

Intégrales à paramètre

Corrigé de l'exercice 1 : Continuité d'une intégrale sur un segment

1. Posons $f(x, t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème de continuité sur un segment, F **est continue sur** $\mathbb{R}$. De plus, le cosinus est pair, donc $f(-x, t) = f(x, t)$. Par conséquent, F **est paire**.

2. D'abord, $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Ensuite, $|\cos(xt)| \leq 1$, donc
- $$|F(x)| \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$
- Ainsi, $F(0) = \frac{\pi}{4}$ **et** $|F(x)| \leq \frac{\pi}{4}$: le maximum de $|F|$ est atteint en 0.

3. La dérivée partielle $\partial_x f(x, t) = -\frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$ existe et elle est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale sur un segment s'applique. Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = -\int_0^1 \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$. En particulier, $F'(0) = 0$, ce qui est cohérent avec la parité de F .

4. Soit $x \neq 0$. On intègre par parties avec $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \frac{\sin(xt)}{x}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Comme $u'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$, on obtient :

$$F(x) = \left[\frac{\sin(xt)}{x(1+t^2)} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{2t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\sin x}{2x} + \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{2t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$$

Or $\int_0^1 \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $|F(x)| \leq \frac{1}{2|x|} + \frac{1}{2|x|} = \frac{1}{|x|}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Les oscillations de $\cos(xt)$ se compensent de mieux en mieux.

Point de méthode : sur un segment, la continuité de f en les deux variables suffit. En revanche, la limite en $+\infty$ ne relève pas du théorème de continuité : on l'obtient par une majoration explicite.

Corrigé de l'exercice 2 : Dérivées successives d'une intégrale sur un segment

1. La fonction $f : (x, t) \rightarrow e^{xt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. De plus, pour tout n , $\partial_x^n f(x, t) = t^n e^{xt}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. En appliquant le théorème de dérivation sur un segment à chaque ordre, on obtient que **F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et**

$$F^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n e^{xt} dt.$$

2. En $x = 0$, il vient $F^{(n)}(0) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

3. Pour $x \neq 0$, une primitive de $t \rightarrow e^{xt}$ est $t \rightarrow \frac{e^{xt}}{x}$. Donc $F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. En dérivant ce quotient, on trouve $F'(x) = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$. D'autre part, une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 t e^{xt} dt = \left[\frac{t e^{xt}}{x} \right]_0^1 - \frac{1}{x} \int_0^1 e^{xt} dt = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}.$$

Les deux expressions coïncident, ce qui confirme la formule de dérivation.

4. On sait que $e^x - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$, donc $\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!}$ pour $x \neq 0$. Or $\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi, **les coefficients de Taylor de F en 0 sont exactement ceux de la série entière.**

Corrigé de l'exercice 3 : Une intégrale calculée par dérivation

- Soit $x > -1$ et $t \in]0,1[$. Posons $u = x \ln t$, de sorte que $t^x = e^u$ et $f(x,t) = \frac{e^u - 1}{\ln t}$. L'inégalité admise donne $|f(x,t)| \leq \frac{|x| |\ln t| e^{\max(u,0)}}{|\ln t|} = |x| e^{\max(u,0)}$.
Si $x \geq 0$, alors $u \leq 0$ car $\ln t < 0$, donc $|f(x,t)| \leq |x|$. Si $-1 < x < 0$, alors $u > 0$ et $e^u = t^x$, donc $|f(x,t)| \leq |x| t^x$. Dans les deux cas, $t \rightarrow f(x,t)$ est continue sur $]0,1[$ et majorée par une fonction intégrable, car t^x est intégrable en 0 pour $x > -1$. Donc **F est bien définie sur $] -1, +\infty[$.**
- Comme $t^x = e^{x \ln t}$, on a $\frac{\partial}{\partial x} t^x = t^x \ln t$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x$. Cette fonction est continue sur $] -1, +\infty[\times]0,1[$, tout comme f .
Soit $[\alpha, \beta] \subset] -1, +\infty[$. Pour $x \in [\alpha, \beta]$ et $t \in]0,1[$, on a $t^x \leq t^\alpha$, car $t < 1$ et $x \geq \alpha$. Or $t \rightarrow t^\alpha$ est intégrable sur $]0,1[$, puisque $\alpha > -1$. Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont donc réunies. Par conséquent, **F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.**
- Par ailleurs, $f(0,t) = 0$, donc $F(0) = 0$. En intégrant, on obtient **$F(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x > -1$.**
- La première intégrale vaut $F(1)$, soit $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$. Pour la seconde, on écrit $t^2 - t = (t^2 - 1) - (t - 1)$. Par linéarité, elle vaut $F(2) - F(1) = \ln 3 - \ln 2$. Donc $\int_0^1 \frac{t^2 - t}{\ln t} dt = \ln \frac{3}{2}$.

Point de méthode : la dérivée partielle est ici bien plus simple que f . C'est le signe qu'une dérivation sous le signe intégrale va aboutir.

Corrigé de l'exercice 4 : Une intégrale classique sur $[0,1]$

1. Pour $(x,t) \in [0,1]^2$, on a $1+xt \geq 1$. Ainsi, $f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]^2$. Sa dérivée partielle $\partial_x f(x,t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$ est également continue sur $[0,1]^2$. D'après le théorème sur un segment, **F est de classe C^1 et $F'(x) = \int_0^1 \frac{t \, dt}{(1+xt)(1+t^2)}$.**

2. On cherche $t = A(1+t^2) + (Bt + C)(1+xt)$ pour tout t . En identifiant les coefficients de t^2 , de t et les constantes, on obtient le système $A + Bx = 0$, $B + Cx = 1$, $A + C = 0$. Ainsi, $C = -A$ et $B = -\frac{A}{x}$ pour $x \neq 0$. Ensuite, la deuxième équation donne $-A\left(\frac{1}{x} + x\right) = 1$. Finalement :

$$A = -\frac{x}{1+x^2}, \quad B = \frac{1}{1+x^2}, \quad C = \frac{x}{1+x^2}.$$

Ces valeurs conviennent aussi pour $x = 0$, comme on le vérifie directement.

3. On intègre chaque terme sur $[0,1]$. D'abord, $\int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \frac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x \neq 0$, donc
- $$A \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = -\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}. \text{ Ensuite, } \int_0^1 \frac{t \, dt}{1+t^2} = \frac{\ln 2}{2} \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}. \text{ Par conséquent :}$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi x}{4} - \ln(1+x) \right).$$

La formule reste vraie en $x = 0$, car les deux membres valent $\frac{\ln 2}{2}$. **C'est la formule**

demandée.

4. On remarque que $F(0) = 0$ et $F(1) = I$. Donc $I = \int_0^1 F'(x) dx$. Calculons les trois morceaux :

$$\int_0^1 \frac{\ln 2}{2(1+x^2)} dx = \frac{\pi \ln 2}{8}, \quad \int_0^1 \frac{\pi x}{4(1+x^2)} dx = \frac{\pi \ln 2}{8}, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = I.$$

Ainsi $I = \frac{\pi \ln 2}{4} - I$, d'où $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$. L'intégrale cherchée réapparaît dans le calcul, ce qui boucle l'argument.

Corrigé de l'exercice 5 : Une intégrale logarithmique sur un segment

1. Si $x \geq 1$, alors $\cos^2 t + x^2 \sin^2 t \geq \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Si $0 < x < 1$, alors $\cos^2 t + x^2 \sin^2 t \geq x^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = x^2$. Dans les deux cas, $\cos^2 t + x^2 \sin^2 t \geq \min(1, x^2) > 0$.

Par conséquent, $f(x, t) = \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)$ est continue sur $]0, +\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\partial_x f(x, t) = \frac{2x \sin^2 t}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}$ y est continue. Le théorème de dérivation sur un segment s'applique : **F' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.**

2. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on divise le numérateur et le dénominateur par $\cos^2 t$. Avec $u = \tan t$, bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$, et $dt = \frac{du}{1+u^2}$, on obtient :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x u^2}{(1+x^2 u^2)(1+u^2)} du.$$

Pour $x \neq 1$, on vérifie que $\frac{u^2}{(1+u^2)(1+x^2u^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2} \right)$. En effet,
 $(1+x^2u^2) - (1+u^2) = (x^2-1)u^2$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+x^2u^2} = \frac{\pi}{2x}$.

Donc :

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi(x-1)}{x^2-1} = \frac{\pi}{x+1}.$$

3. Pour $x = 1$, on a directement $F'(1) = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1+1}$. Ainsi

$F'(x) = \frac{\pi}{1+x}$ pour tout $x > 0$. De plus, $F(1) = \int_0^{\pi/2} \ln 1 \, dt = 0$. En intégrant sur $[1, x]$, on trouve :

$$F(x) = \pi \ln(1+x) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{1+x}{2}.$$

4. On a $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{x^2 \cos^2 t + \sin^2 t}{x^2} \, dt = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t) \, dt - \pi \ln x$. Le

changement de variable $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$ échange $\cos$ et $\sin$, donc la dernière intégrale vaut

$F(x)$. D'où $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x) - \pi \ln x$. La formule trouvée le vérifie bien, car

$$\pi \ln \frac{1+1/x}{2} = \pi \ln \frac{1+x}{2} - \pi \ln x.$$

Corrigé de l'exercice 6 : Une équation de Bessel

1. La fonction $f(x, t) = \cos(x \sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Toutes ses dérivées partielles en x y sont continues. Par le théorème de dérivation sur un segment, appliqué à chaque ordre, **J est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$** . Comme le cosinus est pair, $J(-x) = J(x)$. Ensuite,

$|\cos(x \sin t)| \leq 1$ donne $|J(x)| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$. Enfin, $J(0) = 1$.

2. En dérivant sous le signe intégrale :

$$J'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t) dt, \quad J''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos(x \sin t) dt.$$

Donc $J'(0) = 0$, ce qui découle aussi de la parité. De plus,

$$J''(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ soit } J''(0) = -\frac{1}{2}.$$

3. Comme $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$, on a

$x J''(x) + x J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cdot x \cos t \cos(x \sin t) dt$. Or $x \cos t \cos(x \sin t)$ est la dérivée de $t \rightarrow \sin(x \sin t)$. On intègre donc par parties :

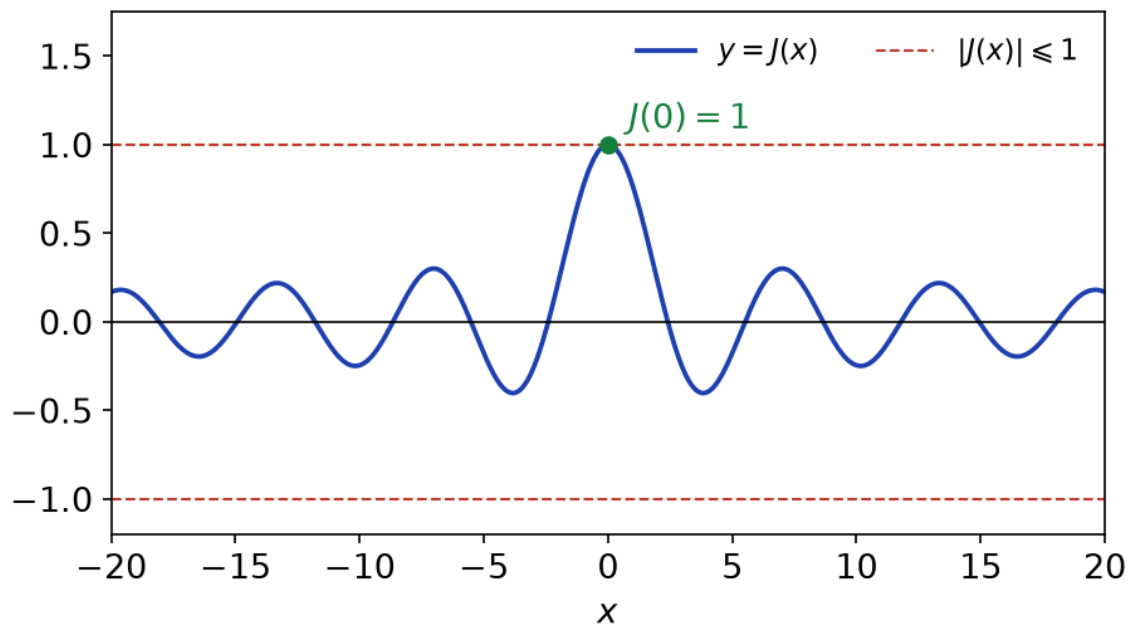
$$\int_0^{\pi} \cos t \cdot x \cos t \cos(x \sin t) dt = \left[\cos t \sin(x \sin t) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t) dt.$$

Le crochet est nul, car $\sin(x \sin 0) = \sin(x \sin \pi) = 0$. Ainsi,

$$x J''(x) + x J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin(x \sin t) dt = -J'(x). \text{ Par conséquent,}$$

$$x J'' + J' + x J = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

La figure ci-dessous montre la fonction J obtenue. On y lit $J(0) = 1$, la parité et l'encadrement $|J| \leq 1$. Les oscillations amorties sont typiques des solutions de l'équation de Bessel.



Corrigé de l'exercice 7 : Vérifier une domination

1. Les fonctions $(x, t) \rightarrow e^{-t}\cos(xt)$ et $(x, t) \rightarrow e^{-t}\sin(xt)$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. De plus, pour tout (x, t) , elles sont majorées en module par $\varphi(t) = e^{-t}$. Cette fonction ne dépend pas de x et elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de continuité sous domination montre donc que **F et G sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.**

2. Pour $A > 0$, on a $\int_0^A e^{(-1+ix)t} dt = \frac{e^{(-1+ix)A} - 1}{-1+ix}$. Or $|e^{(-1+ix)A}| = e^{-A} \rightarrow 0$.

Par conséquent :

$$F(x) + i G(x) = \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}.$$

En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $G(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

3. La dérivée partielle $\partial_x(e^{-t}\cos(xt)) = -t e^{-t}\sin(xt)$ est continue et majorée par $t e^{-t}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Cette domination vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc F est $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t}\sin(xt) dt. \text{ Or } F'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \text{ Par conséquent,}$$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t}\sin(xt) dt = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Corrigé de l'exercice 8 : Quand la domination fait défaut

1. Pour $x = 0$, la fonction intégrée est nulle, donc $F(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a

$$\int_0^A x e^{-xt} dt = 1 - e^{-xA} \rightarrow 1. \text{ Donc } F(x) = 1 \text{ pour } x > 0 \text{ et } F(0) = 0. \text{ Ainsi, } F \text{ n'est pas continue en } 0, \text{ alors que } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[^2.$$

2. Soit $t \geq 1$. Le réel $x = \frac{1}{t}$ appartient à $]0, 1]$. Donc $\varphi(t) \geq f\left(\frac{1}{t}, t\right) = \frac{1}{t} e^{-1}$. Or $t \rightarrow \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann d'exposant -1). Par comparaison de fonctions positives, **aucune fonction dominante intégrable n'existe sur $]0, 1]$** . Comme le montre la figure de l'énoncé, les fonctions $t \rightarrow x e^{-xt}$ viennent toucher l'enveloppe $\frac{1}{t}$ les unes après les autres.

3. Pour $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$, on a $x e^{-xt} \leq b e^{-at}$. La fonction $\varphi(t) = b e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On retrouve ainsi que F est continue sur $[a, b]$, pour tous $0 < a < b$, donc sur $]0, +\infty[$. C'est cohérent : F y est constante. Le défaut de continuité est donc concentré en 0 , là où la domination échoue.

Point de méthode : pour prouver qu'une domination est impossible, on calcule $\sup_x |f(x, t)|$ à t fixé. Toute fonction dominante est au-dessus de ce supremum, qui est ici non intégrable.

Corrigé de l'exercice 9 : Continuité sur un intervalle ouvert

1. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{1+t^x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, bornée par 1 au voisinage de 0 (elle tend vers 0, $\frac{1}{2}$ ou 1 selon le signe de x). Le problème se situe donc en $+\infty$. Si $x \leq 0$, alors $t^x \leq 1$ pour $t \geq 1$, donc la fonction est minorée par $\frac{1}{2}$: l'intégrale diverge. Si $x > 0$, alors $\frac{1}{1+t^x} \sim t^{-x}$, intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 1$. Donc **F est définie exactement sur $]1, +\infty[$.**

2. La fonction $f(x, t) = \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $]1, +\infty[\times [0, +\infty[$. Soit $[\alpha, \beta] \subset]1, +\infty[$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $f(x, t) \leq 1$. Pour $t \geq 1$ et $x \geq \alpha$, on a $1 + t^x \geq t^x \geq t^\alpha$, donc $f(x, t) \leq t^{-\alpha}$. La fonction φ , égale à 1 sur $[0, 1]$ et à $t^{-\alpha}$ sur $]1, +\infty[$, est intégrable car $\alpha > 1$. Par domination locale, **F est continue sur $]1, +\infty[$.**

3. On écrit $F(x) - 1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^x} - 1 \right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$. Le premier terme vaut $-\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$, de module au plus $\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$. Le second est positif et majoré par $\int_1^{+\infty} t^{-x} dt = \frac{1}{x-1}$. D'où l'inégalité. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

4. Pour $t \geq 1$, on a $1 + t^x \leq 2t^x$. Donc $F(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^x} = \frac{1}{2(x-1)}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$.

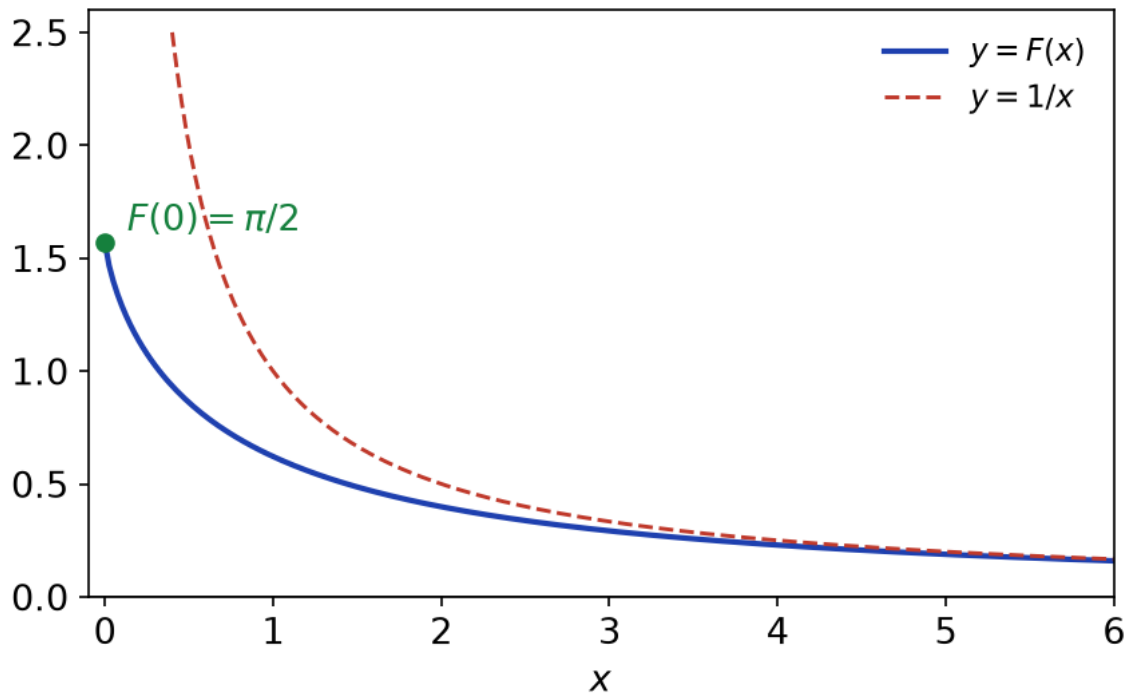
5. Enfin, $F(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, ce que confirme la figure de l'énoncé.

Corrigé de l'exercice 10 : Une équation différentielle du second ordre

1. La fonction $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x \geq 0$, on a $0 < f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par domination, **F est définie et continue sur $[0, +\infty[$** . De plus, $F(0) = \frac{\pi}{2}$.
2. Pour $x > 0$, la fonction intégrée est continue et strictement positive, donc $F(x) > 0$. Par ailleurs, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, d'où $F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
3. Pour $k \in \{1, 2\}$, la dérivée partielle $\partial_x^k f(x,t) = \frac{(-t)^k e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue. Soit $\alpha > 0$. Pour $x \geq \alpha$, on a $\left| \partial_x^k f(x,t) \right| \leq \frac{t^k}{1+t^2} e^{-\alpha t} \leq e^{-\alpha t}$, car $t^k \leq 1+t^2$ pour $k \in \{1, 2\}$. Cette fonction est intégrable. Ainsi, **F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$** . De plus, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t^2} dt < 0$, donc **F est strictement décroissante**.
4. Pour $x > 0$, en additionnant les intégrales :

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{1+t^2} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Donc **F est solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$** . La figure ci-dessous montre **F** , partant de $\frac{\pi}{2}$ et coincée sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.



Corrigé de l'exercice 11 : Domaine et relation fonctionnelle de Gamma

- La fonction $g(t) = t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0, on a $g(t) \sim t^{x-1}$. D'après le critère de Riemann, g est intégrable en 0 si et seulement si $1 - x < 1$, soit $x > 0$. En $+\infty$, $t^2 g(t) = t^{x+1}e^{-t} \rightarrow 0$, donc $g(t) = o(1/t^2)$: g y est toujours intégrable. Ainsi, $\Gamma(x)$ **converge si et seulement si** $x > 0$.
- Soit $x > 0$ et $0 < \varepsilon < A$. On intègre par parties avec $u = t^x$ et $v = -e^{-t}$:

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^A + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Le crochet vaut $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} - A^x e^{-A}$, qui tend vers 0 car $x > 0$. À la limite,

$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n!$.

3. Pour $x \in [\alpha, \beta]$: si $t \in]0, 1]$, alors $t^{x-1} \leq t^{\alpha-1}$; si $t \geq 1$, alors $t^{x-1} \leq t^{\beta-1}$.
On pose donc $\varphi(t) = (t^{\alpha-1} + t^{\beta-1})e^{-t}$, intégrable d'après la question 1. De plus,
 $(x, t) \rightarrow t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[^2$. Par domination locale, Γ **est continue**
sur $]0, +\infty[$.
4. D'après la question 2, $x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Or Γ est continue en 1, donc
 $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ quand $x \rightarrow 0^+$. Par conséquent, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+ .

Corrigé de l'exercice 12 : Gamma aux demi-entiers

1. L'application $u \rightarrow u^2$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même.
Avec $t = u^2$ et $dt = 2u du$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Ainsi, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donne successivement $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis
 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, et enfin $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$.

3. Pour $n = 0$, la formule donne $\sqrt{\pi}$: elle est vraie. Supposons-la vraie au rang n . Alors :

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(2n+2) \cdot 4^n n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} (n+1)!} \sqrt{\pi}.$$

En effet, $2(2n+2)n! = 4(n+1)n! = 4(n+1)!$. La formule est donc héréditaire. Par

réurrence, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$ pour tout n . Pour $n = 3$, on retrouve bien $\frac{720}{64 \cdot 6} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Calculs d'intégrales avec la fonction Gamma

1. D'abord, $\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t} dt = \Gamma(6) = 5!$, soit 120. Ensuite, le changement de variable linéaire

$$u = 2t \text{ donne } \int_0^{+\infty} t^3 e^{-2t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{8} e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{\Gamma(4)}{16} = \frac{6}{16}, \text{ soit } \frac{3}{8}.$$

2. Avec $u = t^2$, $t = \sqrt{u}$ et $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même :

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$

3. L'application $u \rightarrow e^{-u}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Avec $t = e^{-u}$, on a $\ln t = -u$ et $dt = -e^{-u} du$. Donc :

$$\int_0^1 (\ln t)^n dt = \int_{+\infty}^0 (-u)^n (-e^{-u}) du = (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = (-1)^n n!.$$

Ainsi, $\int_0^1 (\ln t)^n dt = (-1)^n n!$.

4. Avec $u = t^3$, $t = u^{1/3}$ et $dt = \frac{1}{3}u^{-2/3} du$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{3}-1} e^{-u} du = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right).$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$. Cette valeur ne s'exprime pas avec les constantes usuelles.

Point de méthode : dès qu'une intégrale contient e^{-t^k} ou $(\ln t)^n$, un changement de variable ramène souvent à la forme $\int_0^{+\infty} u^{s-1} e^{-u} du$.

Corrigé de l'exercice 14 : Régularité et convexité de Gamma

1. Posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$, avec $\partial_x f = (\ln t) f$ et $\partial_x^2 f = (\ln t)^2 f$. Soit $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$. Comme dans l'exercice 11, pour $k \in \{1, 2\}$ et $x \in [\alpha, \beta]$:

$$|\partial_x^k f(x, t)| \leq \varphi_k(t) = |\ln t|^k (t^{\alpha-1} + t^{\beta-1}) e^{-t}.$$

En 0, $|\ln t|^k t^{\alpha-1} = o(t^{\alpha/2-1})$ car $t^{\alpha/2} |\ln t|^k \rightarrow 0$, et $\frac{\alpha}{2} - 1 > -1$. En $+\infty$, $\varphi_k(t) = o(1/t^2)$. Donc φ_k est intégrable. Le théorème de dérivation s'applique deux fois :

Γ est $\mathcal{C}^2$, avec $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t \, t^{x-1} e^{-t} dt$ et

$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$. La fonction intégrée dans Γ'' est continue, positive et

non identiquement nulle. Donc $\Gamma''(x) > 0$: Γ est strictement convexe.

2. On écrit $\ln t \, t^{x-1} e^{-t} = \left(\ln t \, t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \right) \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \right)$. Les carrés de ces deux facteurs sont intégrables, d'intégrales respectives $\Gamma''(x)$ et $\Gamma(x)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales généralisées donne donc :

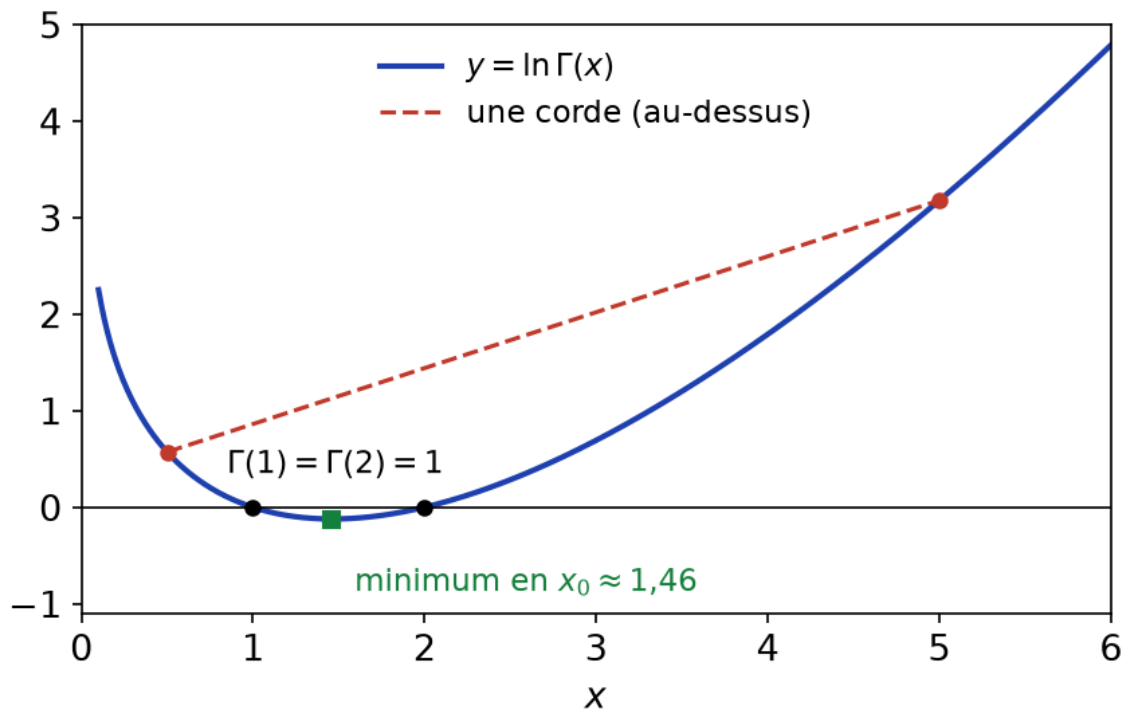
$$\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma''(x) \Gamma(x).$$

Comme $\Gamma > 0$, la fonction $\ln \Gamma$ est $\mathcal{C}^2$ et $(\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma \Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2} \geq 0$. Ainsi, $\ln \Gamma$ est convexe : on dit que Γ est log-convexe.

3. On a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, et Γ est dérivable. Le théorème de Rolle fournit $x_0 \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. De plus, $\Gamma'' > 0$, donc Γ' est strictement croissante : ce zéro est **unique**. Par conséquent, $\Gamma' < 0$ sur $]0, x_0[$ et $\Gamma' > 0$ sur $]x_0, +\infty[$. Ainsi, Γ **décroît strictement sur $]0, x_0]$, croît strictement sur $[x_0, +\infty[$, et atteint son minimum en x_0** . Numériquement, $x_0 \approx 1,46$ et $\Gamma(x_0) \approx 0,886$.

4. D'après l'exercice 11, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en $0+$, donc $\lim_{0+} \Gamma = +\infty$. Ensuite, Γ est croissante sur $[x_0, +\infty[$ et $\Gamma(n+1) = n! \rightarrow +\infty$. Une fonction croissante non majorée tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{+\infty} \Gamma = +\infty$.

La figure ci-dessous représente $\ln \Gamma$. Toute corde est au-dessus de la courbe, ce qui traduit la log-convexité. On y voit aussi les zéros 1 et 2, et le minimum en x_0 .



Corrigé de l'exercice 15 : L'intégrale de Gauss par une intégrale à paramètre

1. La fonction $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, avec
 $\partial_x f(x, t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$. D'après le théorème sur un segment, F est $\mathcal{C}^1$ et
 $F'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$. Pour $x \neq 0$, le changement de variable $u = xt$
 donne $x \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} du$. Ainsi :

$$F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du,$$

et cette égalité reste vraie en $x = 0$. Par ailleurs, $x \rightarrow \int_0^x e^{-u^2} du$ est la primitive de e^{-x^2} nulle en 0 . Par dérivation d'un carré, $G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -F'(x)$.

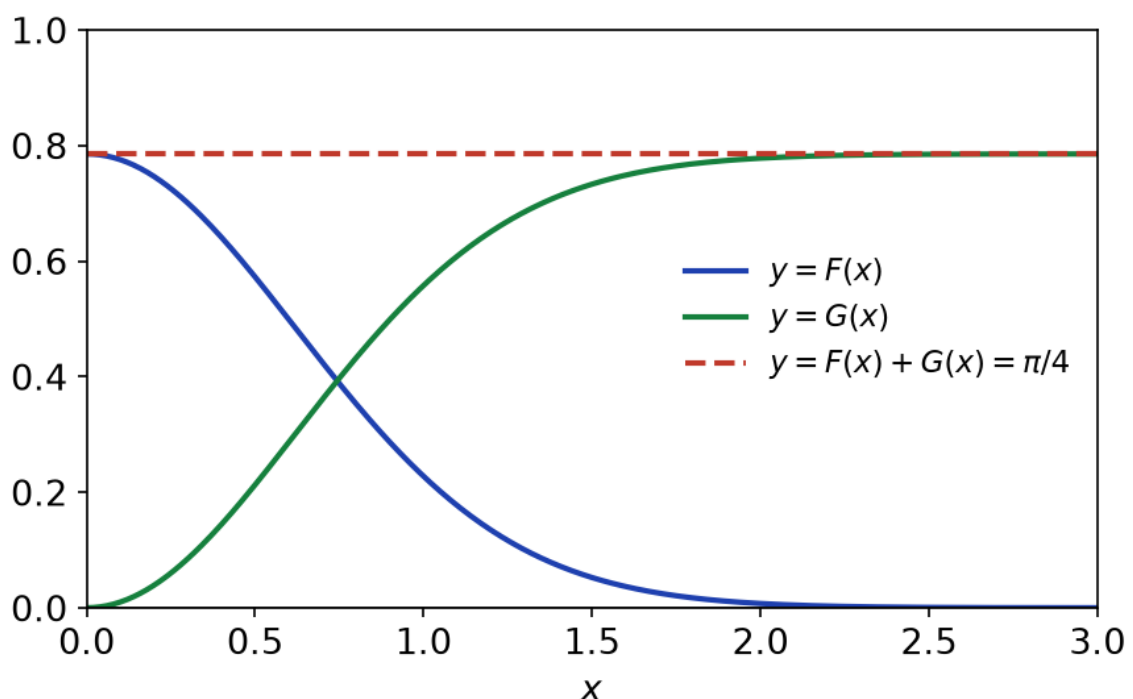
2. Donc $(F + G)' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et $F + G$ est constante. En 0 , $G(0) = 0$ et $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$ **pour tout réel** x .

3. Pour $t \in [0, 1]$, on a $e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$. En intégrant sur un intervalle de longueur 1 , on obtient $0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$.

4. Par encadrement, $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par conséquent, $G(x) \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Or

$\int_0^x e^{-u^2} du$ est positive et tend vers l'intégrale de Gauss, qui converge. En passant à la racine carrée, $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

La figure ci-dessous illustre l'argument. La courbe de F décroît vers 0 , celle de G croît vers $\frac{\pi}{4}$, et leur somme reste constante.



Corrigé de l'exercice 16 : Transformée de Fourier de la gaussienne

1. La fonction $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et vérifie $|f(x, t)| \leq e^{-t^2}$, intégrable. De plus, $\partial_x f(x, t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$ est continue et majorée par $t e^{-t^2}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Ces dominations valent pour tout x . Donc F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt$.

2. Pour $A > 0$, on intègre par parties avec $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, primitive de $t e^{-t^2}$:

$$\int_0^A t e^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}e^{-A^2} \sin(xA)$, qui tend vers 0. À la limite,

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt = \frac{x}{2} F(x). \text{ Donc } F'(x) = -\frac{x}{2} F(x).$$

3. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ses solutions sont $x \rightarrow K e^{-x^2/4}$. Or $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'intégrale de Gauss. Donc $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

4. Avec $x = 2$, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}$.

Corrigé de l'exercice 17 : Premières transformées de Laplace

1. Pour $p > 0$, $\int_0^A e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pA}}{p} \rightarrow \frac{1}{p}$. Pour $p \leq 0$, on a $e^{-pt} \geq 1$: l'intégrale diverge. Donc $\mathcal{L}(1)(p) = \frac{1}{p}$ pour $p > 0$. Ensuite, pour $p \leq 0$, $t^n e^{-pt} \geq t^n$ n'est pas intégrable. Pour $p > 0$, le changement de variable $u = pt$ donne

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du.$$
Ainsi, $\mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour $p > 0$.
2. On a $e^{at}e^{-pt} = e^{-(p-a)t}$. D'après la question 1, $\mathcal{L}(e^{at})(p) = \frac{1}{p-a}$, définie si et seulement si $p > a$.
3. Pour $p > 0$, la fonction $t \rightarrow e^{(-p+i\omega)t}$ est intégrable, de module e^{-pt} . Comme dans l'exercice 7 :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-p+i\omega)t} dt = \frac{1}{p-i\omega} = \frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}.$$

En prenant parties réelle et imaginaire, $\mathcal{L}(\cos \omega t)(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}(\sin \omega t)(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Pour $p \leq 0$, l'intégrale diverge. En effet, sur chaque intervalle $\left[\frac{2k\pi}{\omega}, \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{3\omega}\right]$, on a $\cos(\omega t) e^{-pt} \geq \frac{1}{2}$. Le critère de Cauchy est donc mis en défaut, et de même pour le sinus.

4. La fonction $t \rightarrow t^{-1/2}e^{-pt}$ est intégrable en 0 , car équivalente à $t^{-1/2}$. Pour $p \leq 0$, elle est minorée par $t^{-1/2}$ en $+\infty$: l'intégrale diverge. Pour $p > 0$, le changement de variable $u = pt$ donne

$$\int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-pt} dt = p^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$
Ainsi, $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$ pour $p > 0$.

Corrigé de l'exercice 18 : Dérivation d'une transformée de Laplace

1. Pour $p > 0$, on a $|f(t)e^{-pt}| \leq M e^{-pt}$, intégrable. Donc $\mathcal{L}(f)(p)$ existe, et

$$|\mathcal{L}(f)(p)| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{M}{p}.$$

2. Posons $g(p, t) = f(t)e^{-pt}$. Les fonctions g et $\partial_p g(p, t) = -t f(t) e^{-pt}$ sont continues sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Soit $\alpha > 0$. Pour $p \geq \alpha$, on a $|\partial_p g(p, t)| \leq M t e^{-\alpha t}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique sur chaque $[\alpha, +\infty[$. Donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\mathcal{L}(f)'(p) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt.$$

3. Avec $f = \sin$, on obtient $\mathcal{L}(t \sin t)(p) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2+1} \right)$, soit $\mathcal{L}(t \sin t)(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$.

De même, avec $f = \cos$:

$$\mathcal{L}(t \cos t)(p) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) = -\frac{(p^2+1) - 2p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}(t \cos t)(p) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}.$$

4. Soit $A > 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^A f'(t) e^{-pt} dt = f(A) e^{-pA} - f(0) + p \int_0^A f(t) e^{-pt} dt. \text{ Comme } f \text{ est bornée, } f(A) e^{-pA} \rightarrow 0. \text{ Les deux intégrales convergent, puisque } f \text{ et } f' \text{ sont bornées. À la limite, } \mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p) - f(0). \text{ Pour } f = \sin, \text{ le membre de droite vaut } \frac{p}{p^2+1} - 0, \text{ ce qui est bien } \mathcal{L}(\cos)(p).$$

Point de méthode : pour une transformée de Laplace, on domine toujours sur $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$, jamais sur $]0, +\infty[$ entier. En effet, $t e^{-pt}$ n'admet pas de majorant intégrable uniforme quand p

s'approche de 0.

Corrigé de l'exercice 19 : Problème : l'intégrale de Dirichlet

1. La fonction $t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1, et $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$ pour $t > 0$. Pour $x > 0$, on a donc $\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}$, intégrable. Ainsi $F(x)$ existe et
- $$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

2. Posons $\varphi(t) = \frac{e^{-xt}}{t}$ sur $[A, B]$. Elle est $\mathcal{C}^1$, positive, et $\varphi'(t) = -\frac{(xt+1)e^{-xt}}{t^2} < 0$. On intègre par parties avec $-\cos$, primitive de $\sin$:

$$\int_A^B \varphi(t) \sin t dt = [-\varphi(t) \cos t]_A^B + \int_A^B \varphi'(t) \cos t dt.$$

Le crochet est majoré en module par $\varphi(A) + \varphi(B)$. Comme $\varphi' \leq 0$, l'intégrale est majorée par $\int_A^B |\varphi'| = \varphi(A) - \varphi(B)$. Au total, le module est au plus $2\varphi(A) \leq \frac{2}{A}$.

Pour $x = 0$, cette majoration, uniforme en B , montre que le critère de Cauchy est vérifié en $+\infty$. Donc $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. Enfin, en faisant tendre B vers $+\infty$, on obtient $|R_A(x)| \leq \frac{2}{A}$ pour tout $x \geq 0$.

3. La fonction $g(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, et $\partial_x g(x, t) = -e^{-xt} \sin t$ aussi. Soit $\alpha > 0$. Pour $x \geq \alpha$, on a $|\partial_x g(x, t)| \leq e^{-\alpha t}$, intégrable. Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt$. Or cette

intégrale est $\mathcal{L}(\sin)(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (exercice 17). Ainsi, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

4. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, il existe donc une constante C telle que $F(x) = C - \arctan x$.
Or $F(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ d'après la question 1, et $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Par conséquent,
 $C = \frac{\pi}{2}$ et $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ **pour** $x > 0$.

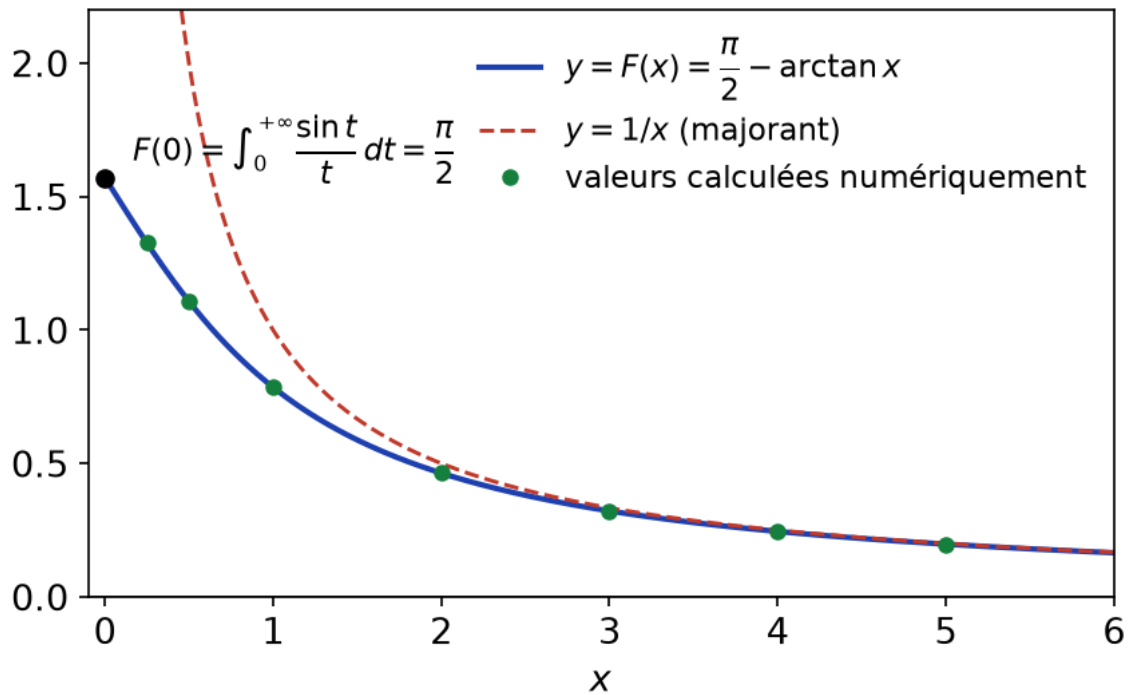
5. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A > 0$ tel que $\frac{2}{A} \leq \varepsilon$. Pour $x \geq 0$, on écrit :

$$F(x) - F(0) = (H_A(x) - H_A(0)) + R_A(x) - R_A(0), \quad H_A(x) = \int_0^A e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

La fonction $(x, t) \rightarrow e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$, prolongée par $e^0 \cdot 1$ en $t = 0$, est continue sur $[0, +\infty[\times [0, A]$. Par le théorème sur un segment, H_A est continue en 0. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $|H_A(x) - H_A(0)| \leq \varepsilon$ pour $0 \leq x \leq \eta$. Avec la question 2, on obtient $|F(x) - F(0)| \leq 3\varepsilon$. Ainsi, **F est continue en 0**.

Finalement, $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

La figure ci-dessous compare la formule obtenue avec des valeurs de F calculées numériquement. Elle montre aussi le majorant $\frac{1}{x}$ de la question 1, et le point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atteint par continuité.



Point de méthode : en $x = 0$, aucune domination n'est possible, car $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable. On découpe alors l'intégrale : un segment, où les théorèmes classiques s'appliquent, et un reste majoré uniformément en x .

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : une intégrale gaussienne à paramètre

1. La fonction $f(x, t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, on a $0 < f(x, t) \leq e^{-t^2}$, intégrable sur $]0, +\infty[$. Par domination, F est définie et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Posons $s = \frac{1}{t^2}$, qui décrit $]0, +\infty[$. La fonction $s \mapsto s e^{-a^2 s}$ atteint son maximum en $s = \frac{1}{a^2}$, où elle vaut $\frac{1}{e a^2}$. Donc $\frac{1}{t^2} e^{-a^2/t^2} \leq \frac{1}{e a^2}$ pour tout $t > 0$.

Ensuite, $\partial_x f(x,t) = -\frac{2x}{t^2} f(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[^2$. Soit $[a,b] \subset]0, +\infty[$. Pour $x \in [a,b]$, on a $e^{-x^2/t^2} \leq e^{-a^2/t^2}$, d'où :

$$|\partial_x f(x,t)| \leq 2b \cdot \frac{e^{-a^2/t^2}}{t^2} \cdot e^{-t^2} \leq \frac{2b}{e a^2} e^{-t^2}.$$

Ce majorant est intégrable et indépendant de x . Donc **F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,**

avec $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2x}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt$.

3. Soit $x > 0$. L'application $t \rightarrow \frac{x}{t}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = \frac{x}{u}$, on a $dt = -\frac{x}{u^2} du$, $\frac{x^2}{t^2} = u^2$ et $\frac{2x}{t^2} = \frac{2u^2}{x}$. Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{t^2} e^{-t^2 - x^2/t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{x} e^{-x^2/u^2 - u^2} \frac{x}{u^2} du = 2F(x).$$

Par conséquent, **$F'(x) = -2F(x)$ pour $x > 0$.**

4. La fonction $x \rightarrow F(x)e^{2x}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle y est donc constante, égale à K . Par continuité de F en 0 , $K = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi,

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x} \text{ pour tout } x \geq 0.$$

5. On a $\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2$. Donc $\exp\left(-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2\right) = e^2 \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale cherchée vaut $e^2 F(1) = e^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2}$. Finalement, $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Point de méthode : la continuité en 0 sert à fixer la constante, alors que l'équation différentielle n'est établie que sur $]0, +\infty[$. C'est un schéma très fréquent en partiel.

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [intégrales à paramètre, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur intégrales à paramètre](#)
- À maîtriser avant : [Intégrales généralisées](#), [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Séries entières](#)
- Chapitre suivant : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Le même thème en maths spé : [intégrales à paramètre, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)