

Intégrales à paramètre

Corrigé de l'exercice 1 : Continuité sur un segment d'intégration

1. On pose $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. Soit $A > 0$. Pour $|x| \leq A$ et $t \in [0,1]$, on a $|f(x,t)| \leq e^A$, constante intégrable sur le segment $[0,1]$. Par le théorème de continuité, F est continue sur $[-A,A]$ pour tout A . Donc **F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.**

2. La dérivée partielle vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t e^{-xt}}{1+t}$. Elle est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. De plus, pour $|x| \leq A$, elle est majorée en valeur absolue par e^A . Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique donc sur tout segment. Ainsi F est de classe C^1 et

$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{t e^{-xt}}{1+t} dt.$$
 L'intégrande est continu, positif et non identiquement nul. Par conséquent, $F'(x) < 0$ et **F est strictement décroissante.**

3. D'abord, $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$. Ensuite,

$$F(x) - F'(x) = \int_0^1 \frac{(1+t) e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^1 e^{-xt} dt = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

On obtient donc $F(0) = \ln 2$ et $F(x) - F'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ pour $x \neq 0$.

4. Pour $x > 0$, on a $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}$. En intégrant, $0 \leq F(x) \leq \frac{1 - e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x}$. Par encadrement, $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Point de méthode : sur un segment d'intégration avec f continue sur $J \times [a,b]$, la domination sur

$[-A, A] \times [a, b]$ est automatique par le maximum d'une fonction continue sur un compact.

Corrigé de l'exercice 2 : Nécessité de l'hypothèse de domination

1. Pour $x = 0$, l'intégrande est nul et $F(0) = 0$. Pour $x > 0$,
$$\int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt = [-e^{-xt}]_0^{+\infty} = 1.$$
 Ainsi $F(0) = 0$ et $F(x) = 1$ pour $x > 0$:
 F n'est pas continue en 0 .
2. Soit $t > 0$ et $g(x) = x e^{-xt}$. On a $g'(x) = (1 - xt) e^{-xt}$, positive sur $]0, \frac{1}{t}]$ et négative ensuite. Le maximum est atteint en $x = \frac{1}{t}$. Donc $\sup_{x > 0} x e^{-xt} = \frac{1}{e t}$.
3. Supposons qu'une telle φ existe. En prenant $x = \frac{1}{t}$, on obtient $\varphi(t) \geq \frac{1}{e t}$ pour tout $t > 0$. Or $t \rightarrow \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Par comparaison de fonctions positives, φ ne serait pas intégrable : contradiction. **Aucune domination n'existe sur $]0, +\infty[$.**
4. Pour $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$, on a $x \leq b$ et $e^{-xt} \leq e^{-at}$. Donc
 $0 \leq x e^{-xt} \leq b e^{-at}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème donne la continuité de F sur tout $[a, b]$, donc sur $]0, +\infty[$. On retrouve le fait que F , constante égale à 1 , y est continue.

Point de méthode : la figure du cours montre le mécanisme. Quand x grandit, l'aire 1 se concentre près de $t = 0$; en $x = 0$, elle disparaît.

Corrigé de l'exercice 3 : Continuité sur un intervalle non borné

1. La fonction $f(x, t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. De plus, $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$, intégrable sur $[0, +\infty[$, et ce majorant ne dépend pas de x . Par le théorème de continuité, F

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est paire car le cosinus l'est. Enfin, $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi **F est continue, paire, bornée par $\frac{\pi}{2}$, et $F(0) = \frac{\pi}{2}$.**

- On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$. Or $\frac{t}{1+t^2} \sim \frac{1}{t}$ en $+\infty$. Par comparaison, $t \rightarrow \frac{t}{1+t^2}$ **n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$** . La majoration naturelle ne fournit donc aucune domination.
- Supposons le théorème applicable sur un intervalle ouvert J contenant 0 . Alors F serait de classe C^1 sur J , donc dérivable en 0 . Or $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$ a pour dérivée à droite $-\frac{\pi}{2}$ et pour dérivée à gauche $\frac{\pi}{2}$ en 0 . Elle n'y est donc pas dérivable. **Les hypothèses du théorème de dérivation ne peuvent être satisfaites sur aucun voisinage de 0 .**

Corrigé de l'exercice 4 : Domination sur des intervalles adaptés

- La fonction $t \rightarrow \frac{1}{1+t^x}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Si $x > 0$, elle est équivalente à t^{-x} en $+\infty$, intégrable si et seulement si $x > 1$. Si $x = 0$, elle vaut $\frac{1}{2}$. Si $x < 0$, elle tend vers 1 en $+\infty$. Dans ces deux derniers cas, elle n'est pas intégrable. Donc **$F(x)$ est défini si et seulement si $x > 1$.**
- Soit $a > 1$ et $x \geq a$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq 1$. Pour $t \geq 1$, on a $t^x \geq t^a$, donc $\frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^a}$. La fonction φ égale à 1 sur $[0, 1]$ et à t^{-a} sur $]1, +\infty[$ est intégrable, car $a > 1$. L'intégrande est continu en (x, t) . Ainsi **F est continue sur $[a, +\infty[$** . Tout point de $]1, +\infty[$ appartient à un tel intervalle. Donc **F est continue sur $]1, +\infty[$.**

Questions 3 et 4

- Pour $t \in [0, 1[$, $t^x \rightarrow 0$, donc l'intégrande tend vers 1 . Pour $t = 1$, il vaut $\frac{1}{2}$. Pour $t > 1$, il tend vers 0 . La limite simple vaut donc 1 sur $[0, 1[$ et 0 sur $]1, +\infty[$, sauf en un point. La domination de la question 2 avec $a = 2$ vaut pour $x \geq 2$. Par convergence dominée (appliquée à toute suite $x_n \rightarrow +\infty$), **$F(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$** . La figure de l'énoncé illustre cette convergence vers une marche.

4. Pour $t \geq 1$, on a $t^x \geq 1$, donc $1 + t^x \leq 2t^x$. Par positivité,

$$F(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x} \geq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} t^{-x} dt = \frac{1}{2(x-1)}.$$

Par minoration, $F(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^+$.

Corrigé de l'exercice 5 : Dérivation et fonction arctangente

1. Posons $f(x,t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ pour $t > 0$. Elle est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. L'inégalité $|\sin u| \leq |u|$ donne $|f(x,t)| \leq |x| e^{-t}$, intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $t > 0$ fixé, $x \rightarrow f(x,t)$ est de classe C^1 et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t} \cos(xt)$. Cette dérivée est continue et vérifie $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq e^{-t}$, majorant intégrable indépendant de x . Le théorème de dérivation sous le signe intégrale donne : F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

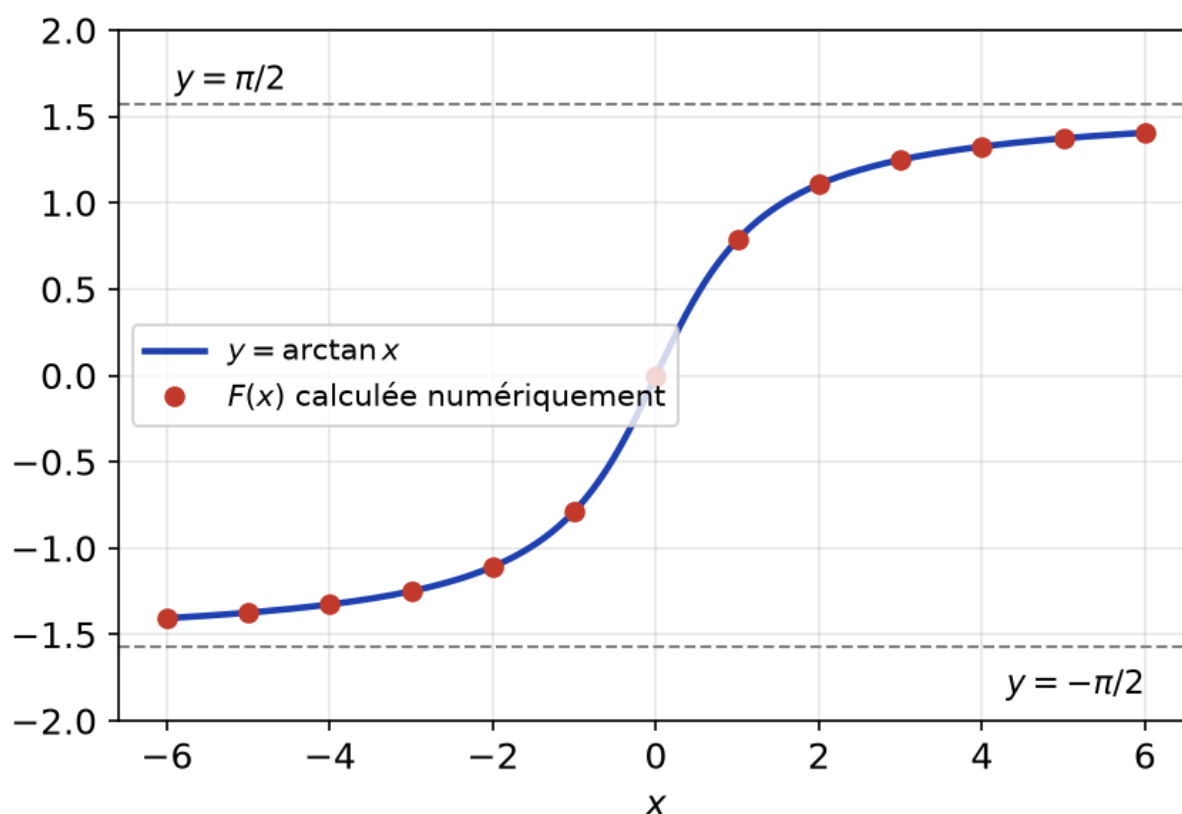
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt.$$

3. On passe par l'exponentielle complexe : $\cos(xt) = \operatorname{Re}(e^{ixt})$. Comme $|e^{(-1+ix)t}| = e^{-t}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt = \left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}.$$

En prenant la partie réelle, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. De plus, $F(0) = 0$. Par conséquent, $F(x) = \arctan x$ pour tout réel x .

La figure ci-dessous confirme le résultat : les valeurs de F calculées numériquement se placent exactement sur la courbe de l'arctangente.



Corrigé de l'exercice 6 : Intégrale de Frullani par dérivation

- Soit $x > 0$ et $g(t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$, continue sur $]0, +\infty[$. En 0 , un développement limité donne $e^{-t} - e^{-xt} = (x-1)t + o(t)$. Ainsi $g(t) \rightarrow x-1$: g se prolonge par continuité en 0 . Pour $t \geq 1$, $|g(t)| \leq e^{-t} + e^{-xt}$, intégrable. Donc **F est définie sur $]0, +\infty[$.**
- On a $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \right) = e^{-xt}$, continue. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$, $0 < e^{-xt} \leq e^{-at}$, intégrable sur $]0, +\infty[$. Par dérivation sous le signe intégrale sur chaque $[a, +\infty[$, **F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.**
- Comme $F(1) = 0$, on obtient $F(x) = \ln x$. Enfin, $e^{-2t} - e^{-3t} = (e^{-t} - e^{-3t}) - (e^{-t} - e^{-2t})$. Par linéarité des intégrales convergentes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t} dt = F(3) - F(2) = \ln \frac{3}{2}.$$

Le résultat est donc $\ln \frac{3}{2}$.

Point de méthode : on ne sépare jamais $\int \frac{e^{-t}}{t} - \int \frac{e^{-xt}}{t}$, car chaque intégrale diverge en 0 .

Corrigé de l'exercice 7 : Une intégrale logarithmique

- Soit $t \in]0,1[$. On écrit $t^x - 1 = e^{x \ln t} - e^0$. L'égalité des accroissements finis pour l'exponentielle fournit c entre 0 et $x \ln t$ tel que $t^x - 1 = x \ln t e^c$. Or $e^c \leq \max(1, e^{x \ln t}) = \max(1, t^x)$. Ainsi $\left| \frac{t^x - 1}{\ln t} \right| \leq |x| \max(1, t^x) \leq |x|(1 + t^x)$. Comme $x > -1$, $t \rightarrow t^x$ est intégrable sur $]0,1[$. L'intégrande est continu sur $]0,1[$. Donc **F est définie sur $] -1, +\infty[$** .
- Pour $t \in]0,1[$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t^x - 1}{\ln t} \right) = \frac{t^x \ln t}{\ln t} = t^x$. Soit $[a, b] \subset] -1, +\infty[$. Pour $x \in [a, b]$ et $t \in]0,1[$, on a $0 < t^x \leq t^a$, car $t < 1$. Or t^a est intégrable sur $]0,1[$ puisque $a > -1$. Donc **F est C^1 et $F'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$** .
- Comme $F(0) = 0$, on obtient $F(x) = \ln(1+x)$ pour $x > -1$. Avec $x = 1$, $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 8 : Une intégrale trigonométrique

1. Pour $x > 0$, on a $\cos^2 t + x^2 \sin^2 t \geq \min(1, x^2)(\cos^2 t + \sin^2 t) = \min(1, x^2) > 0$.
 Ainsi $f(x, t) = \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)$ est continue sur $]0, +\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}]$, et F est définie.
 Ensuite, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x \sin^2 t}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}$. Si $\sin t \neq 0$, cette quantité est au plus $\frac{2x \sin^2 t}{x^2 \sin^2 t} = \frac{2}{x}$; elle est nulle sinon. Pour $x \geq a > 0$, elle est donc majorée par $\frac{2}{a}$,
 intégrable sur le segment. Par conséquent, F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

2. Pour $x > 0$, on divise par $\cos^2 t$ puis on pose $u = \tan t$, avec $dt = \frac{du}{1+u^2}$:

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x \tan^2 t}{1 + x^2 \tan^2 t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2x u^2}{(1+x^2 u^2)(1+u^2)} du.$$

Pour $x \neq 1$, on vérifie que $\frac{u^2}{(1+x^2 u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2 u^2} \right)$. Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+x^2 u^2} = \frac{\pi}{2x}. \text{ Donc}$$

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{\pi}{x+1}.$$

En $x = 1$, $F'(1) = \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$, ce qui coïncide. Ainsi $F'(x) = \frac{\pi}{x+1}$ pour tout $x > 0$.

Questions 3 et 4

3. Comme $F(1) = \int_0^{\pi/2} \ln 1 dt = 0$, on obtient $F(x) = \pi \ln \frac{1+x}{2}$ pour $x > 0$.

4. On travaille sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $x \in [0, 1]$ et $t \in I$, on a
 $\cos^2 t \leq \cos^2 t + x^2 \sin^2 t \leq 1$. Donc $|f(x, t)| \leq -\ln(\cos^2 t) = -2 \ln \cos t$. Or
 $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t) \sim \frac{\pi}{2} - t$, donc $\ln \cos t \sim \ln(\frac{\pi}{2} - t)$, intégrable au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.
 Le théorème de continuité s'applique : F est continue sur $[0, 1]$. En faisant tendre x vers 0,

$$F(0) = \pi \ln \frac{1}{2}. \text{ Or } F(0) = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt. \text{ Finalement, } \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Point de méthode : la domination change selon l'intervalle étudié. Sur $[a, +\infty[$, on domine la dérivée ; sur $[0, 1]$, on domine la fonction elle-même par sa valeur en $x = 0$.

Corrigé de l'exercice 9 : Arctangente sous le signe intégrale

1. Posons $f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$, continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Comme $|\arctan u| \leq |u|$, on a $|f(x, t)| \leq \frac{|x|}{1+t^2}$, intégrable. Donc F est définie. De plus, l'arctangente est impaire, donc F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

2. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{1+x^2t^2} \cdot \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$. Cette dérivée est continue et majorée par $\frac{1}{1+t^2}$, intégrable et indépendante de x . Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

3. Pour $x \geq 0$ et $x \neq 1$, on décompose : $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dt}{1+x^2t^2} = \frac{\pi x}{2}$ pour $x \geq 0$. D'où $F'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2(x+1)}$. Par continuité de F' , la formule vaut aussi en $x = 1$. Comme $F(0) = 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$, et $F(x) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-x)$ pour $x \leq 0$ par imparité.

4. Avec $x = 1$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 10 : Intégrale de Gauss par une intégrale à paramètre

1. La fonction $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$. Pour $|x| \leq A$, cette dérivée est majorée par $2A$,

intégrable sur $[0,1]$. Donc F est C^1 et $F'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$. Le

changement de variable $u = xt$ donne $x \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} du$, y compris pour

$x \leq 0$. Ainsi $F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$. Par ailleurs, G est C^1 comme carré

d'une primitive, et $G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$. Donc $F' + G' = 0$.

2. La fonction $F + G$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $G(0) = 0$ et

$$F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}. \text{ Donc } F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4} \text{ pour tout } x.$$

3. Pour tout $t \in [0,1]$, $e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}$. Donc $0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$, et $F(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$. Par conséquent, $G(x) \rightarrow \frac{\pi}{4}$. L'intégrale $\int_0^x e^{-u^2} du$ est positive pour $x \geq 0$:

elle tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Transformée de Fourier d'une gaussienne

1. On pose $f(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$. On a $|f(x,t)| \leq e^{-t^2}$, intégrable sur $[0, +\infty[$, donc F est définie. Ensuite, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$, continue et majorée par $t e^{-t^2}$. Ce majorant est intégrable, car $t e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Donc F est C^1 et

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

2. On intègre par parties avec $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = \frac{1}{2} e^{-t^2}$, de sorte que $v'(t) = -t e^{-t^2}$. Le produit $u(t)v(t)$ est nul en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. L'intégration par parties généralisée est donc licite :

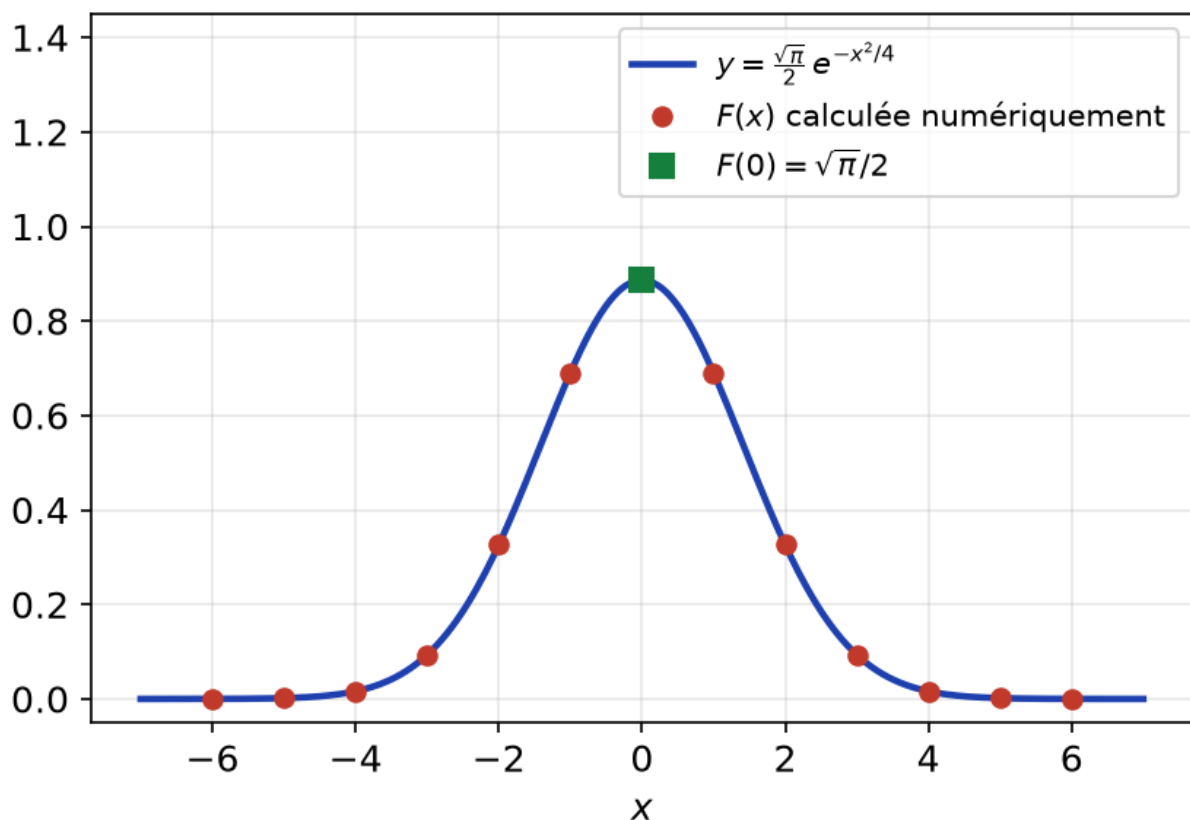
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} u v' = - \int_0^{+\infty} x \cos(xt) \frac{e^{-t^2}}{2} dt = -\frac{x}{2} F(x).$$

On a bien établi $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$.

3. Les solutions de $y' = -\frac{x}{2}y$ sont les $x \rightarrow C e^{-x^2/4}$. Comme $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$. Enfin, $e^{-t^2} \sin(xt)$ est impaire en t et $e^{-t^2} \cos(xt)$ est paire.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt = 2F(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$.

Comme le montre la figure ci-dessous, les valeurs numériques de F suivent exactement la gaussienne $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.



Corrigé de l'exercice 12 : Une équation différentielle du second ordre

1. La fonction $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[^2$ et vérifie $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$, intégrable. Donc F est continue sur $[0, +\infty[$ et $F(0) = \frac{\pi}{2}$.
2. Pour $k \in \{1, 2\}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \frac{(-t)^k e^{-xt}}{1+t^2}$, continue. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$, cette dérivée est majorée par $t^k e^{-at}$, intégrable. Les fonctions $f(x, \cdot)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ sont intégrables pour $x > 0$. Par le théorème de classe C^k , F est C^2 sur $]0, +\infty[$. Ensuite,

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On a donc $F'' + F = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

3. Pour $x > 0$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$. En intégrant, $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$, donc $F(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

4. D'une part, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t^2} dt < 0$. D'autre part, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt > 0$. Ces intégrandes sont continus, positifs et non nuls. Donc F est strictement décroissante et strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 13 : Transformée de Laplace

1. Pour $x > 0$, $|f(t)e^{-xt}| \leq M e^{-xt}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $\mathcal{L}f(x)$ existe, et
- $$|\mathcal{L}f(x)| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x}.$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(t)e^{-xt}) = (-t)^k f(t) e^{-xt}$, continue en (x,t) . Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$, elle est majorée par $M t^k e^{-at}$, intégrable. Toutes les dérivées sont donc intégrables et dominées sur $[a, +\infty[$. Ainsi $\mathcal{L}f$ est C^∞ et

$$(\mathcal{L}f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-xt} dt.$$

3. Le changement de variable $u = xt$, bijectif et C^1 , donne $x \mathcal{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$

. Soit $x_n \rightarrow +\infty$. Pour tout u , $f\left(\frac{u}{x_n}\right) \rightarrow f(0)$ par continuité de f en 0 . De plus, l'intégrande est majoré par $M e^{-u}$, intégrable. Par convergence dominée,

$$x \mathcal{L}f(x) \rightarrow f(0) \int_0^{+\infty} e^{-u} du = f(0).$$

4. Comme dans le cours, $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt = \frac{x+i}{x^2+1}$. Donc $\mathcal{L}(\cos)(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et

$$\mathcal{L}(\sin)(x) = \frac{1}{1+x^2}. \text{ Ensuite, } \mathcal{L}f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+1)t} dt = \frac{1}{x+1} \text{ pour } f(t) = e^{-t}.$$

Vérifions : $\frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 1 = \cos 0$, $\frac{x}{1+x^2} \rightarrow 0 = \sin 0$ et $\frac{x}{x+1} \rightarrow 1 = e^0$.

Corrigé de l'exercice 14 : Fonction Gamma, définition et relation fonctionnelle

1. L'intégrande $g(t) = t^{x-1}e^{-t}$ est continu et positif sur $]0, +\infty[$. En 0 , $g(t) \sim t^{x-1}$, intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$. En $+\infty$, $t^2 g(t) = t^{x+1}e^{-t} \rightarrow 0$, donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable. Ainsi $\Gamma(x)$ **converge si et seulement si** $x > 0$.

2. Soit $0 < a < b$ et $x \in [a, b]$. Si $t \in]0, 1]$, $t^{x-1} \leq t^{a-1}$. Si $t \geq 1$, $t^{x-1} \leq t^{b-1}$. Donc $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$, intégrable d'après la question 1. L'intégrande est continu en x . Donc Γ **est continue sur tout** $[a, b]$, **donc sur** $]0, +\infty[$.

3. Soit $x > 0$ et $0 < \varepsilon < A$. Par parties,

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - A^x e^{-A} + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt. \text{ Les deux termes de bord}$$

tendent vers 0 , car $x > 0$. D'où $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, une récurrence donne $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Le changement de variable $t = u^2$, avec $dt = 2u du$, donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \text{ Donc } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \text{ Ensuite, la relation fonctionnelle}$$

appliquée n fois donne

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Or } 1 \cdot 3 \dots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \dots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \text{ Finalement, } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Corrigé de l'exercice 15 : Régularité et variations de la fonction Gamma

1. On a $\frac{\partial^k}{\partial x^k}(t^{x-1}e^{-t}) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$, continue. Sur $[a, b] \subset]0, +\infty[$, elle est majorée par $|\ln t|^k (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$. Ce majorant est intégrable : en 0, il est $o(t^{\frac{a}{2}-1})$; en $+\infty$, il est $o(\frac{1}{t^2})$. Toutes les dérivées sont donc dominées sur tout segment. Ainsi Γ est

$$C^\infty \text{ et } \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. L'intégrande de $\Gamma''(x)$ est continu, positif et non identiquement nul. Donc $\Gamma''(x) > 0$ et Γ est strictement convexe.

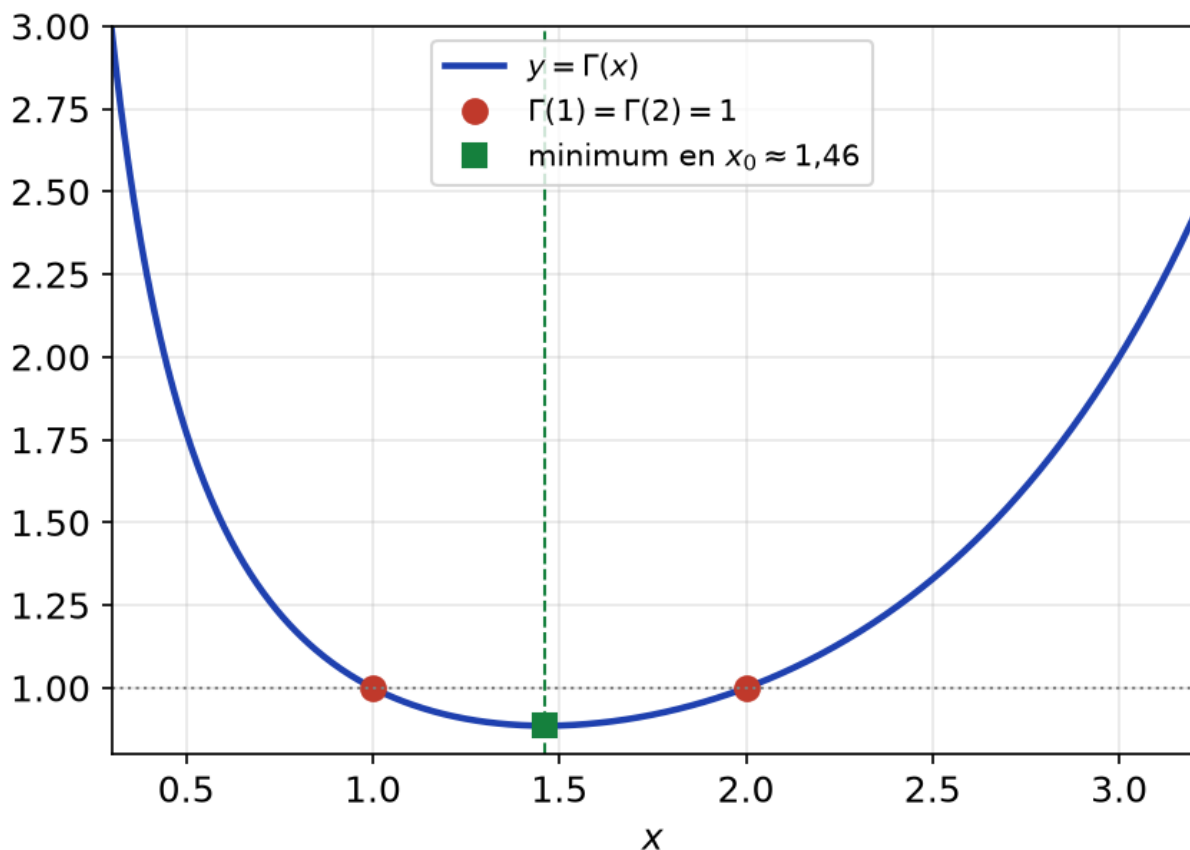
Questions 3 à 5

3. On pose $u(t) = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}$ et $v(t) = \ln t \cdot t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}$. Leurs carrés sont intégrables, d'intégrales $\Gamma(x)$ et $\Gamma''(x)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int uv\right)^2 \leq \int u^2 \int v^2, \text{ soit } \Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x). \text{ Comme } \Gamma > 0, \\ (\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma \Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0. \text{ Donc } \ln \Gamma \text{ est convexe.}$$

4. Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Par continuité de Γ en 1, $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$. Donc $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.
5. La fonction Γ' est strictement croissante, car $\Gamma'' > 0$. Ensuite, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Le théorème de Rolle fournit $x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Ce point est unique par stricte monotonie de Γ' . Donc Γ décroît strictement sur $]0, x_0]$ et croît strictement sur $[x_0, +\infty[$. Enfin, pour $x \geq n+1 \geq 2$, $\Gamma(x) \geq \Gamma(n+1) = n!$. Ainsi Γ **admet un unique minimum en** $x_0 \in]1,2[$, **avec** $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ **en** 0^+ **et en** $+\infty$.

La figure ci-dessous montre ce minimum, situé entre les deux points $(1,1)$ et $(2,1)$: numériquement, $x_0 \approx 1,46$ et $\Gamma(x_0) \approx 0,886$.



Corrigé de l'exercice 16 : Transformée de Fourier et dérivation

1. La fonction $(x, t) \rightarrow f(t)e^{-ixt}$ est continue et vérifie $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$, intégrable et indépendante de x . Le théorème de continuité donne la continuité de $\widehat{f}$. De plus,

$$|\widehat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|, \text{ donc } \widehat{f} \text{ est bornée.}$$

2. Pour $j \leq p$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j}(f(t)e^{-ixt}) = (-it)^j f(t) e^{-ixt}$, de module $|t^j f(t)|$. Ces fonctions sont continues et intégrables par hypothèse, avec une domination indépendante de x .

Le théorème de classe C^k donne $\widehat{f} \in C^p$ et $\widehat{f}^{(p)}(x) = (-i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p f(t) e^{-ixt} dt$.

3. Pour $f(t) = e^{-|t|}$, la partie en sinus est impaire et s'annule. Il reste

$$\widehat{f}(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt = \frac{2}{1+x^2}, \text{ par l'exercice 5. Donc } \widehat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

4. Ici $t e^{-|t|}$ est intégrable, donc $\widehat{f}'(x) = -i \int_{\mathbb{R}} t e^{-|t|} e^{-ixt} dt$. Par parité,

$t e^{-|t|} \cos(xt)$ est impaire et $t e^{-|t|} \sin(xt)$ est paire. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} t e^{-|t|} e^{-ixt} dt = -2i S(x), \text{ où } S(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \sin(xt) dt. \text{ D'où}$$

$$\widehat{f}'(x) = -i \cdot (-2i) S(x) = -2S(x). \text{ Or } \widehat{f}'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}. \text{ Donc}$$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} \sin(xt) dt = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Corrigé de l'exercice 17 : Équivalents aux bornes

1. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$ et $t \geq 0$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{a}$, intégrable. L'intégrande est continu en (x, t) . Donc F est définie et continue sur chaque $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$. Enfin, si $x \leq y$, alors $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-t}}{y+t}$. Par croissance de l'intégrale, F est définie, continue et décroissante.

2. On écrit $x F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} e^{-t} dt$. Pour tout t , $\frac{x}{x+t} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$. De plus, $0 \leq \frac{x}{x+t} e^{-t} \leq e^{-t}$, intégrable. Par convergence dominée, $x F(x) \rightarrow 1$. Donc

$$F(x) \sim \frac{1}{x} \text{ en } +\infty.$$

3. Pour $t \in]0,1]$, on a $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$ par convexité de l'exponentielle. Donc

$$0 \leq \frac{1-e^{-t}}{x+t} \leq \frac{t}{x+t} = 1. \text{ En intégrant sur } [0,1], \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t} dt \leq 1. \text{ Ensuite, pour}$$

$$t \geq 1, \quad \frac{e^{-t}}{x+t} \leq e^{-t}, \text{ donc } 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq e^{-1} \leq 1.$$

4. On décompose $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t} - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. Le premier terme vaut

$\ln(1+x) - \ln x$. Les deux autres sont bornés par 1 d'après la question 3. Ainsi

$F(x) = -\ln x + O(1)$ quand $x \rightarrow 0^+$. Comme $-\ln x \rightarrow +\infty$, on conclut que $F(x) \sim -\ln x$ en 0^+ .

Corrigé de l'exercice 18 : Équivalent par changement d'échelle

1. L'intégrande est continu, positif, et équivalent à t^{-2x} en $+\infty$. Il est donc intégrable si et seulement si $2x > 1$. Si $x \leq y$, alors $(1+t^2)^{-y} \leq (1+t^2)^{-x}$, car $1+t^2 \geq 1$. Donc **I est définie et décroissante sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$.**

2. On écrit $I(x) - I(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{x+1}}$. On intègre par parties avec $u(t) = t$ et

$$v(t) = -\frac{1}{2x(1+t^2)^x}, \text{ de sorte que } v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{x+1}}. \text{ Le produit } uv \text{ est nul en } 0 \text{ et tend vers } 0 \text{ en } +\infty, \text{ car } 2x > 1. \text{ Donc } I(x) - I(x+1) = \frac{1}{2x} I(x), \text{ soit}$$

$$I(x+1) = \frac{2x-1}{2x} I(x). \text{ Ensuite, } I(1) = \frac{\pi}{2}, \text{ puis } I(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ et}$$

$$I(3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}.$$

3. Soit $x \geq 1$ et $g(s) = (1+s)^x - 1 - xs$ pour $s \geq 0$. On a

$$g'(s) = x((1+s)^{x-1} - 1) \geq 0, \text{ car } x-1 \geq 0. \text{ Comme } g(0) = 0, \text{ on obtient}$$

$$(1+s)^x \geq 1 + xs.$$

4. Le changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$ donne $\sqrt{x} I(x) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u^2}{x}\right)^{-x} du$. D'une part,

$x \ln\left(1 + \frac{u^2}{x}\right) \rightarrow u^2$, donc l'intégrande tend vers e^{-u^2} . D'autre part, la question 3 avec $s = \frac{u^2}{x}$ donne $\left(1 + \frac{u^2}{x}\right)^x \geq 1 + u^2$ pour $x \geq 1$. L'intégrande est donc majoré par $\frac{1}{1+u^2}$, intégrable. Par convergence dominée, $\sqrt{x} I(x) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $I(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

Point de méthode : la figure de l'énoncé indique l'échelle utile. L'intégrande n'est notable que pour t de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, d'où le changement de variable.

Corrigé de l'exercice 19 : Problème, formule de Stirling pour la fonction Gamma

1. Dans $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$, on pose d'abord $t = xu$. On obtient

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\ln u - u)} du. \text{ Ensuite, on pose } u = 1 + s. \text{ Comme}$$

$$\ln u - u = \varphi(s) - 1, \text{ il vient } \Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{+\infty} e^{x\varphi(s)} ds. \text{ Enfin, } s = \frac{v}{\sqrt{x}}$$

donne $\Gamma(x+1) = x^{x+1/2} e^{-x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \exp\left(x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right)\right) dv$. Ces changements de variable sont affines, donc licites.

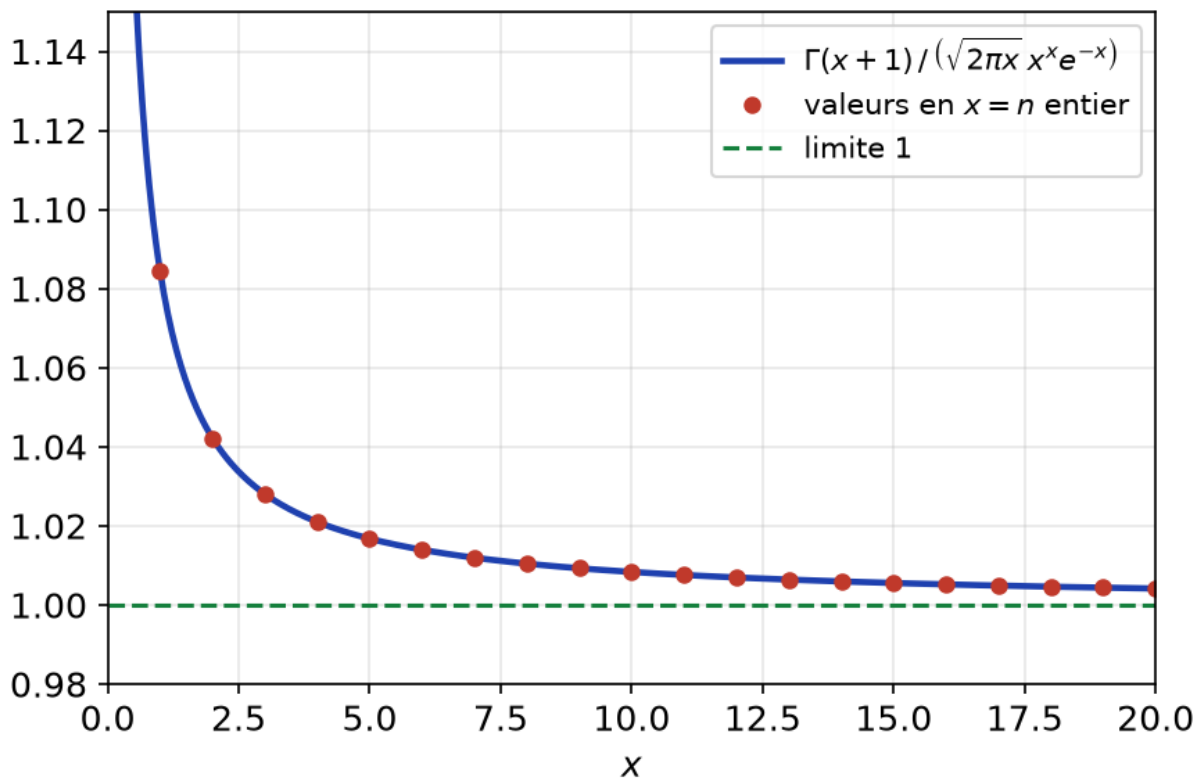
2. Au voisinage de 0, $\varphi(s) = -\frac{s^2}{2} + o(s^2)$. Pour $v \neq 0$ fixé, $s = \frac{v}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, et $x \varphi(s) = -\frac{v^2}{2} + v^2 \varepsilon(s)$ avec $\varepsilon(s) \rightarrow 0$. Le cas $v = 0$ est immédiat. Donc $x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) \rightarrow -\frac{v^2}{2}$.

3. Soit $g(s) = \varphi(s) + \frac{s^2}{2}$. On a $g'(s) = \frac{1}{1+s} - 1 + s = \frac{s^2}{1+s} \geq 0$ et $g(0) = 0$. Donc $g \leq 0$ sur $]-1,0]$. Soit ensuite $h(s) = \varphi(s) + \frac{s^2}{4}$. On a $h'(s) = \frac{1}{1+s} - 1 + \frac{s}{2} = \frac{s(s-1)}{2(1+s)} \leq 0$ sur $[0,1]$, et $h(0) = 0$. Donc $\varphi(s) \leq -\frac{s^2}{2}$ sur $]-1,0]$ et $\varphi(s) \leq -\frac{s^2}{4}$ sur $[0,1]$.

Questions 4 à 6

4. On a $\varphi''(s) = -\frac{1}{(1+s)^2} < 0$: φ est concave. Comme $\varphi(0) = 0$, la pente $s \mapsto \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{s}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $s \geq 1$, on obtient $\frac{\varphi(s)}{s} \leq \varphi(1) = \ln 2 - 1$. Donc $\varphi(s) \leq (\ln 2 - 1)s$ pour $s \geq 1$.
5. Soit $x \geq 1$ et $g_x(v)$ l'intégrande prolongé par 0. Posons $c = 1 - \ln 2 > 0$. Si $-\sqrt{x} < v \leq 0$, la question 3 donne $x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) \leq -\frac{v^2}{2}$. Si $0 \leq v \leq \sqrt{x}$, elle donne $x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) \leq -\frac{v^2}{4}$. Si $v \geq \sqrt{x}$, la question 4 donne $x \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) \leq -c\sqrt{x} v \leq -c v$, car $\sqrt{x} \geq 1$. On pose donc $h(v) = e^{-v^2/2}$ pour $v < 0$ et $h(v) = e^{-v^2/4} + e^{-cv}$ pour $v \geq 0$. Cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $0 \leq g_x \leq h$.
6. Soit $x_n \rightarrow +\infty$ avec $x_n \geq 1$. Par la question 2, $g_{x_n}(v) \rightarrow e^{-v^2/2}$ pour tout v (car $-\sqrt{x_n} < v$ à partir d'un certain rang). Par convergence dominée, $\int_{\mathbb{R}} g_{x_n} \rightarrow \sqrt{2\pi}$. La caractérisation séquentielle donne alors $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$. Avec $x = n$, on obtient la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

La figure ci-dessous trace le quotient $\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}}$. Il décroît vers 1, et vaut déjà environ 1,008 pour $x = 10$.



Point de méthode : c'est la méthode de Laplace. On centre l'intégrale au maximum de la phase, puis on la dilate à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{x}}$; la domination se construit morceau par morceau.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [intégrales à paramètre, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur intégrales à paramètre](#)
- À maîtriser avant : [Convergence dominée et intégration terme à terme](#)
- Chapitre précédent : [Convergence dominée et intégration terme à terme](#)
- Chapitre suivant : [Ensembles dénombrables et espaces probabilisés](#)

- Le même thème en L2 : [intégrales à paramètre, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)