

Intégrales à paramètre

Exercice 1 : Continuité sur un segment d'intégration

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Justifier que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est strictement décroissante.
3. Calculer $F(0)$ et établir, pour $x \neq 0$, la relation $F(x) - F'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$.
4. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Exercice 2 : Nécessité de l'hypothèse de domination

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$.

1. Calculer $F(x)$ pour tout $x \geq 0$. La fonction F est-elle continue en 0 ?
2. Pour $t > 0$ fixé, calculer $\sup_{x > 0} x e^{-xt}$.
3. En déduire qu'il n'existe aucune fonction φ intégrable sur $]0, +\infty[$ telle que $x e^{-xt} \leq \varphi(t)$ pour tous $x > 0$ et $t > 0$.

4. Soit $0 < a < b$. Exhiber une domination de $x e^{-xt}$ valable pour $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$. Que retrouve-t-on sur $]0, +\infty[$?

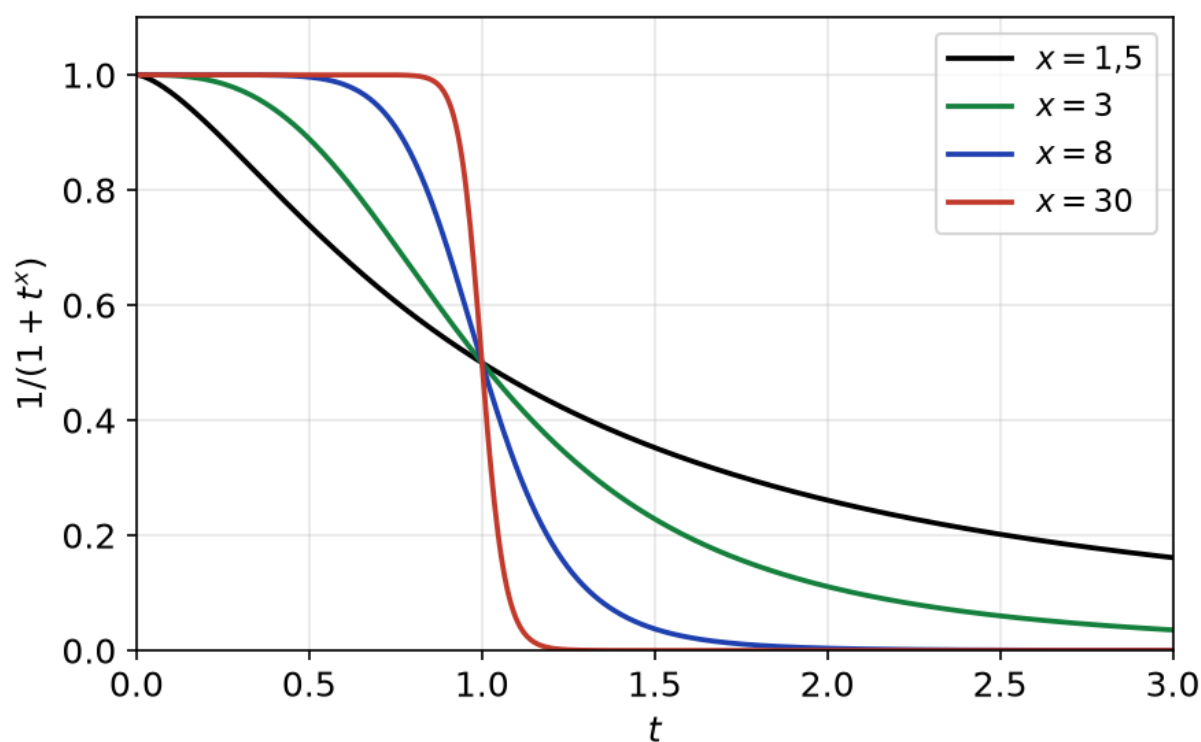
Exercice 3 : Continuité sur un intervalle non borné

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie, continue, paire et bornée sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, calculer $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos(xt)}{1+t^2} \right)$. La fonction $t \rightarrow \frac{t}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?
3. On admet que $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$. Montrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert J contenant 0 sur lequel on puisse appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Exercice 4 : Domination sur des intervalles adaptés

On pose, lorsque cela a un sens, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$. La figure ci-dessous représente l'intégrande pour plusieurs valeurs de x .



1. Montrer que $F(x)$ est défini si et seulement si $x > 1$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que F est continue sur $[a, +\infty[$. En déduire que F est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
4. Montrer que $F(x) \geq \frac{1}{2(x-1)}$ pour $x > 1$, et en déduire la limite de F en 1^+ .

Exercice 5 : Dérivation et fonction arctangente

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'(x)$ par une intégrale.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$ et en déduire une expression simple de $F(x)$.

Exercice 6 : Intégrale de Frullani par dérivation

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

3. En déduire $F(x)$ pour tout $x > 0$, puis la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t} dt$.

Exercice 7 : Une intégrale logarithmique

Pour $x > -1$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

1. Montrer que, pour $t \in]0, 1[$, $\left| \frac{t^x - 1}{\ln t} \right| \leq |x| \max(1, t^x)$. En déduire que F est définie sur $]-1, +\infty[$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

3. En déduire $F(x)$, puis la valeur de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 8 : Une intégrale trigonométrique

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt$.

1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, calculer $F'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$. Vérifier que la formule obtenue vaut encore en $x = 1$.
3. En déduire $F(x)$ pour $x > 0$.

4. Montrer que F est définie et continue sur $[0, 1]$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

Exercice 9 : Arctangente sous le signe intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'(x)$ par une intégrale.
3. Pour $x \geq 0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} dt$.

Exercice 10 : Intégrale de Gauss par une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2$.

1. Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $F' + G' = 0$.
2. En déduire que $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x .

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$, puis la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 11 : Transformée de Fourier d'une gaussienne

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. On utilise le résultat $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.

3. En déduire $F(x)$ pour tout réel x , puis la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt$.

Exercice 12 : Une équation différentielle du second ordre

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et donner $F(0)$.
2. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.
3. Montrer que $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation et la convexité de F sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13 : Transformée de Laplace

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, et $M = \sup |f|$. Pour $x > 0$, on pose

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

1. Montrer que $\mathcal{L}f$ est définie sur $]0, +\infty[$ et que $|\mathcal{L}f(x)| \leq \frac{M}{x}$.
2. Montrer que $\mathcal{L}f$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et donner $(\mathcal{L}f)^{(k)}(x)$.
3. Montrer que $x \mathcal{L}f(x) \rightarrow f(0)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Calculer $\mathcal{L}f$ pour $f = \cos$, $f = \sin$ et $f(t) = e^{-t}$, puis vérifier le résultat de la question 3 sur ces exemples.

Exercice 14 : Fonction Gamma, définition et relation fonctionnelle

Pour $x \in \mathbb{R}$, on étudie $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Établir la relation $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour $x > 0$, puis calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En admettant $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis montrer que $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 : Régularité et variations de la fonction Gamma

On reprend la fonction Γ de l'exercice précédent.

1. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$ par une intégrale.
2. En déduire que Γ est strictement convexe.
3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$, puis que $\ln \Gamma$ est convexe.
4. Montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.
5. Montrer que Γ' s'annule en un unique point x_0 , situé dans $]1, 2[$. En déduire le tableau de variations de Γ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 16 : Transformée de Fourier et dérivation

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable. On pose $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $t \rightarrow t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$.
Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^p et exprimer $\widehat{f}^{(p)}$.
3. Calculer $\widehat{f}$ pour $f(t) = e^{-|t|}$.
4. En déduire, sans nouveau calcul d'intégrale, la valeur de $\int_0^{+\infty} t e^{-t} \sin(xt) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

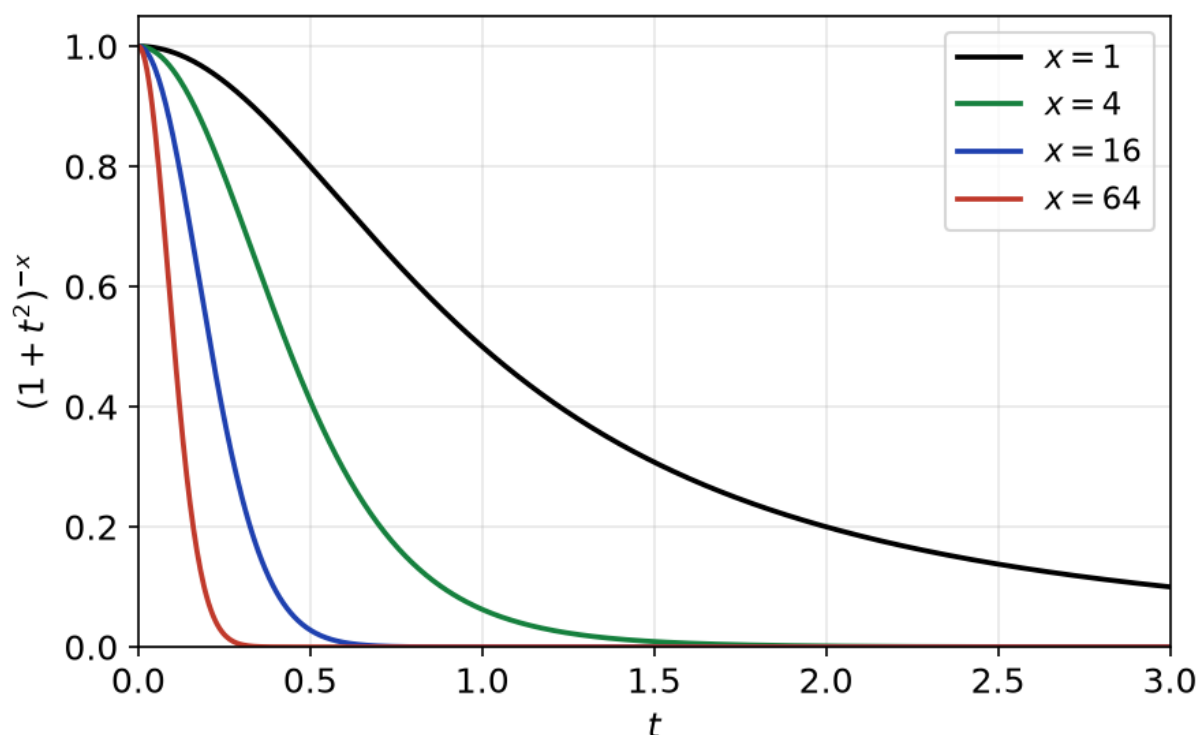
Exercice 17 : Équivalents aux bornes

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est définie, continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $F(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t} dt \leq 1$ et que $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq 1$.
4. En déduire que $F(x) \sim -\ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 18 : Équivalent par changement d'échelle

Pour $x > \frac{1}{2}$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x}$. La figure ci-dessous montre que l'intégrande se concentre près de 0 quand x grandit.



1. Justifier que I est définie et décroissante sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(x+1) = \frac{2x-1}{2x} I(x)$. Calculer $I(1)$, $I(2)$ et $I(3)$.
3. Montrer que $(1+s)^x \geq 1 + xs$ pour $s \geq 0$ et $x \geq 1$.
4. À l'aide du changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$, montrer que $I(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On admet $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note $\varphi(s) = \ln(1+s) - s$ pour $s > -1$. On admet $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{2\pi}$. Le but est de prouver que $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

1. Pour $x > 0$, montrer, par deux changements de variable, que

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1/2} e^{-x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \exp\left(x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right)\right) dv.$$

2. Montrer que, pour tout réel v fixé, $x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) \rightarrow -\frac{v^2}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $\varphi(s) \leq -\frac{s^2}{2}$ pour $s \in]-1,0]$ et que $\varphi(s) \leq -\frac{s^2}{4}$ pour $s \in [0,1]$.
4. Montrer que φ est concave et en déduire que $\varphi(s) \leq (\ln 2 - 1)s$ pour $s \geq 1$.
5. Pour $x \geq 1$, construire une fonction h intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante de x , qui domine l'intégrande de la question 1 prolongé par 0 sur $] -\infty, -\sqrt{x}]$.
6. Conclure. En déduire un équivalent de $n!$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [intégrales à paramètre, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Convergence dominée et intégration terme à terme](#)
- Chapitre précédent : [Convergence dominée et intégration terme à terme](#)
- Chapitre suivant : [Ensembles dénombrables et espaces probabilisés](#)
- Le même thème en L2 : [intégrales à paramètre, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)