

Intégrale de Lebesgue

Corrigé de l'exercice 1 : Intégrale d'une fonction étagée positive

1. On découpe $\mathbb{R}$ selon les intervalles en jeu. Pour $x \in [0, 1[$ irrationnel, seul le premier terme compte : $f(x) = 2$. Pour $x \in [0, 1[$ rationnel, $f(x) = 2 + 3 = 5$. En $x = 1$, qui est rationnel, les trois termes interviennent : $f(1) = 6$. Ensuite, $f(x) = 3$ sur $]1, 3]$ et $f(x) = 1$ sur $]3, 5]$. Enfin, f est nulle ailleurs. **Écriture canonique :**

$$f = 2 \cdot 1_{[0, 1[\setminus \mathbb{Q}} + 5 \cdot 1_{[0, 1[\cap \mathbb{Q}} + 6 \cdot 1_{\{1\}} + 3 \cdot 1_{]1, 3]} + 1_{]3, 5]}.$$

2. Les ensembles $[0, 1[\cap \mathbb{Q}$ et $\{1\}$ sont dénombrables, donc de mesure nulle. Par conséquent, $\lambda([0, 1[\setminus \mathbb{Q}) = 1$. L'écriture canonique donne

$$\int f \, d\lambda = 2 \times 1 + 5 \times 0 + 6 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 10.$$

Par linéarité, on trouve aussi $2 \times 3 + 1 \times 4 + 3 \times 0 = 10$. **Les deux calculs donnent**

$$\int f \, d\lambda = 10.$$

3. On a $f \cdot 1_{[2, +\infty[} = 3 \cdot 1_{[2, 3]} + 1_{]3, 5]}$. Donc $\int_{[2, +\infty[} f \, d\lambda = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$.

Corrigé de l'exercice 2 : Fonction de Dirichlet et intégrale de Riemann

1. Soit φ une fonction en escalier telle que $\varphi \leq D$, constante égale à c sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ de sa subdivision. Cet intervalle contient un irrationnel x , donc $c \leq D(x) = 0$.

Ainsi $\int_0^1 \varphi \leq 0$. De même, toute fonction en escalier $\psi \geq D$ vaut au moins 1 sur chaque

intervalle ouvert, car ceux-ci contiennent des rationnels. Donc $\int_0^1 \psi \geq 1$. L'écart entre les deux intégrales ne tend jamais vers 0. **La fonction D n'est pas Riemann-intégrable.**

2. La fonction D est l'indicatrice du borélien $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, donc elle est étagée. Or cet ensemble est dénombrable : $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \sum_q \lambda(\{q\}) = 0$. **Donc** $\int_{[0, 1]} D \, d\lambda = 0$.

3. La fonction g coïncide avec $x \rightarrow x$ hors de $\mathbb{Q}$, donc presque partout. Elle est mesurable, car $g = x 1_{[0, 1] \setminus \mathbb{Q}} + x^2 1_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$. De plus, $0 \leq g \leq 1$. Ensuite, deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale. **Ainsi** $g \in \mathcal{L}^1$ et $\int_{[0, 1]} g \, d\lambda = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

4. Posons $x_k = \frac{k}{n}$. Sur $[x_{k-1}, x_k]$, on a $x^2 \leq x$. Par densité des irrationnels, le sup de g vaut x_k . De même, l'inf vaut x_{k-1}^2 , atteint en x_{k-1} , qui est rationnel. D'où

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad L_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Plus généralement, le raisonnement de la question 1 montre que toute fonction en escalier

$\psi \geq g$ vérifie $\int \psi \geq \frac{1}{2}$. De même, toute $\varphi \leq g$ vérifie $\int \varphi \leq \frac{1}{3}$. **Donc g n'est pas Riemann-intégrable, bien qu'elle soit Lebesgue-intégrable.**

Corrigé de l'exercice 3 : Approximation de l'identité par des fonctions étagées

1. Pour $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[$, on a $\lfloor 2^n x \rfloor = k$. Par conséquent,

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{[k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n}[} + 1_{\{1\}}.$$

2. Pour tout réel y , $2 \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur à $2y$, donc $2 \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2y \rfloor$. Avec $y = 2^n x$, on obtient $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$. Ensuite, $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ donne $\varphi_n(x) \leq x < \varphi_n(x) + 2^{-n}$. **Donc** $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ **et** $0 \leq f - \varphi_n \leq 2^{-n}$.

3. Le point $\{1\}$ est de mesure nulle. Ainsi

$$\int \varphi_n d\lambda = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{(2^n-1) 2^n}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

On trouve $\int \varphi_n d\lambda = \frac{1-2^{-n}}{2}.$

4. La suite (φ_n) est croissante, positive, et converge simplement vers f . Le théorème de convergence monotone donne donc $\int f d\lambda = \lim \int \varphi_n$. **Ainsi** $\int_{[0,1]} x d\lambda(x) = \frac{1}{2}.$

Corrigé de l'exercice 4 : Une limite par convergence monotone

1. Si $x = 0$, la suite est constante. Soit $x > 0$ et $g(y) = y \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$. En posant $u = \frac{x}{y}$, on obtient

$$g'(y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) - \frac{x/y}{1 + x/y} = \ln(1 + u) - \frac{u}{1 + u}.$$

Posons $h(u) = \ln(1 + u) - \frac{u}{1+u}$. Alors $h(0) = 0$ et

$h'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2} = \frac{u}{(1+u)^2} \geq 0$. Donc $h \geq 0$, et g est croissante. Par conséquent, $n \rightarrow e^{g(n)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est croissante. **La suite est croissante.**

2. L'inégalité de concavité $\ln(1 + u) \leq u$ donne $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$. **Donc** $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

3. On pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} 1_{[0, n]}(x)$ sur $[0, +\infty[$. Ces fonctions sont continues par

morceaux, donc mesurables, et positives. De plus, $1_{[0, n]} \leq 1_{[0, n+1]}$, et la question 1 montre que (f_n) est croissante. Enfin, $f_n(x) \rightarrow e^x e^{-2x} = e^{-x}$. Le théorème de convergence monotone donne

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

Point de méthode : la question 2 fournit aussi la domination $f_n \leq e^{-x}$. La convergence dominée marche donc également, mais la monotonie évite de chercher une fonction dominante.

Corrigé de l'exercice 5 : Série de fonctions positives et zêta de 2

1. Pour $x > 0$, on a $0 < e^{-x} < 1$. La série géométrique donne

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx}.$$

Chaque terme $x e^{-nx}$ est positif et continu sur $]0, +\infty[$.

2. Pour des fonctions mesurables positives, le corollaire du théorème de convergence monotone permet d'intervertir somme et intégrale sans autre condition. Ensuite, une intégration par parties

donne $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2}$. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

3. De même, $\frac{x^2}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} x^2 e^{-nx}$, avec des termes positifs. Avec le changement de variable $u = nx$, on obtient $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \frac{\Gamma(3)}{n^3} = \frac{2}{n^3}$.
- Donc** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \approx 2,404$.

Corrigé de l'exercice 6 : Le rêve du bachelier

1. Le changement de variable $x = e^{-u}$ est une bijection C^1 décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, avec $dx = -e^{-u} du$. Les fonctions sont positives, ce qui justifie le calcul dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^n e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u} du.$$

Ensuite, on pose $v = (n+1)u$: l'intégrale vaut $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} v^n e^{-v} dv$. **Donc**

$$\int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

2. Pour $x \in]0, 1[$, on a $x^{-x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$. Or $-x \ln x \geq 0$ sur $]0, 1[$, donc tous les termes sont positifs. D'après le corollaire de Beppo Levi, on intègre terme à terme :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Avec $k = n + 1$, on obtient $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k \geq 1} k^{-k}$.

3. Pour $k \geq 6$, on a $k^{-k} \leq 6^{-k}$. Donc le reste vérifie

$$R_5 = \sum_{k \geq 6} k^{-k} \leq \frac{6^{-6}}{1 - 1/6} \approx 2,6 \times 10^{-5}. \text{ Ensuite,}$$

$S_5 = 1 + 0,25 + 0,037037 + 0,003906 + 0,00032 = 1,291263$. La valeur exacte est donc comprise entre $1,291263$ et $1,291289$. **L'intégrale vaut environ $1,2913$ à 10^{-4} près.**

Corrigé de l'exercice 7 : Cas d'inégalité stricte dans le lemme de Fatou

1. Soit $x \in]0, 1]$. Dès que $n > \frac{1}{x}$, on a $x \notin]0, 1/n]$, donc $f_n(x) = 0$. En 0, $f_n(0) = 0$. Ainsi $\liminf f_n = 0$. Par ailleurs, $\int f_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. **On obtient $0 < 1$: l'inégalité de Fatou est stricte.**

2. Pour x fixé, $f_n(x) = 0$ dès que $n > x$. Donc $\liminf f_n = 0$, alors que $\int f_n = 1$. **Ici encore $0 < 1$.**

3. Si $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ vaut alternativement 1 et 0. Il en est de même si $x \in]1, 2]$. Donc $\liminf f_n = 0$ sur $[0, 2]$, tandis que $\int f_n = 1$ pour tout n .

Même conclusion : $\int \liminf f_n = 0 < 1 = \liminf \int f_n$. Ici, la limite simple n'existe même pas.

4. Pour x fixé, $k_n(x) = 0$ dès que $n > x$, donc $\liminf k_n = 0$ et $\int \liminf k_n = 0$. Or $\int k_n = -1$ pour tout n . L'inégalité $0 \leq -1$ est fausse. **Le lemme de Fatou échoue, car l'hypothèse de positivité des k_n manque.**

Corrigé de l'exercice 8 : Une suite sans domination intégrable

1. On a $f_n(0) = 0$. Pour $x > 0$, les croissances comparées donnent $n^2 e^{-nx} \rightarrow 0$. **La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.**

2. Avec $u = nx$, puis une intégration par parties :

$$\int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = \int_0^n u e^{-u} du = \left[-(u+1) e^{-u} \right]_0^n = 1 - (n+1) e^{-n}.$$

Donc $\int_0^1 f_n \rightarrow 1$.

3. Le lemme de Fatou donne ici $\int \liminf f_n = 0 \leq 1 = \liminf \int f_n$: l'inégalité est stricte. En revanche, si le théorème de convergence dominée s'appliquait, la limite des intégrales vaudrait $\int 0 = 0$. **Donc aucune fonction intégrable ne domine la suite (f_n) .**

4. Soit $x \in]0, 1]$ et $k = \lfloor 1/x \rfloor \geq 1$. Alors $k \leq \frac{1}{x} < k+1$, donc $kx \leq 1$ et $x > \frac{1}{k+1}$. Par conséquent,

$$f_k(x) = k^2 x e^{-kx} \geq \frac{k^2}{k+1} e^{-1} \geq \frac{k}{2e},$$

car $k+1 \leq 2k$. Enfin, $k > \frac{1}{x} - 1$. **Ainsi** $\sup_n f_n(x) \geq \frac{1}{2e} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$, qui n'est pas intégrable au voisinage de 0. La meilleure majoration possible, $\sup_n f_n$, n'est donc pas intégrable. On retrouve le résultat de la question 3.

Corrigé de l'exercice 9 : Convergence dominée avec un sinus

1. On pose $f_n(x) = \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)}$ sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est continue, donc mesurable. De plus, l'inégalité $|\sin u| \leq |u|$ donne

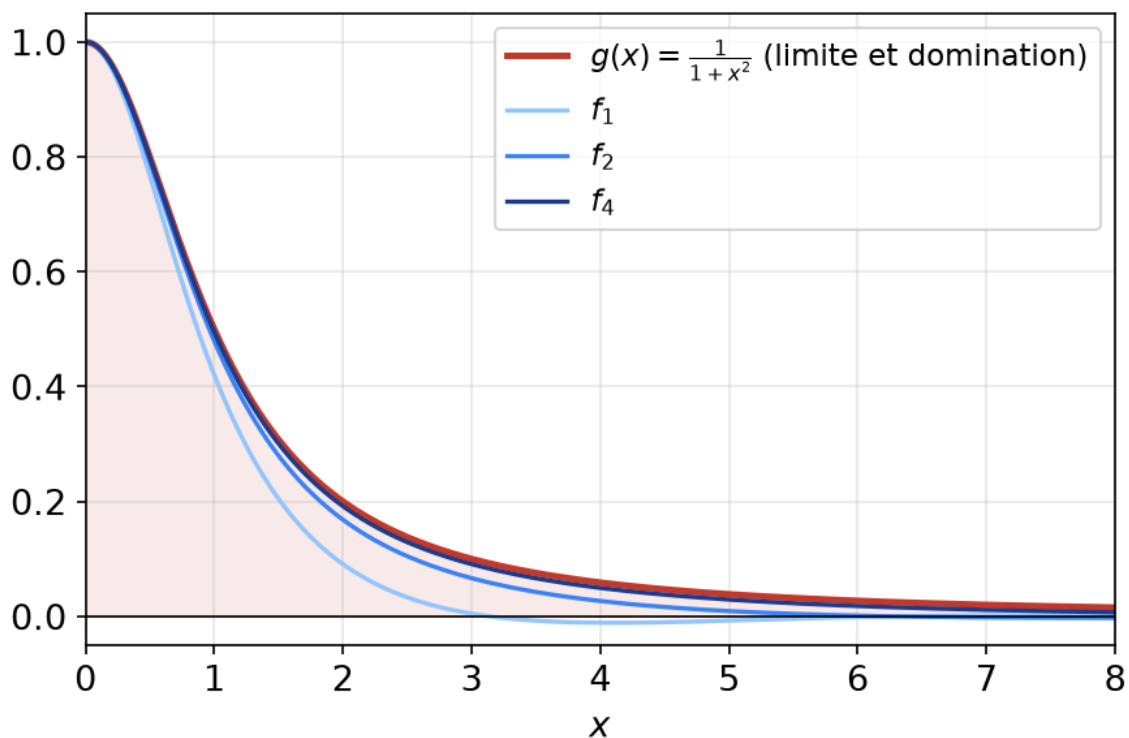
$$|f_n(x)| \leq \frac{n \cdot x/n}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'intégrale $\frac{\pi}{2}$. **Donc f_n est intégrable et I_n est bien définie.**

2. Pour $x > 0$ fixé, $\sin(x/n) \sim x/n$, donc $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$. La majoration de la question 1 est indépendante de n . Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

La limite vaut $\frac{\pi}{2}$. Comme le montre la figure ci-dessous, les f_n restent toutes sous la fonction dominante, qui est aussi leur limite.



3. La fonction $h_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{1+x^2}$ est continue et vérifie $|h_n(x)| \leq \frac{\pi/2}{1+x^2}$, intégrable. Pour $x > 0$, $\arctan(nx) \rightarrow \frac{\pi}{2}$; en 0, la suite est nulle, mais $\{0\}$ est négligeable. Par convergence dominée, **la limite vaut $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Limite de l'intégrale de $1/(1+x^n)$

1. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^n}$ est continue et positive. Elle est majorée par 1 sur $[0, 1]$ et par $\frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$, puisque $n \geq 2$. **Donc I_n et J_n sont finies.**
2. Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. Si $0 \leq x < 1$, $x^n \rightarrow 0$, donc $f_n(x) \rightarrow 1$. Si $x > 1$, $f_n(x) \rightarrow 0$. Le point $x = 1$ est négligeable. Ensuite, pour tout $n \geq 2$, on a la domination $0 \leq f_n \leq g$, avec $g = 1_{[0, 1]} + \frac{1}{x^2} 1_{]1, +\infty[}$, intégrable. Par convergence dominée, $I_n \rightarrow \int_0^1 1 \, dx$. **Ainsi $\lim I_n = 1$.**
3. Le changement de variable $x = u^{1/n}$, avec $dx = \frac{1}{n} u^{1/n-1} du$, donne

$$n J_n = \int_1^{+\infty} \frac{u^{1/n-1}}{1+u} du.$$

Pour $u \geq 1$ et $n \geq 2$, on a $u^{1/n-1} \leq u^{-1/2}$. Or $\frac{u^{-1/2}}{1+u} \leq u^{-3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, $u^{1/n-1} \rightarrow u^{-1}$. Par convergence dominée,

$$n J_n \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)} = \left[\ln \frac{u}{1+u} \right]_1^{+\infty} = 0 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

Donc $J_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Concentration de la masse au bord

1. Pour $x \in [0, 1[$, $n x^{n-1} \rightarrow 0$ par croissances comparées. **La limite simple est nulle sur $[0, 1[$, alors que $f_n(1) = \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$.**

2. On intègre par parties avec $u(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v(x) = x^n$, toutes deux de classe C^1 sur $[0, 1]$:

$$I_n = \left[\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx.$$

La formule est démontrée.

3. La suite $\frac{x^n}{(1+x)^2}$ tend vers 0 sur $[0, 1[$ et elle est majorée par 1, intégrable sur $[0, 1]$. Par convergence dominée, l'intégrale tend vers 0. **Donc** $\lim I_n = \frac{1}{2}$.
4. Supposons qu'une telle g existe. Alors la convergence dominée s'appliquerait à (f_n) , qui tend vers 0 presque partout. On aurait $I_n \rightarrow 0$, ce qui contredit la question 3. **Aucune domination intégrable n'est possible.**

Point de méthode : quand la masse se concentre en un point, la convergence dominée échoue. Une intégration par parties transfère alors la concentration dans un terme de bord explicite.

Corrigé de l'exercice 12 : Intégration terme à terme de séries alternées

1. On sépare les termes pairs : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$. Ces séries convergent absolument, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12}.$$

La somme vaut $\frac{\pi^2}{12}$.

2. Pour $x \in]0, 1[$, on a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$, avec $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n}$. Les

termes changent de signe : on utilise donc le théorème d'intégration terme à terme de la partie V. Les u_n sont continues et

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |u_n(x)| dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

L'hypothèse est donc vérifiée, et $\int_0^1 u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **D'après la question 1,**

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. On a $\sin(x) e^{-nx} = \text{Im}(e^{(i-n)x})$, et $|e^{(i-n)x}| = e^{-nx}$ est intégrable. Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{(i-n)x} dx = \frac{1}{n-i} = \frac{n+i}{n^2+1}.$$

En prenant la partie imaginaire, $\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2+1}.$

4. Pour $x > 0$, $\frac{\sin x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} \sin(x) e^{-nx}$. Ensuite, $|\sin x| \leq x$ donne

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x)| e^{-nx} dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2},$$

terme général d'une série convergente. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique. **Avec**

la question 3, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1} \approx 1,0767.$

Corrigé de l'exercice 13 : Intégrale de sin x / x et espace L¹

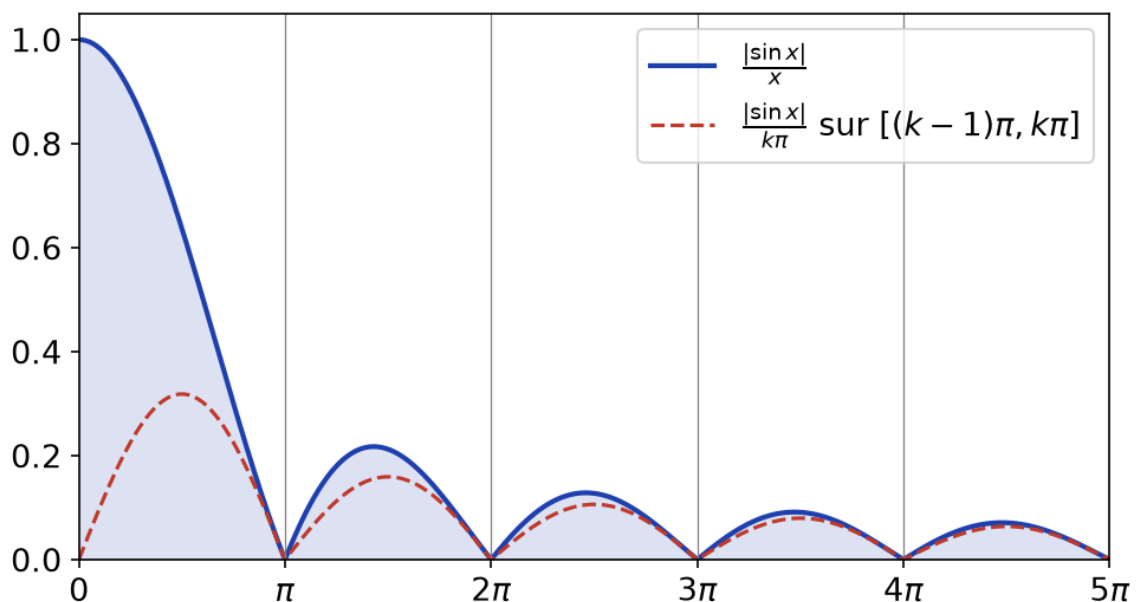
1. La fonction f se prolonge par continuité en 0 par $f(0) = 1$. Il suffit donc d'étudier $\int_1^{+\infty}$.

Pour $X > 1$, une intégration par parties donne

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Le crochet tend vers $\cos 1$. De plus, $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc la dernière intégrale converge absolument. **L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.**

2. Sur $[(k-1)\pi, k\pi]$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k\pi}$. Or $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = 2$. Donc chaque arche contribue au moins $\frac{2}{k\pi}$. En sommant sur k , $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. La figure ci-dessous représente ces arches et leurs minorants en pointillés.



3. La fonction $|f|$ est positive. D'après la partie VI du cours, son intégrale de Lebesgue est la limite de $\int_0^{n\pi} |f|$. Or la série harmonique diverge. **Donc $\int |f| d\lambda = +\infty$ et**

$$f \notin \mathcal{L}^1(]0, +\infty[).$$

4. On a $f^+ + f^- = |f|$ et $f^+ - f^- = f$. Pour $X > 0$, notons $A(X) = \int_0^X f^+$ et $B(X) = \int_0^X f^-$. La question 1 montre que $A(X) - B(X)$ a une limite finie. En revanche, $A(X) + B(X) \rightarrow +\infty$ d'après la question 3. Par conséquent, $A(X)$ et $B(X)$ tendent toutes deux vers $+\infty$. Par convergence monotone, $\int f^+ d\lambda = \int f^- d\lambda = +\infty$. La différence $\int f^+ - \int f^-$ est de la forme $\infty - \infty$, donc l'intégrale de Lebesgue de f n'est pas définie.

Corrigé de l'exercice 14 : Continuité absolue de l'intégrale

1. Les fonctions g_n sont mesurables, positives, et croissent vers $|f|$. Par convergence monotone, $\int g_n \rightarrow \int |f|$. Comme $\int |f| < +\infty$, on peut soustraire. **Donc**
- $$\int (|f| - g_n) d\lambda = \int |f| - \int g_n \rightarrow 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 1, il existe $N \geq 1$ tel que $\int (|f| - g_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. Si $\lambda(A) < \delta$, alors

$$\int_A |f| = \int_A (|f| - g_N) + \int_A g_N \leq \int (|f| - g_N) + N \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi $\int_A |f| d\lambda < \varepsilon.$

3. Soit $x < y$. Dans tous les cas de signe, on a $F(y) - F(x) = \int_{[x, y]} f d\lambda$, d'où

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_{[x, y]} |f|. \text{ Si } y - x < \delta, \text{ la question 2 donne } |F(y) - F(x)| < \varepsilon. \text{ Or } \delta$$

ne dépend ni de x ni de y . **Donc F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

4. Pour tout $\delta \in]0, 1]$, l'ensemble $A =]0, \delta[$ vérifie $\lambda(A) = \delta$. Pourtant $\int_A \frac{dx}{x} = +\infty$.
- La conclusion tombe en défaut, car $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.**

Point de méthode : tronquer $|f|$ en $\min(|f|, n)$ ramène un problème sur une fonction intégrable à un problème sur une fonction bornée. La convergence monotone contrôle l'erreur.

Corrigé de l'exercice 15 : Lemme de Scheffé

1. Si $f \geq f_n$, alors $(f - f_n)^+ = f - f_n \leq f$, car $f_n \geq 0$. Sinon, $(f - f_n)^+ = 0 \leq f$. De plus, $a \rightarrow a^+$ est continue, et $f - f_n \rightarrow 0$ presque partout. **Donc $0 \leq (f - f_n)^+ \leq f$ et $(f - f_n)^+ \rightarrow 0$ presque partout.**

2. La fonction f est intégrable et ne dépend pas de n : c'est une fonction dominante. **Par convergence dominée, $\int (f - f_n)^+ d\mu \rightarrow 0$.**

3. Si $a \geq 0$, $2a^+ - a = a = |a|$. Si $a < 0$, $2a^+ - a = -a = |a|$. Avec $a = f - f_n$, on obtient

$$\int |f_n - f| d\mu = 2 \int (f - f_n)^+ d\mu - \int f d\mu + \int f_n d\mu.$$

Le premier terme tend vers 0 et la différence des deux autres aussi, par hypothèse. **Donc**

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

4. Sur $\mathbb{R}$, prenons $f_n = 1_{[0, 1]} + 1_{[n, n+1]}$ et $f = 1_{[0, 1]}$. On a $f_n \rightarrow f$ partout. Cependant, $\int f_n = 2$ ne tend pas vers $\int f = 1$. **Et $\int |f_n - f| = 1$ ne tend pas vers 0 : l'hypothèse est indispensable.**

5. Pour $x \in]0, 1]$, $x^{1/n} = e^{(\ln x)/n} \rightarrow 1$, donc $f_n(x) \rightarrow 1$. Ensuite,

$$\int_0^1 f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{1 + 1/n} = 1 = \int_0^1 1. \text{ Les } f_n \text{ sont positives et intégrables. Le lemme}$$

de Scheffé donne $\int_0^1 |f_n(x) - 1| dx \rightarrow 0$.

Corrigé de l'exercice 16 : Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

- Posons $h(\xi, x) = f(x) e^{-ix\xi}$. Pour tout ξ , $x \rightarrow h(\xi, x)$ est mesurable et $|h(\xi, x)| = |f(x)|$. Donc $\widehat{f}(\xi)$ est définie et $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$. Ensuite, pour tout x , $\xi \rightarrow h(\xi, x)$ est continue, et la domination $|h| \leq |f|$ ne dépend pas de ξ . **Le théorème de continuité sous l'intégrale montre que $\widehat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.**
- Pour tout x , $\xi \rightarrow h(\xi, x)$ est dérivable, et $\frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x) = -ix f(x) e^{-ix\xi}$. Or $\left| \frac{\partial h}{\partial \xi} \right| = |x f(x)|$, intégrable et indépendant de ξ . Le théorème de dérivation s'applique. La continuité de la dérivée découle ensuite de la question 1 appliquée à $x f(x)$. **Donc $\widehat{f}$ est C^1 et $\widehat{f}'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-ix\xi} dx$.**
- Pour $f = 1_{[-1,1]}$ et $\xi \neq 0$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = \frac{2 \sin \xi}{\xi},$$

et $\widehat{f}(0) = 2$. Pour $f(x) = e^{-|x|}$, on découpe en deux :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1-i\xi)x} dx = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi}.$$

On obtient $\widehat{1_{[-1,1]}}(\xi) = \frac{2 \sin \xi}{\xi}$ et $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$.

- La fonction $x e^{-|x|}$ est intégrable et impaire, donc $\widehat{f}'(0) = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-|x|} dx = 0$.

D'autre part, la dérivée de $\frac{2}{1+\xi^2}$ vaut $\frac{-4\xi}{(1+\xi^2)^2}$, nulle en 0 . **Les deux calculs concordent.**

Corrigé de l'exercice 17 : Régularité de la fonction Gamma

1. La fonction $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0 , elle est équivalente à t^{x-1} , intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$. Au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$, donc toujours intégrable. **Elle est intégrable si et seulement si $x > 0$.**

2. Posons $h(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$. Pour t fixé, h est C^∞ en x , avec $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$. Fixons $0 < a < b$. Pour $x \in [a, b]$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ si $t \leq 1$, et $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ si $t \geq 1$. D'où

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq g_k(t) = |\ln t|^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}.$$

En 0 , $|\ln t|^k t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$, intégrable car $a/2 > 0$. En $+\infty$, $g_k(t) = o(1/t^2)$. Donc g_k est intégrable. Le théorème de dérivation, appliqué k fois sur chaque $[a, b]$, donne le résultat. **Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et**

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

3. Pour $0 < \varepsilon < A$, on intègre par parties :

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^A + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Le crochet tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $A \rightarrow +\infty$, car $x > 0$. Donc

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x). \text{ Enfin, } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1, \text{ et une récurrence donne la suite.}$$

Ainsi $\Gamma(n+1) = n!$.

4. On a $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$, car l'intégrande est positive et non nulle presque partout. Donc Γ est convexe. Ensuite, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, et Γ est continue en 1 avec $\Gamma(1) = 1$. **Par conséquent**, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Point de méthode : sur un intervalle ouvert, on ne cherche pas une domination globale. On domine sur chaque segment $[a, b]$, puis on conclut car la dérivabilité est une propriété locale.

Corrigé de l'exercice 18 : Une équation différentielle vérifiée par une intégrale

1. Posons $h(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Pour tout t , $x \rightarrow h(x, t)$ est continue. De plus, $0 \leq h(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, intégrable et indépendant de x . Le théorème de continuité s'applique. **F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, et**

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Pour $x > 0$, on a $0 \leq h(x, t) \leq e^{-xt}$, d'où $0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. **Par encadrement**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. Pour $k \in \{1, 2\}$, on a $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = \frac{(-t)^k e^{-xt}}{1+t^2}$. Fixons $a > 0$. Pour $x \geq a$,

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2} \leq t^k e^{-at},$$

qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de dérivation s'applique deux fois sur $[a, +\infty[$,

pour tout $a > 0$. Donc F est C^2 sur $]0, +\infty[$, avec $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Par

linéarité,

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1) e^{-xt}}{1 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt.$$

Ainsi $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

4. On a $-F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1 + t^2} dt$. Soit (x_n) une suite décroissante vers 0 . Les fonctions $t \mapsto \frac{t e^{-x_n t}}{1 + t^2}$ sont positives et croissent vers $\frac{t}{1 + t^2}$, qui n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, car elle est équivalente à $\frac{1}{t}$. Par convergence monotone, $-F'(x_n) \rightarrow +\infty$. Ensuite, pour $x > 0$, le théorème des accroissements finis donne $c_x \in]0, x[$ tel que $\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c_x)$, grâce à la continuité de F en 0 . Ce quotient tend donc vers $-\infty$. Ainsi $F'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, et F n'est pas dérivable à droite en 0 .

Corrigé de l'exercice 19 : Intégrale de Gauss par une intégrale à paramètre

1. Posons $h(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Cette fonction est continue, et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$. Fixons $A > 0$. Pour $|x| \leq A$, on a $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2A$, constante intégrable sur $[0, 1]$. Le théorème de dérivation s'applique sur $[-A, A]$ pour tout A . La continuité de F' découle de la même domination. **F est C^1 et**

$$F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

2. On a $F'(x) = -2 e^{-x^2} \int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt$. Pour $x \neq 0$, le changement de variable $u = xt$ donne $\int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} du$. Cette égalité reste vraie pour $x = 0$.

Par ailleurs, $G'(x) = 2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$. Donc $F' + G' = 0$ sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction $F + G$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $G(0) = 0$ et

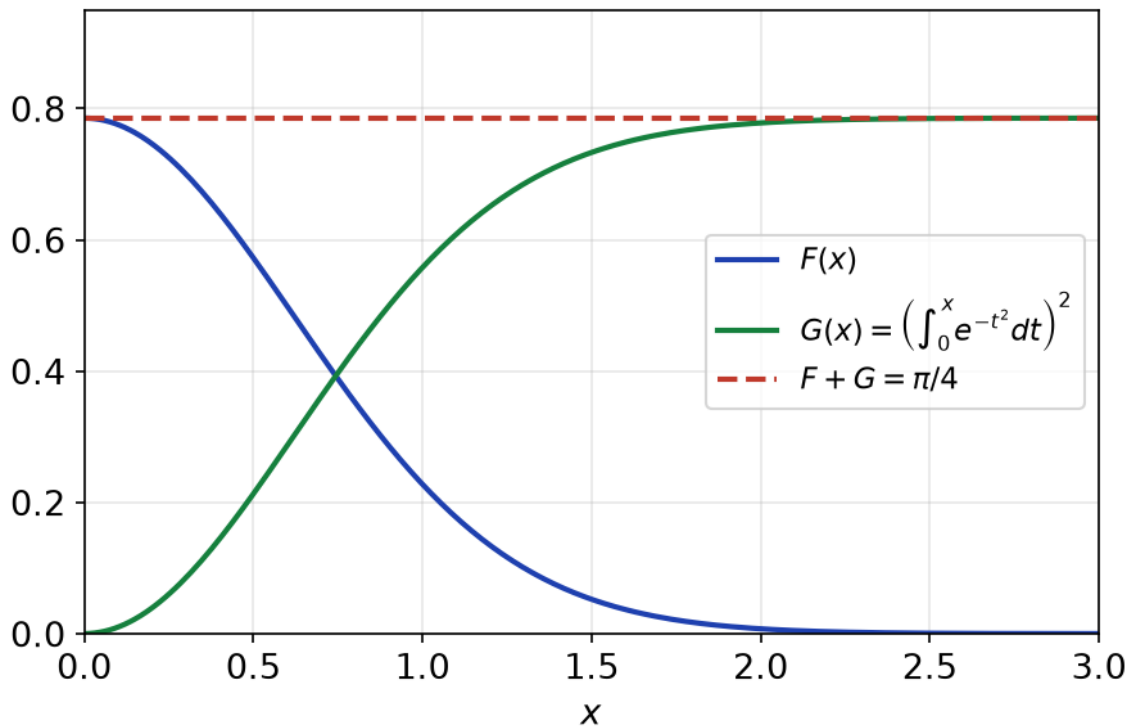
$$F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1. \text{ Ainsi } F + G = \frac{\pi}{4}.$$

4. Pour $t \in [0, 1]$, on a $e^{-x^2}(1+t^2) \leq e^{-x^2}$. Donc

$$0 \leq F(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}. \text{ Par conséquent, } F(x) \rightarrow 0, \text{ puis } G(x) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

quand $x \rightarrow +\infty$. Enfin, la fonction e^{-t^2} est positive : par convergence monotone,

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{G(x)}$. On obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. La figure ci-dessous montre F qui décroît, G qui croît, et leur somme constante.



Corrigé de l'exercice 20 : Transformée de Fourier de la gaussienne

1. Posons $h(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$. Pour tout t , h est C^1 en x , avec

$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$. On a les dominations $|h| \leq e^{-t^2}$ et $\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| \leq t e^{-t^2}$, intégrables sur $[0, +\infty[$ et indépendantes de x . **Le théorème de dérivation montre que**

$$F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ avec } F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

2. On intègre par parties avec $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = \frac{1}{2} e^{-t^2}$, de sorte que $v'(t) = -t e^{-t^2}$. Le crochet $\left[\frac{1}{2} \sin(xt) e^{-t^2} \right]_0^{+\infty}$ est nul. Donc

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) v'(t) dt = -\int_0^{+\infty} x \cos(xt) \cdot \frac{1}{2} e^{-t^2} dt.$$

Ainsi $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$.

3. Posons $\Phi(x) = F(x) e^{x^2/4}$. Alors $\Phi'(x) = \left(F'(x) + \frac{x}{2} F(x) \right) e^{x^2/4} = 0$. Donc Φ est constante, égale à $\Phi(0) = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **Par conséquent,** $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

4. On a $e^{-ixt} = \cos(xt) - i \sin(xt)$. La fonction $t \rightarrow e^{-t^2} \sin(xt)$ est intégrable et impaire, donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle. De plus, $t \rightarrow e^{-t^2} \cos(xt)$ est paire. **Donc**
- $$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-ixt} dt = 2F(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}.$$

Corrigé de l'exercice 21 : Intégrale de Dirichlet régularisée

1. On prolonge $\frac{\sin t}{t}$ par 1 en 0. L'inégalité $|\sin t| \leq t$ donne $\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}$, intégrable sur $[0, +\infty[$ pour $x > 0$. **Donc $F(x)$ est définie et**

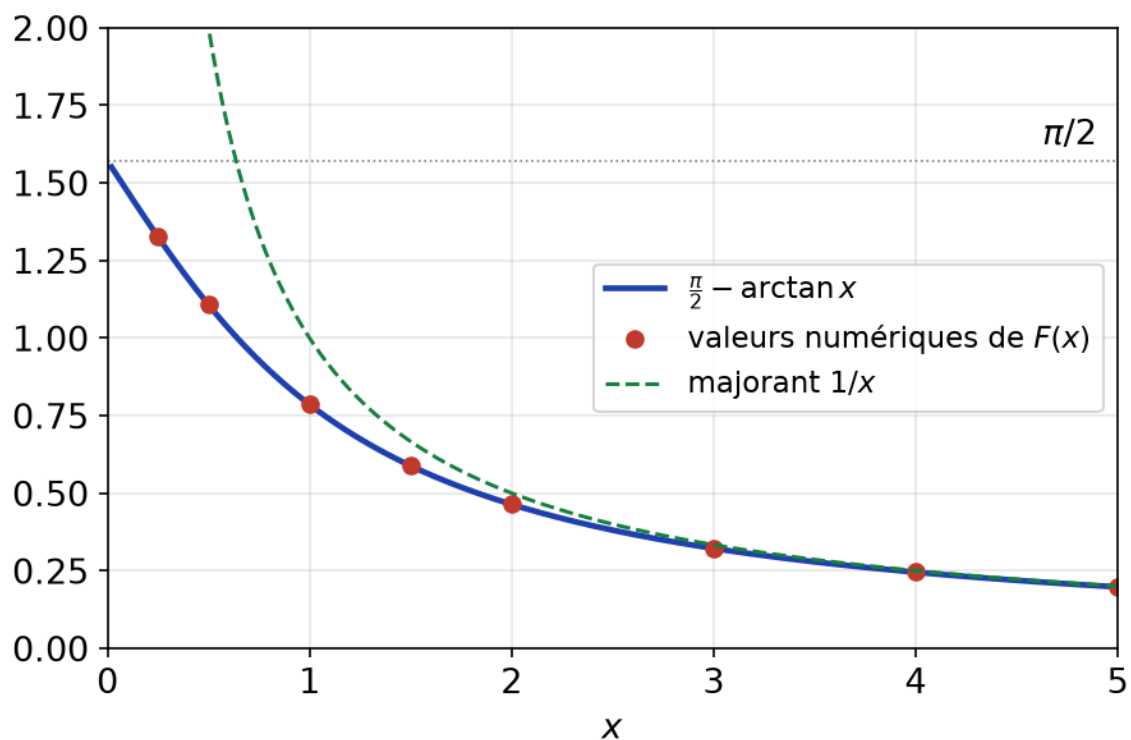
$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

2. Posons $h(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$. Alors $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$, continue en x . Fixons $a > 0$. Pour $x \geq a$, on a $\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| \leq e^{-at}$, intégrable. Le théorème de dérivation s'applique sur $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$. Ensuite, comme dans l'exercice 12,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} \, dt = \operatorname{Im} \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc F **est** C^1 **et** $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

3. La fonction $F + \arctan$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle est donc constante, égale à C . Quand $x \rightarrow +\infty$, $F(x) \rightarrow 0$ d'après la question 1, et $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Donc $C = \frac{\pi}{2}$. **Ainsi** $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ **pour tout** $x > 0$. La figure ci-dessous confronte cette formule à des valeurs numériques de F et au majorant $\frac{1}{x}$.



4. Pour appliquer le théorème de continuité sur $[0, +\infty[$, il faudrait une fonction g intégrable telle que $e^{-xt} \frac{|\sin t|}{t} \leq g(t)$ pour tout $x \geq 0$. En prenant $x = 0$, on aurait $\frac{|\sin t|}{t} \leq g(t)$. Or l'exercice 13 montre que $\frac{|\sin t|}{t}$ n'est pas intégrable. **Aucune domination n'est donc possible.** D'ailleurs, $t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$ n'est même pas dans $\mathcal{L}^1$: $F(0)$ n'a de sens que comme intégrale impropre. Un argument supplémentaire, par intégration par parties, montre que cette intégrale impropre vaut bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : formule de Gauss pour la fonction Gamma

1. Soit $t > 0$. Si $t > n$, alors $f_n(t) = 0 \leq f_{n+1}(t)$. Si $t = n$, alors $f_n(t) = 0$ aussi. Supposons enfin $t < n$. Posons $g(y) = y \ln\left(1 - \frac{t}{y}\right)$ pour $y > t$, et $u = \frac{t}{y} \in]0, 1[$. Alors

$$g'(y) = \ln(1 - u) + \frac{u}{1 - u}.$$

La fonction $k(u) = \ln(1 - u) + \frac{u}{1 - u}$ vérifie $k(0) = 0$ et

$$k'(u) = -\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{(1 - u)^2} = \frac{u}{(1 - u)^2} \geq 0. \text{ Donc } g \text{ est croissante, et}$$

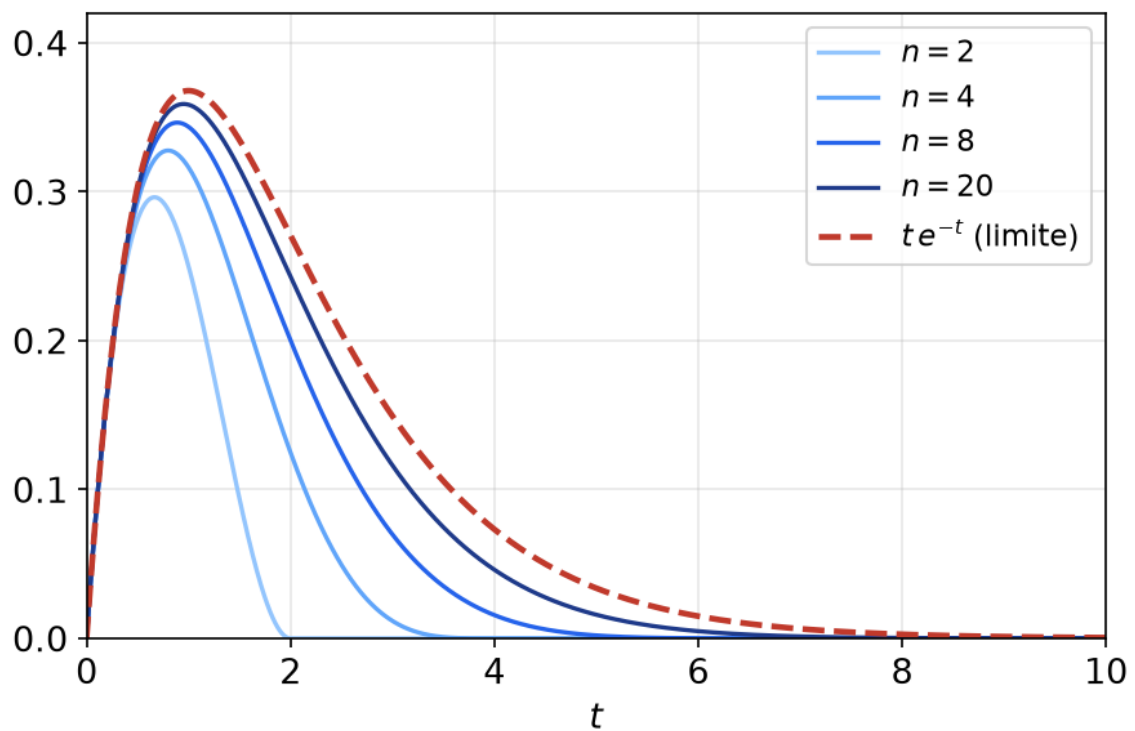
$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{g(n)} \leq e^{g(n+1)}. \text{ En multipliant par } t^{x-1} > 0, \text{ on obtient}$$

$$0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t). \text{ Enfin, pour } t \text{ fixé et } n > t, \quad n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \rightarrow -t. \text{ Donc } (f_n) \text{ est croissante, positive, et } f_n(t) \rightarrow t^{x-1} e^{-t}.$$

2. Les f_n sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$, donc mesurables. La question 1 permet d'appliquer le théorème de convergence monotone :

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Ainsi $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. La figure ci-dessous illustre cette convergence croissante pour $x = 2$.



3. Le changement de variable $t = nu$, avec $dt = n du$, donne

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 n^{x-1} u^{x-1} (1-u)^n n du.$$

On obtient bien $n^x J_n(x)$.

4. Soit $n \geq 1$. On intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$ avec $v(u) = \frac{u^x}{x}$ et $w(u) = (1-u)^n$, puis on fait tendre ε vers 0. Le crochet $\left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1$ est nul, car $x > 0$ et $n \geq 1$. Donc

$$J_n(x) = \frac{n}{x} \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} du = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1).$$

Ensuite, $J_0(y) = \int_0^1 u^{y-1} du = \frac{1}{y}$. En itérant n fois la relation,

$$J_n(x) = \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x+1} \cdots \frac{1}{x+n-1} J_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \cdot \frac{1}{x+n}.$$

Ainsi $J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$

5. Les questions 2, 3 et 4 donnent directement

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x J_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Pour $x = 1$, le quotient vaut $\frac{n \cdot n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. **On retrouve $\Gamma(1) = 1$: la formule de Gauss est démontrée et vérifiée.**

6. Le changement de variable $t = s^2$, avec $dt = 2s ds$, donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds. \text{ D'après l'exercice 19, } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ensuite, pour $x = \frac{1}{2}$,

$$x(x+1)\dots(x+n) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{2^{n+1} \cdot 2^n n!}.$$

En effet, $1 \cdot 3 \dots (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4 \dots 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. La formule de Gauss devient

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} n! 2^{2n+1} n!}{(2n+1)!}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \sqrt{\pi}$. Numériquement, pour $n = 200$, on trouve environ 1,769, contre $\sqrt{\pi} \approx 1,772$.

Point de méthode : pour une intégrale sur $[0, n]$, on écrit l'intégrande avec l'indicatrice $1]0, n]$. La question devient alors une interversion limite-intégrale sur un domaine fixe.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [intégrale de Lebesgue, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur intégrale de Lebesgue](#)
- À maîtriser avant : [Tribus, mesures et fonctions mesurables](#)
- Chapitre précédent : [Tribus, mesures et fonctions mesurables](#)
- Chapitre suivant : [Mesure produit, Fubini et changement de variables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)