x) = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

Or $\frac{1}{(\ln t)^2} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$, et $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ diverge. Par intégration des relations de comparaison (cas

divergent), $\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} = o(L(x))$. Il vient $L(x)(1 + o(1)) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}$. Enfin,

$\frac{x}{\ln x} \rightarrow +\infty$, donc le membre de droite est équivalent à $\frac{x}{\ln x}$. **Ainsi,** $L(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

La figure ci-dessous compare $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et son équivalent $\frac{e^{-x^2}}{2x}$. Les deux courbes se rapprochent rapidement, et leur quotient tend vers 1.



Corrigé de l'exercice 19 : Intégrales de Fresnel

1. La fonction $u \rightarrow u^{-1/2}$ est C^1 , positive et décroissante vers 0 sur $[1, +\infty[$. Les intégrales $\int_1^x \sin u \, du$ sont bornées par 2. **Par la règle d'Abel, l'intégrale converge.**
2. Sur $[0, 1]$, la fonction $\sin(t^2)$ est continue : aucune difficulté. Sur $[1, x]$, l'application $t \rightarrow t^2$ est C^1 strictement croissante. Avec $u = t^2$, $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, d'où
$$\int_1^x \sin(t^2) \, dt = \int_1^{x^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} \, du$$
. Cette quantité a une limite finie d'après la question 1. **Donc**
$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) \, dt \text{ converge.}$$
3. Posons $a_n = \sqrt{2n\pi}$ et $b_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Ces suites tendent vers $+\infty$, et $\sin(a_n^2) = 0$, alors que $\sin(b_n^2) = 1$. **Par la caractérisation séquentielle, $\sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$.** L'intégrale converge donc sans que l'intégrande tende vers 0.
4. Le même changement de variable donne $\int_1^x |\sin(t^2)| \, dt = \int_1^{x^2} \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}} \, du$. Or, pour $u \geq 1$,
 $\sqrt{u} \leq u$, donc $\frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}} \geq \frac{|\sin u|}{2u}$. L'intégrale de ce minorant diverge (exercice 13). **L'intégrale de Fresnel n'est donc pas absolument convergente.**
5. Sur $[1, x]$, on pose $u = t^4$, de sorte que $du = 4t^3 \, dt$ et $t^4 = u$. Il vient
$$\int_1^x t \sin(t^4) \, dt = \frac{1}{4} \int_1^{x^4} \frac{\sin u}{u^{3/4}} \, du$$
, qui converge d'après la question 2. Cependant, pour $c_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{1/4}$, on a $c_n \sin(c_n^4) = c_n \rightarrow +\infty$. **L'intégrale converge, alors que l'intégrande n'est pas borné.**

Point de méthode : un changement de variable qui « ralentit » les oscillations ramène souvent à une intégrale du type $\int \frac{\sin u}{u^\alpha} \, du$.

Corrigé de l'exercice 20 : Intégrales de Frullani

1. L'intégrande $h(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est continu sur $]0, +\infty[$ et positif, car $a < b$. En 0, $e^{-at} - e^{-bt} = (b-a)t + o(t)$, donc $h(t) \rightarrow b-a$: l'intégrale est faussement impropre en 0. En $+\infty$, pour $t \geq 1$, $0 \leq h(t) \leq e^{-at}$, d'intégrale convergente. **Donc F converge.**

2. Les deux intégrales $\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-at}}{t} dt$ et $\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bt}}{t} dt$ portent sur un segment. Avec $u = at$, on a

$\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, donc la première vaut $\int_{a\varepsilon}^{aX} \varphi$, où $\varphi(u) = \frac{e^{-u}}{u}$. De même, la seconde vaut

$\int_{b\varepsilon}^{bX} \varphi$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{a\varepsilon}^{aX} \varphi - \int_{b\varepsilon}^{bX} \varphi = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi - \int_{aX}^{bX} \varphi.$$

C'est l'égalité demandée.

3. Sur $[a\varepsilon, b\varepsilon]$, on a $e^{-b\varepsilon} \leq e^{-u} \leq e^{-a\varepsilon}$. Comme $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u} = \ln \frac{b}{a}$, il vient

$e^{-b\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi \leq e^{-a\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$. Les deux bornes tendent vers $\ln \frac{b}{a}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De

même, $0 \leq \int_{aX}^{bX} \varphi \leq e^{-aX} \ln \frac{b}{a} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$. **Par passage à la limite,**
 $F = \ln \frac{b}{a}$.

4. Posons $k(t) = \frac{\arctan(bt) - \arctan(at)}{t}$, positive sur $]0, +\infty[$. En 0, $\arctan x = x + o(x)$, donc $k(t) \rightarrow b-a$. En $+\infty$, la formule $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ donne
 $\arctan(bt) - \arctan(at) = \arctan \frac{1}{at} - \arctan \frac{1}{bt} \sim \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{t}$. Donc
 $k(t) \sim \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{t^2}$: convergence. Ensuite, avec $\psi(u) = \frac{\arctan u}{u}$, le même calcul donne

$$\int_{\varepsilon}^X k = \int_{aX}^{bX} \psi - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \psi. \text{ D'une part, } 0 \leq \psi \leq 1, \text{ donc } 0 \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \psi \leq (b-a)\varepsilon \rightarrow 0.$$

D'autre part, $\arctan(aX) \ln \frac{b}{a} \leq \int_{aX}^{bX} \psi \leq \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$, et la borne de gauche tend vers $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$.

L'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème, valeur de l'intégrale de Dirichlet

1. Pour $k \geq 1$, la formule $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ donne $\sin((2k+1)t) - \sin((2k-1)t) = 2 \cos(2kt) \sin t$. En sommant de $k = 1$ à n , la somme est télescopique : $\sin((2n+1)t) - \sin t = 2 \sin t \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$. On divise par $\sin t \neq 0$. Ensuite, l'intégrande se prolonge par continuité en 0 , par la valeur $2n+1$. Enfin, pour $k \geq 1$,
- $$\int_0^{\pi/2} \cos(2kt) dt = \frac{\sin(k\pi)}{2k} = 0. \text{ Donc } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2. Pour $\lambda > 0$, on intègre par parties sur le segment $[\alpha, \beta]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{\varphi(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{\lambda} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

Par conséquent, la valeur absolue est majorée par $\frac{1}{\lambda} \left(|\varphi(\alpha)| + |\varphi(\beta)| + \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'| \right)$. **Cette quantité tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$.**

3. Sur $]0, \pi/2]$, φ est C^1 . En 0 , on a $\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \frac{t}{6} + o(t)$ (exercice 11), donc $\varphi(t) = -\frac{t}{6} + o(t) \rightarrow 0 = \varphi(0)$: φ est continue. Ensuite, $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t}$. Or $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$ et $\frac{1}{\sin^2 t} = \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{t^2}{3} + O(t^4) \right)$. Ainsi, $\frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{t^2}{6} + O(t^4) \right)$ et $\varphi'(t) \rightarrow -\frac{1}{6}$. Par le théorème de la limite de la dérivée,

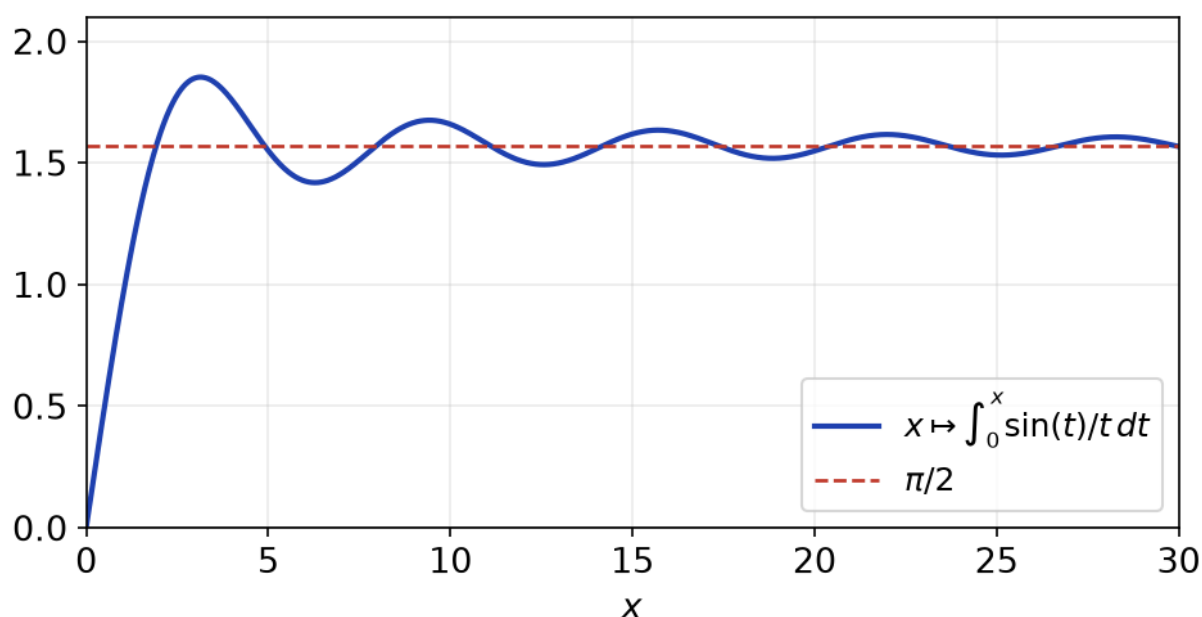
φ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, avec $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$.

4. Pour $t \in]0, \pi/2]$, on a $\frac{\sin((2n+1)t)}{t} = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} + \varphi(t)\sin((2n+1)t)$. En intégrant, puis avec les questions 1 et 2, $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} + o(1)$. Ensuite, le changement de variable $u = (2n+1)t$ conserve $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du.$$

Comme D converge et $(2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$, ce membre tend vers D . Par unicité de la limite, $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

La figure ci-dessous représente l'intégrale partielle $x \rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Elle oscille autour de $\frac{\pi}{2}$ avec une amplitude qui décroît, ce qui traduit la semi-convergence.

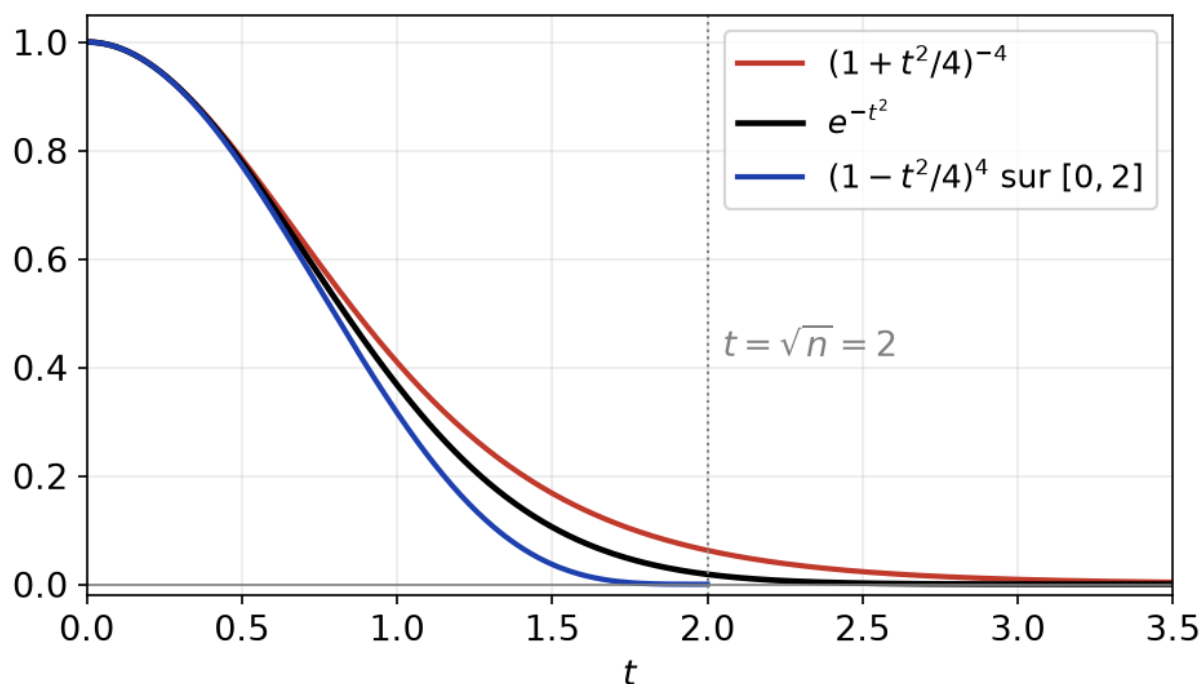


Corrigé de l'exercice 22 : Problème, intégrale de Gauss

1. Pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a $-\frac{t^2}{n} > -1$, donc $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$. La fonction exponentielle étant croissante, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$. De même, pour $t \geq 0$, $n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq t^2$, donc $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}$. En passant aux inverses, **on obtient** $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
2. L'application $\theta \rightarrow \sqrt{n} \sin \theta$ est une bijection C^1 croissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, \sqrt{n}]$. On a $dt = \sqrt{n} \cos \theta d\theta$ et $1 - \frac{t^2}{n} = \cos^2 \theta$. **Donc**
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$
3. L'application $\theta \rightarrow \sqrt{n} \tan \theta$ est une bijection C^1 croissante de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$. On a $dt = \sqrt{n}(1 + \tan^2 \theta) d\theta$ et $1 + \frac{t^2}{n} = 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$. L'intégrande devient $\sqrt{n} \cos^{2n} \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sqrt{n} \cos^{2n-2} \theta$, continu sur $[0, \pi/2]$. Le changement de variable prouve donc aussi la convergence. **Ainsi**,
$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} W_{2n-2}.$$
4. L'intégrande e^{-t^2} est positif. D'une part, $G \geq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \geq \sqrt{n} W_{2n+1}$. D'autre part, $G \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$, par positivité de l'intégrale généralisée. Ensuite, l'équivalent de Wallis donne
$$\sqrt{n} W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{4n+2}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } \sqrt{n} W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{4n-4}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par encadrement, $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. D'après l'exercice 8, $\Gamma(1/2) = 2G$. **Donc** $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

La figure ci-dessous montre l'encadrement de la question 1 pour $n = 4$. La gaussienne est coincée entre les deux fonctions polynomiale et rationnelle, dont les intégrales sont des intégrales de Wallis.



Point de méthode : encadrer l'intégrande par des fonctions dont l'intégrale se calcule, puis passer à la limite, est une stratégie efficace pour les intégrales sans primitive explicite.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [intégrales généralisées, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur intégrales généralisées](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre précédent : [Séries à termes quelconques](#)
- Chapitre suivant : [Valeurs propres et diagonalisation](#)
- Le même thème en maths spé : [intégrales généralisées, exercices de maths spé](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)