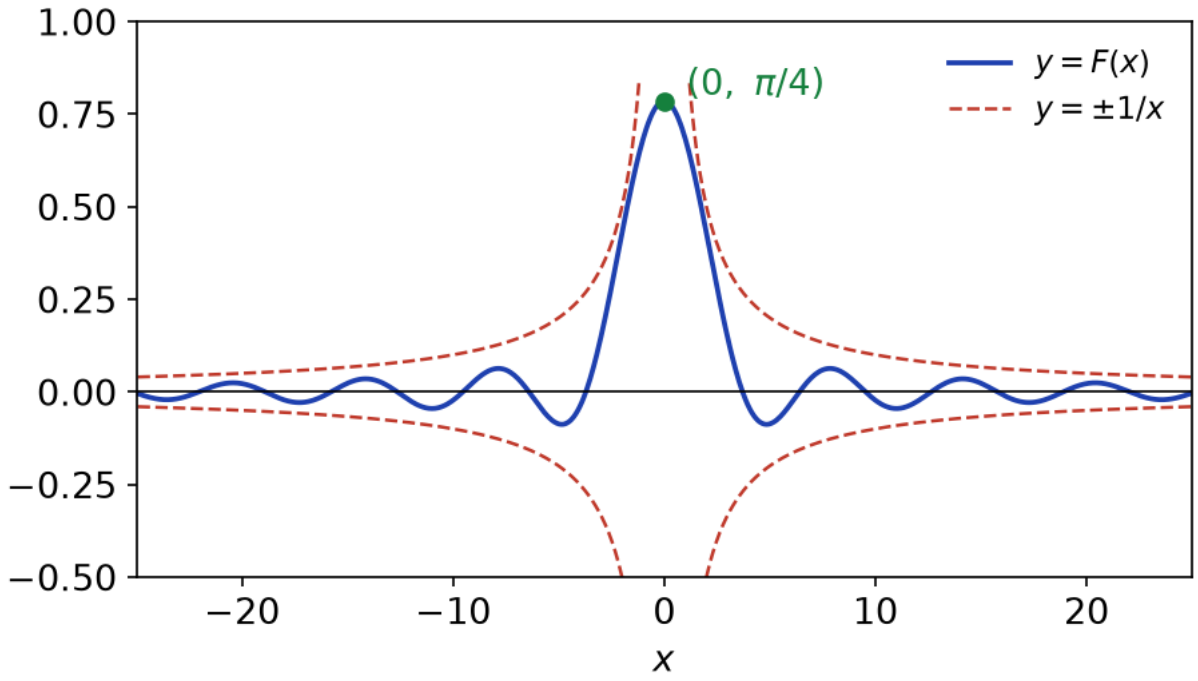
Intégrales à paramètre

Exercice 1 : Continuité d'une intégrale sur un segment

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$. La figure ci-dessous donne l'allure de F.



1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est paire.
2. Calculer $F(0)$ et montrer que $|F(x)| \leq \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ pour $x \neq 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Exercice 2 : Dérivées successives d'une intégrale sur un segment

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F^{(n)}(x)$ sous forme d'intégrale.
2. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $F(x)$ explicitement pour $x \neq 0$. Vérifier que la dérivée de cette expression coïncide avec la formule de la question 1 pour $n = 1$.
4. Comparer les nombres $\frac{F^{(n)}(0)}{n!}$ avec les coefficients du développement de $\frac{e^x - 1}{x}$ en série entière.

Exercice 3 : Une intégrale calculée par dérivation

Pour $x > -1$ et $t \in]0,1[$, on pose $f(x,t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$, puis $F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt$.

1. On admet l'inégalité $|e^u - 1| \leq |u|\, e^{\max(u,0)}$ pour tout réel u. En posant $u = x \ln t$, montrer que $|f(x,t)| \leq |x|$ si $x \geq 0$ et $|f(x,t)| \leq |x|\, t^x$ si $-1 < x < 0$. En déduire que F est bien définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire $F(x)$ pour tout $x > -1$.

4. Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{t^2-t}{\ln t}\,dt$.

Exercice 4 : Une intégrale classique sur [0,1]

On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et donner $F'(x)$ sous forme d'intégrale.
2. Pour $x \in [0,1]$, déterminer des réels A, B, C, dépendant de x, tels que $\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{A}{1+xt} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$.
3. En déduire que $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi x}{4} - \ln(1+x)\right)$.
4. En intégrant sur $[0,1]$, montrer que $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

Exercice 5 : Une intégrale logarithmique sur un segment

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t\right)dt$.

1. Montrer que $\cos^2 t + x^2 \sin^2 t \geq \min(1, x^2)$. En déduire que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, calculer $F'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$. On pourra décomposer $\frac{u^2}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}$.
3. Montrer que $F'(x) = \frac{\pi}{1+x}$ pour tout $x > 0$, puis en déduire $F(x)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Vérifier le résultat en montrant directement que $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x) - \pi \ln x$.

Exercice 6 : Une équation de Bessel

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt$.

1. Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, paire, et que $|J(x)| \leq 1$. Calculer $J(0)$.
2. Exprimer $J'(x)$ et $J''(x)$ sous forme d'intégrales. Calculer $J'(0)$ et $J''(0)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $x\,J''(x) + J'(x) + x\,J(x) = 0$ pour tout réel x.

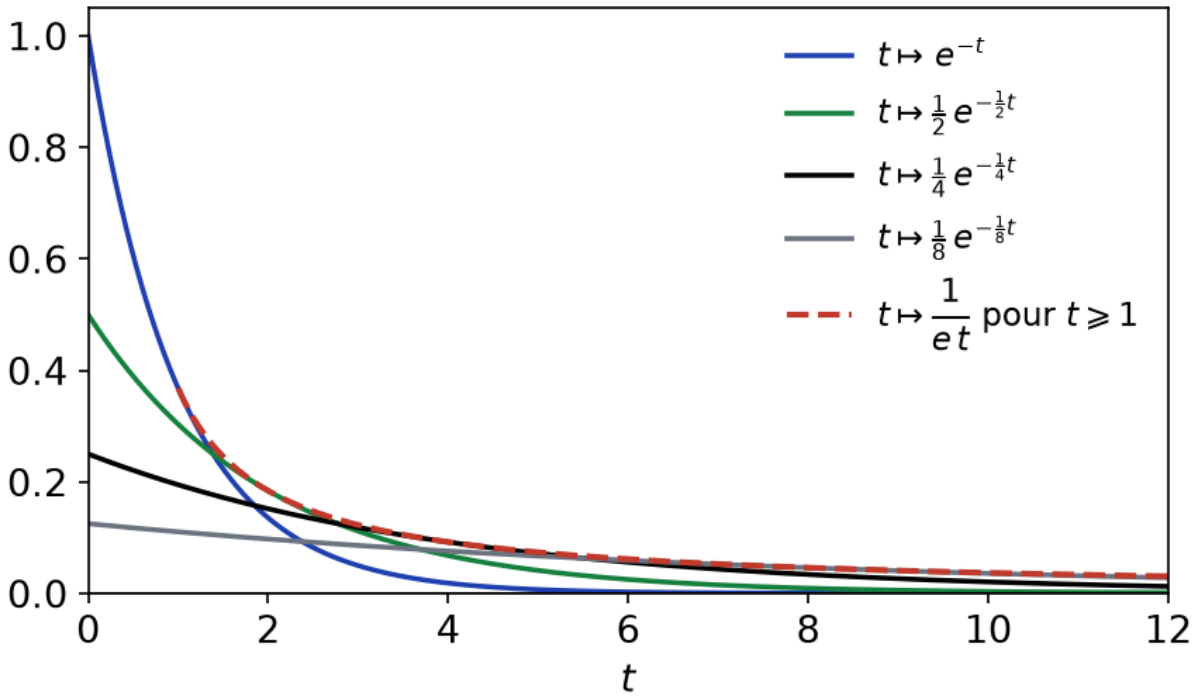
Exercice 7 : Vérifier une domination

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\, dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\, dt$.

1. Montrer que F et G sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, en précisant la fonction dominante.
2. Calculer $F(x) + i\,G(x)$ à l'aide de $\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\, dt$. En déduire $F(x)$ et $G(x)$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\sin(xt)\, dt$.

Exercice 8 : Quand la domination fait défaut

Pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on pose $f(x,t) = x\,e^{-xt}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$. La figure ci-dessous représente quelques fonctions $t \to f(x,t)$.

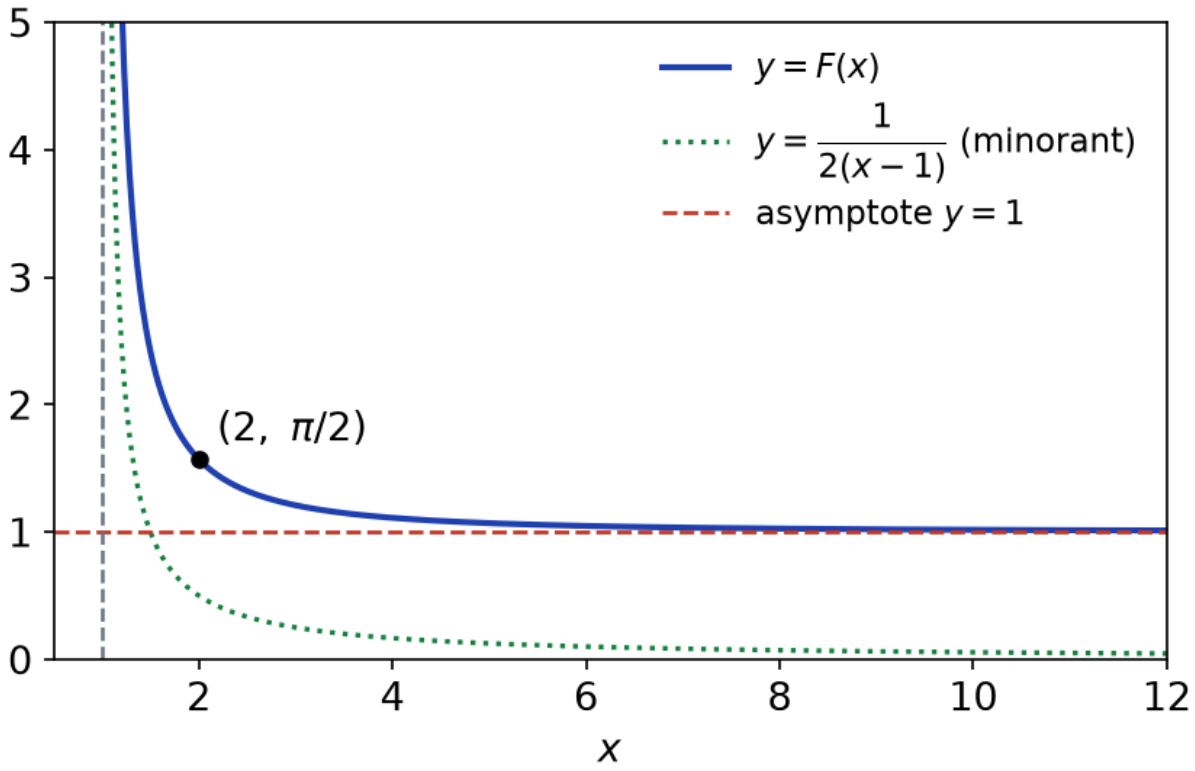


1. Calculer $F(x)$ pour tout $x \geq 0$. La fonction F est-elle continue sur $[0,+\infty[$?
2. Soit φ une fonction telle que $f(x,t) \leq \varphi(t)$ pour tout $x \in]0,1]$ et tout $t \geq 0$. Montrer que $\varphi(t) \geq \frac{1}{e\,t}$ pour $t \geq 1$. Conclure.
3. Soit $0 < a < b$. Donner une fonction dominante de f sur $[a,b] \times [0,+\infty[$. Que retrouve-t-on ?

Exercice 9 : Continuité sur un intervalle ouvert

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$. La figure ci-dessous donne l'allure de F.



1. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $F(x)$ est définie.
2. Montrer que F est continue sur $]1,+\infty[$ par domination locale.
3. Montrer que $|F(x) - 1| \leq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ pour $x > 1$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que $F(x) \geq \frac{1}{2(x-1)}$ pour $x > 1$. En déduire la limite de F en 1^+.
5. Calculer $F(2)$.

Exercice 10 : Une équation différentielle du second ordre

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Calculer $F(0)$.
2. Montrer que $0 < F(x) \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et qu'elle y est strictement décroissante.
4. Montrer que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Exercice 11 : Domaine et relation fonctionnelle de Gamma

On étudie $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

1. Montrer que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $0 < \alpha < \beta$. Trouver une fonction φ intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que $t^{x-1}e^{-t} \leq \varphi(t)$ pour $x \in [\alpha,\beta]$. En déduire que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 12 : Gamma aux demi-entiers

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir l'exercice 15).

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. À l'aide du changement de variable $t = u^2$, montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
2. Calculer $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.
3. Montrer par récurrence que $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 : Calculs d'intégrales avec la fonction Gamma

Exprimer chacune des intégrales suivantes à l'aide de la fonction Γ, puis en donner la valeur exacte lorsque c'est possible.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^5\, e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\, e^{-2t}\, dt$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^4\, e^{-t^2}\, dt$, avec le changement de variable $u = t^2$.
3. $\displaystyle\int_0^{1} (\ln t)^n\, dt$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec le changement de variable $t = e^{-u}$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^3}\, dt$, que l'on exprimera à l'aide de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 14 : Régularité et convexité de Gamma

On reprend la fonction Γ de l'exercice 11.

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer Γ' et Γ'' sous forme d'intégrales. En déduire que Γ est strictement convexe.

2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\,\Gamma''(x)$. En déduire que $\ln \Gamma$ est convexe.

3. Montrer que Γ' s'annule en un unique point x_0, qui appartient à $]1,2[$. Dresser le tableau de variations de Γ.

4. Déterminer les limites de Γ en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 15 : L'intégrale de Gauss par une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du\right)^2$.

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

2. Montrer que $F+G$ est constante et donner sa valeur.

3. Montrer que $0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$.

4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 16 : Transformée de Fourier de la gaussienne

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.
3. En déduire $F(x)$ pour tout réel x.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2t)\,dt$.

Exercice 17 : Premières transformées de Laplace

Pour f continue sur $]0,+\infty[$, on note $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$, lorsque cette intégrale converge. Pour chaque fonction, préciser les réels p pour lesquels $\mathcal{L}(f)(p)$ existe, puis la calculer.

1. $f(t) = 1$ et $f(t) = t^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(t) = e^{at}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $f(t) = \cos(\omega t)$ et $f(t) = \sin(\omega t)$, avec $\omega > 0$.
4. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Exercice 18 : Dérivation d'une transformée de Laplace

Soit f continue et bornée sur $[0,+\infty[$, et $M = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $]0,+\infty[$ et que $|\mathcal{L}(f)(p)| \leq \frac{M}{p}$.
2. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, avec

$$\mathcal{L}(f)'(p) = -\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, e^{-pt}\, dt\ .$$

3. En déduire $\mathcal{L}(t \sin t)(p)$ et $\mathcal{L}(t \cos t)(p)$ pour $p > 0$.

4. On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$ avec f' bornée. Montrer que $\mathcal{L}(f')(p) = p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$. Vérifier cette formule avec $f = \sin$.

Exercice 19 : Problème : l'intégrale de Dirichlet

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$. On veut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour $x > 0$ et que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$.

2. Soit $x \geq 0$ et $0 < A < B$. En intégrant par parties, montrer que $\left| \int_A^B e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leq \frac{2}{A}$. En déduire que $F(0)$ est bien définie, et que le reste $R_A(x) = \int_A^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$ vérifie $|R_A(x)| \leq \frac{2}{A}$ pour tout $x \geq 0$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

4. En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ pour tout $x > 0$.

5. Montrer que F est continue en 0, puis conclure.

Exercice 20 : Problème : une intégrale gaussienne à paramètre

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Donner $F(0)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $t \to \frac{1}{t^2} e^{-a^2/t^2}$ est bornée sur $]0,+\infty[$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. À l'aide du changement de variable $u = \frac{x}{t}$, montrer que $F'(x) = -2F(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.
5. Application : calculer $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2\right) dt$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : intégrales à paramètre, cours de maths en L2
- À maîtriser avant : Intégrales généralisées, Suites et séries de fonctions
- Chapitre précédent : Séries entières

- Chapitre suivant : Produit scalaire et espaces euclidiens
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L2 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L2 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.