

Intégrale de Lebesgue

Exercice 1 : Intégrale d'une fonction étagée positive

On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ . On considère la fonction

$$f = 2 \cdot 1_{[0, 3]} + 1_{[1, 5]} + 3 \cdot 1_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}.$$

1. Déterminer les valeurs prises par f et son écriture canonique $f = \sum \alpha_i \cdot 1_{A_i}$, où les α_i sont les valeurs non nulles distinctes de f .

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ à l'aide de l'écriture canonique, puis à l'aide de la linéarité. Vérifier que les deux résultats coïncident.

3. Calculer $\int_{[2, +\infty[} f \, d\lambda$.

Exercice 2 : Fonction de Dirichlet et intégrale de Riemann

Soit $D = 1_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$, définie sur $[0, 1]$.

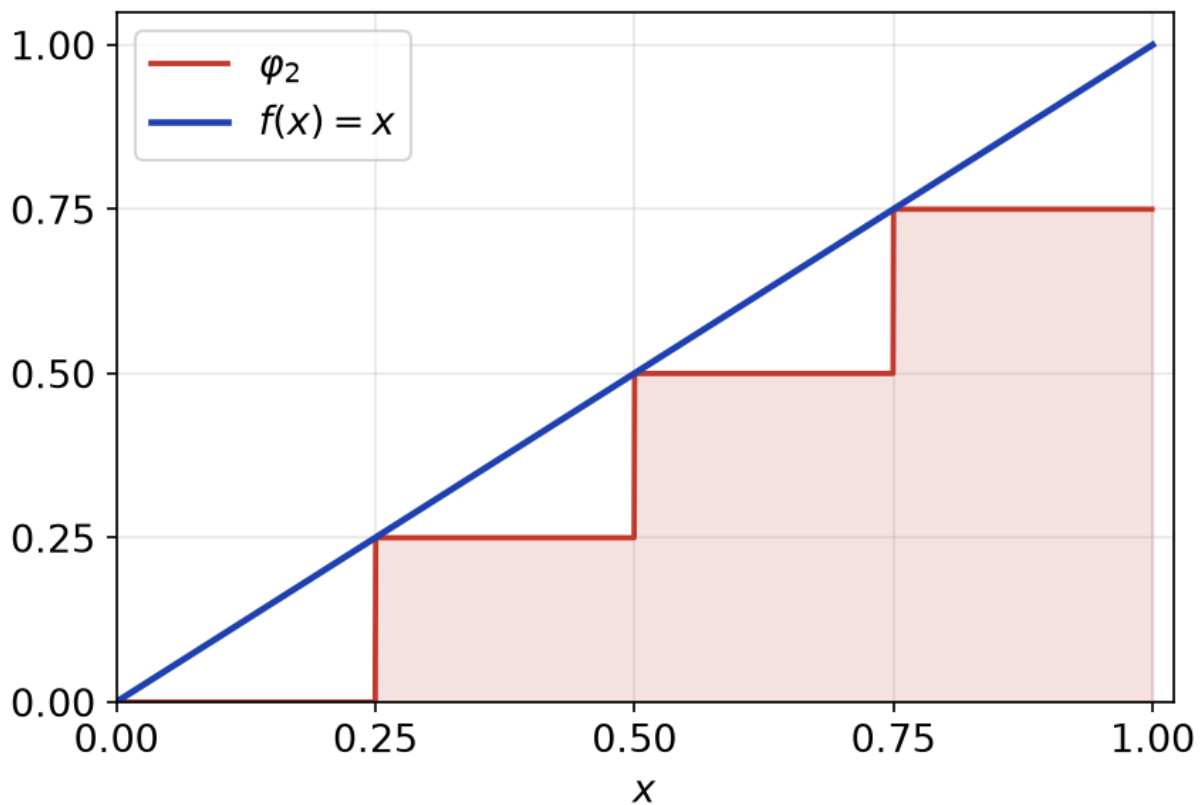
1. Montrer que D n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$.

2. Montrer que D est intégrable au sens de Lebesgue et calculer $\int_{[0, 1]} D \, d\lambda$.

3. Soit g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = x$ si x est irrationnel et $g(x) = x^2$ si x est rationnel. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ et calculer son intégrale.
4. Calculer les sommes de Darboux de g associées à la subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$. La fonction g est-elle intégrable au sens de Riemann ?

Exercice 3 : Approximation de l'identité par des fonctions étagées

Sur $[0, 1]$, on pose $f(x) = x$ et, pour $n \geq 1$, $\varphi_n = 2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor$. La figure ci-dessous représente f et φ_2 .



1. Écrire φ_n comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles.
2. Montrer que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ et que $0 \leq f - \varphi_n \leq 2^{-n}$.

3. Calculer $\int_{[0,1]} \varphi_n d\lambda$.

4. En déduire, en citant le théorème utilisé, la valeur de $\int_{[0,1]} f d\lambda$.

Exercice 4 : Une limite par convergence monotone

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

1. Soit $x \geq 0$. En étudiant $y \rightarrow y \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ sur $]0, +\infty[$, montrer que la suite $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Montrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 5 : Série de fonctions positives et zêta de 2

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Pour $x > 0$, écrire $\frac{x}{e^x - 1}$ comme la somme d'une série de fonctions positives.

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer de même que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 6 : Le rêve du bachelier

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx$ à l'aide du changement de variable $x = e^{-u}$.

2. Montrer que

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}.$$

3. En déduire une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-4} près, en contrôlant le reste.

Exercice 7 : Cas d'inégalité stricte dans le lemme de Fatou

Pour chacune des suites suivantes, déterminer $\liminf f_n$ en chaque point, puis comparer $\int \liminf f_n$ et $\liminf \int f_n$.

1. $f_n = n 1_{]0, 1/n]}$ sur $[0, 1]$.

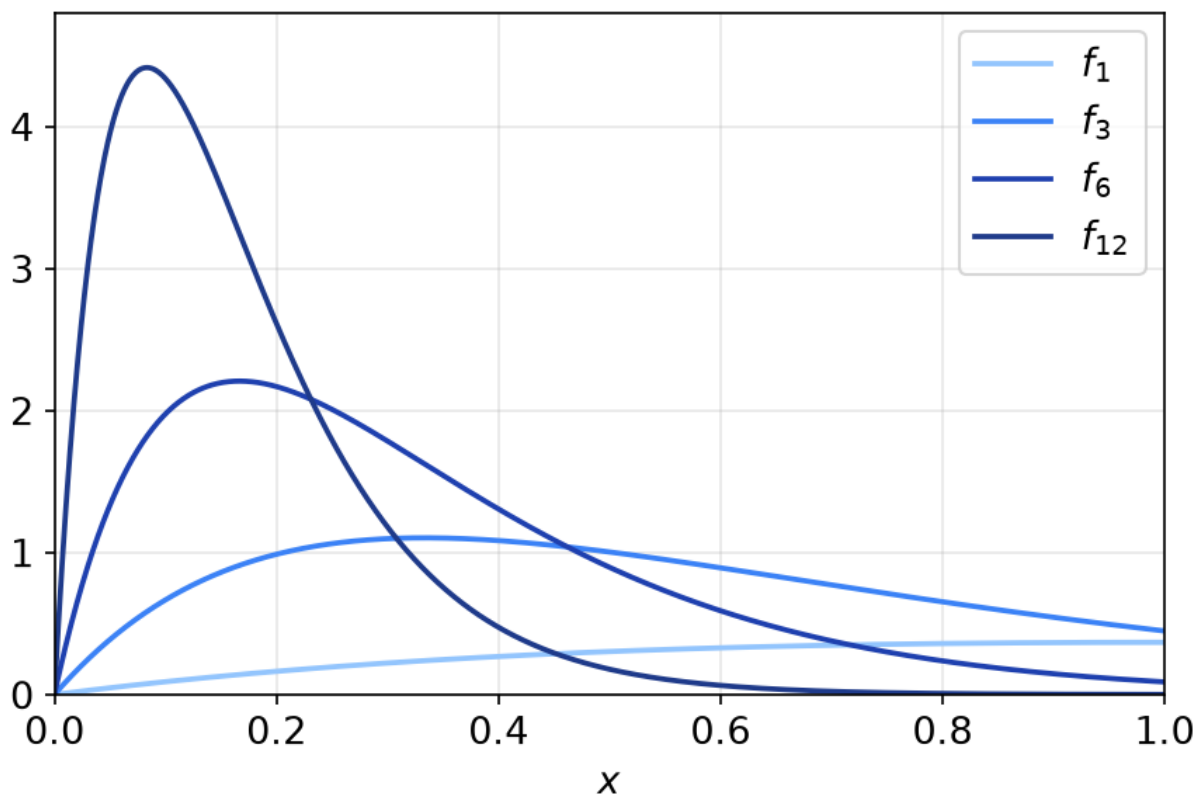
2. $f_n = 1_{[n, n+1]}$ sur $\mathbb{R}$.

3. $f_n = 1_{[0, 1]}$ si n est pair et $f_n = 1_{]1, 2]}$ si n est impair, sur $[0, 2]$.

4. On pose $k_n = -1_{[n, n+1]}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la conclusion du lemme de Fatou est fausse pour (k_n) . Quelle hypothèse manque ?

Exercice 8 : Une suite sans domination intégrable

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces fonctions.



1. Déterminer la limite simple de (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$, puis sa limite.
3. Comparer avec le lemme de Fatou et avec le théorème de convergence dominée.
4. Soit $x \in]0, 1]$ et $k = \lfloor 1/x \rfloor$. Montrer que $f_k(x) \geq \frac{1}{2e} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$. En déduire que $\sup_n f_n$ n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 9 : Convergence dominée avec un sinus

Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx.$$

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3. Déterminer de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{1+x^2} dx$.

Exercice 10 : Limite de l'intégrale de $1/(1+x^n)$

Pour $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ et $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

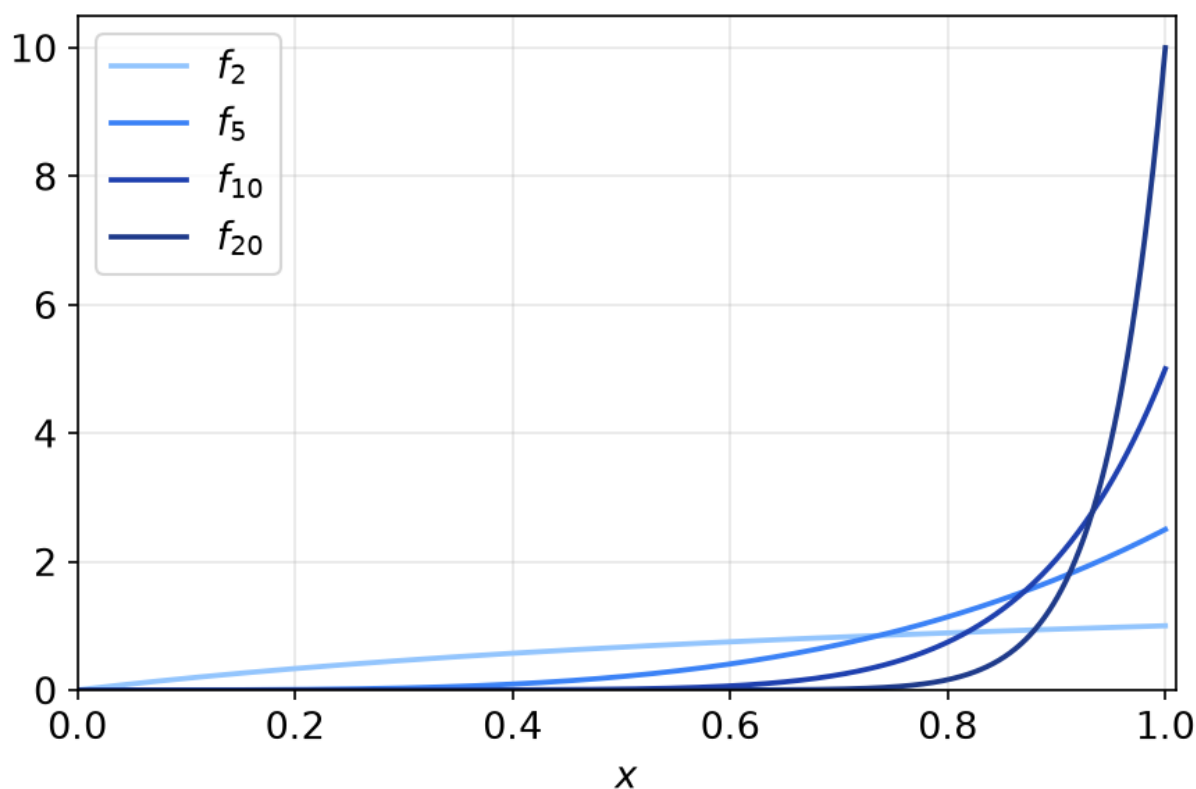
1. Justifier l'existence de I_n et de J_n .

2. Déterminer $\lim I_n$.

3. À l'aide du changement de variable $x = u^{1/n}$, montrer que $n J_n \rightarrow \ln 2$. En déduire un équivalent de J_n .

Exercice 11 : Concentration de la masse au bord

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{n x^{n-1}}{1+x}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. La figure ci-dessous montre que la masse se concentre près de $x = 1$.



1. Déterminer la limite simple de (f_n) sur $[0, 1[$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$.
3. En déduire $\lim I_n$.
4. Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable g sur $[0, 1]$ telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n .

Exercice 12 : Intégration terme à terme de séries alternées

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$, en vérifiant avec soin les hypothèses du théorème utilisé.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-nx} dx$ pour $n \geq 1$.

4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 13 : Intégrale de $\sin x / x$ et espace L^1

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

3. En déduire que $f \notin \mathcal{L}^1(]0, +\infty[)$.

4. Montrer que $\int f^+ d\lambda = \int f^- d\lambda = +\infty$. Pourquoi l'intégrale de Lebesgue de f n'est-elle pas définie ?

Exercice 14 : Continuité absolue de l'intégrale

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = \min(|f|, n)$.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} (|f| - g_n) d\lambda \rightarrow 0$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout borélien A ,
 $\lambda(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda < \varepsilon$.
3. On pose $F(x) = \int_{[0, x]} f d\lambda$ si $x \geq 0$ et $F(x) = -\int_{[x, 0]} f d\lambda$ si $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la conclusion de la question 2 est fausse pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$.

Exercice 15 : Lemme de Scheffé

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, qui converge presque partout vers une fonction intégrable positive f . On suppose que

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

1. Montrer que $0 \leq (f - f_n)^+ \leq f$ et que $(f - f_n)^+ \rightarrow 0$ presque partout.
2. En déduire que $\int (f - f_n)^+ d\mu \rightarrow 0$.
3. Vérifier que $|a| = 2a^+ - a$ pour tout réel a . En déduire que $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.
4. Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse $\int f_n \rightarrow \int f$ ne peut pas être supprimée.

5. Application : sur $[0, 1]$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{1/n}$. Montrer que

$$\int_0^1 |f_n(x) - 1| dx \rightarrow 0.$$

Exercice 16 : Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on pose $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$ pour $\xi \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est définie, bornée par $\|f\|_1$ et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $x \rightarrow x f(x)$ est intégrable. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 et exprimer $\widehat{f}'$.
3. Calculer $\widehat{f}$ pour $f = 1_{[-1, 1]}$, puis pour $f(x) = e^{-|x|}$.
4. Pour $f(x) = e^{-|x|}$, vérifier la formule de la question 2 en $\xi = 0$.

Exercice 17 : Régularité de la fonction Gamma

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$ sous forme d'intégrale.
3. Montrer que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour $x > 0$, puis que $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Montrer que Γ est convexe, puis que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 18 : Une équation différentielle vérifiée par une intégrale

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, et calculer $F(0)$.
2. Montrer que $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
3. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.
4. Montrer que $F'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. La fonction F est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 19 : Intégrale de Gauss par une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'(x)$.
2. Montrer que $F' + G' = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $F + G = \frac{\pi}{4}$.

4. Montrer que $0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 20 : Transformée de Fourier de la gaussienne

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir l'exercice 19). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$.
3. En déduire une expression de $F(x)$.
4. En déduire $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-ixt} dt$ pour tout réel x .

Exercice 21 : Intégrale de Dirichlet régularisée

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$ et que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
3. En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ pour tout $x > 0$.

4. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale sur

$$[0, +\infty[\text{ pour en déduire la valeur de } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 22 : Problème : formule de Gauss pour la fonction Gamma

On fixe $x > 0$ et on note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ (voir l'exercice 17). Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on pose

$$f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{]0, n]}(t).$$

1. Soit $t > 0$. En étudiant $y \mapsto y \ln\left(1 - \frac{t}{y}\right)$ sur $]t, +\infty[$, montrer que $0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$. Montrer aussi que $f_n(t) \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$.

2. En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

3. Montrer que $\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x J_n(x)$, où $J_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$.

4. Montrer que $J_n(x) = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1)$ pour $n \geq 1$, puis que $J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

5. En déduire la **formule de Gauss** : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Vérifier le résultat pour $x = 1$.

6. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ à l'aide de l'exercice 19. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi} 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \sqrt{\pi}.$$

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [intégrale de Lebesgue, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Tribus, mesures et fonctions mesurables](#)
- Chapitre précédent : [Tribus, mesures et fonctions mesurables](#)
- Chapitre suivant : [Mesure produit, Fubini et changement de variables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)