

Hyperplans et sous-espaces affines

Exercice 1 : Reconnaître des formes linéaires

Dire, en justifiant, si chacune des applications suivantes est une forme linéaire sur l'espace indiqué.

1. $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow 2x - y + 3z$.
2. $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow xy$.
3. $\varphi_3 : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \rightarrow P(1) + P'(0)$.
4. $\varphi_4 : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \int_0^1 t f(t) dt$.
5. $\varphi_5 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \rightarrow \text{tr}(M)$.
6. $\varphi_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y + 1$.

Exercice 2 : Formes coordonnées d'une base de l'espace

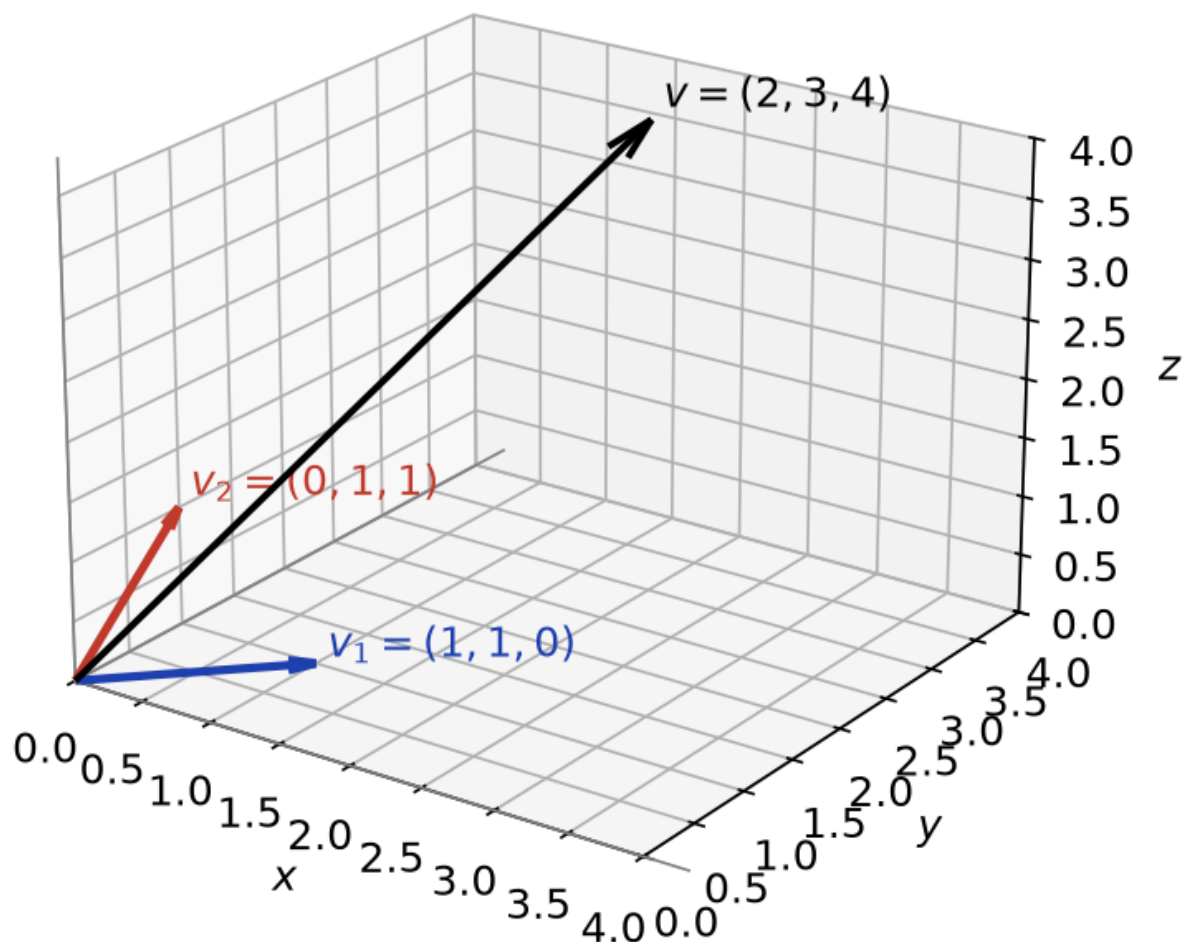
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les formes coordonnées e_1^*, e_2^*, e_3^* relatives à $\mathcal{B}$.

3. Écrire la forme $\varphi : (x, y, z) \rightarrow x + 2y + 3z$ comme combinaison linéaire de e_1^*, e_2^*, e_3^* .
4. Donner une équation, dans les coordonnées relatives à $\mathcal{B}$, de l'hyperplan $\ker \varphi$.

Exercice 3 : Équation d'un plan vectoriel

On pose $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $H = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $u = (1, 0, 0)$. La figure ci-dessous représente les vecteurs v_1 , v_2 et $v = (2, 3, 4)$.



1. Justifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et en donner une équation.

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}u$.
3. Décomposer $v = (2, 3, 4)$ sous la forme $h + \lambda u$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Plus généralement, donner l'expression de la projection sur H parallèlement à $\mathbb{R}u$.

Exercice 4 : Base d'un hyperplan de dimension trois

Soit $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

1. Justifier que H est un hyperplan et préciser sa dimension.
2. Déterminer une base de H .
3. Donner une droite supplémentaire de H et la décomposition de $x = (1, 1, 1, 1)$ selon cette somme directe.

Exercice 5 : Translations et sous-espaces affines

Soit E un espace vectoriel. Pour $u \in E$, on note $t_u : x \rightarrow x + u$.

1. Montrer que $t_u \circ t_v = t_{u+v}$ et en déduire que t_u est bijective.
2. Montrer que t_u est linéaire si et seulement si $u = 0$.
3. Soit $\mathcal{A} = a + F$ un sous-espace affine. Montrer que $t_u(\mathcal{A})$ est un sous-espace affine de même direction.
4. Montrer que $t_u(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ si et seulement si $u \in F$.

Exercice 6 : Reconnaître des sous-espaces affines

Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-espaces affines. Le cas échéant, donner un point et la direction.

1. $\mathcal{A} = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$.
2. $\mathcal{B} = \{(x, y, z) : x^2 + y = 0\}$.
3. $\mathcal{C} = \{(1 + t, 2 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : x + y = 0, \text{ et } x - y = 3\}$.

Exercice 7 : Deux équations d'un même hyperplan

1. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer les réels a et b pour lesquels les plans $H_1 : x + 2y - z = 0$ et $H_2 : 3x + ay + bz = 0$ sont égaux.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = P(1)$ et $\psi(P) = P(0) + P'(0) + \frac{1}{2}P''(0)$. Montrer que $\ker \varphi = \ker \psi$ sans calculer ces noyaux.
3. Soient φ, ψ deux formes linéaires sur E telles que $\ker \varphi \subset \ker \psi$, avec $\varphi \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.

Exercice 8 : Hyperplans de polynômes

On travaille dans $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E : \int_0^1 P(t) dt = 0\}$.

1. Montrer que H et G sont des hyperplans de E .

2. Écrire l'équation de H dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$, puis dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$.
3. Montrer que $H \neq G$ et en déduire $\dim(H \cap G)$.
4. Déterminer une base de $H \cap G$.

Exercice 9 : Système d'équations d'un sous-espace

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1))$ et

$$G = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ , \text{et} \\ , x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

1. Déterminer un système de deux équations cartésiennes de F .
2. Déterminer une base de G et sa dimension.
3. Déterminer $F \cap G$. Que peut-on dire de F et G ?

Exercice 10 : Rang d'une famille de formes linéaires

Sur $\mathbb{R}^4$, on considère les formes linéaires

$$\varphi_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \varphi_2 = x_1 - x_2 + 2x_3, \varphi_3 = 2x_1 + 3x_3 + x_4.$$

1. Déterminer le rang de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.
2. En déduire la dimension de $F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \cap \ker \varphi_3$.
3. Déterminer une base de F .

Exercice 11 : Intersection de droites affines de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les droites affines

$$\mathcal{D}_1 = (1, 0, 2) + \mathbb{R}(1, 1, 0), \quad \mathcal{D}_2 = (2, 3, 0) + \mathbb{R}(0, 1, -1), \quad \mathcal{D}_3 = \mathbb{R}(1, 1, 1).$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.
2. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$.
3. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ ne sont contenues dans aucun plan affine commun.
4. Donner un système de deux équations cartésiennes de $\mathcal{D}_1$.

Exercice 12 : Intersection de plans affines selon un paramètre

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\mathcal{P}_1: x + y + z = 3$, $\mathcal{P}_2: x - y + z = 1$ et, pour $a \in \mathbb{R}$,
 $\mathcal{P}_3: x + 2y + z = a$.

1. Déterminer $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$: un point et une direction.
2. Montrer que les formes $(x, y, z) \rightarrow x + y + z$, $x - y + z$ et $x + 2y + z$ sont liées.
3. Déterminer $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ selon la valeur de a .

Exercice 13 : Système linéaire vu comme $u(x) = a$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\ker u$ et le rang de u .
2. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et en donner une équation.
3. Résoudre $u(x) = (1, 2, 3)$ et décrire géométriquement l'ensemble des solutions.
4. L'équation $u(x) = (1, 0, 0)$ a-t-elle des solutions ?

Exercice 14 : Équations différentielles et cadre affine

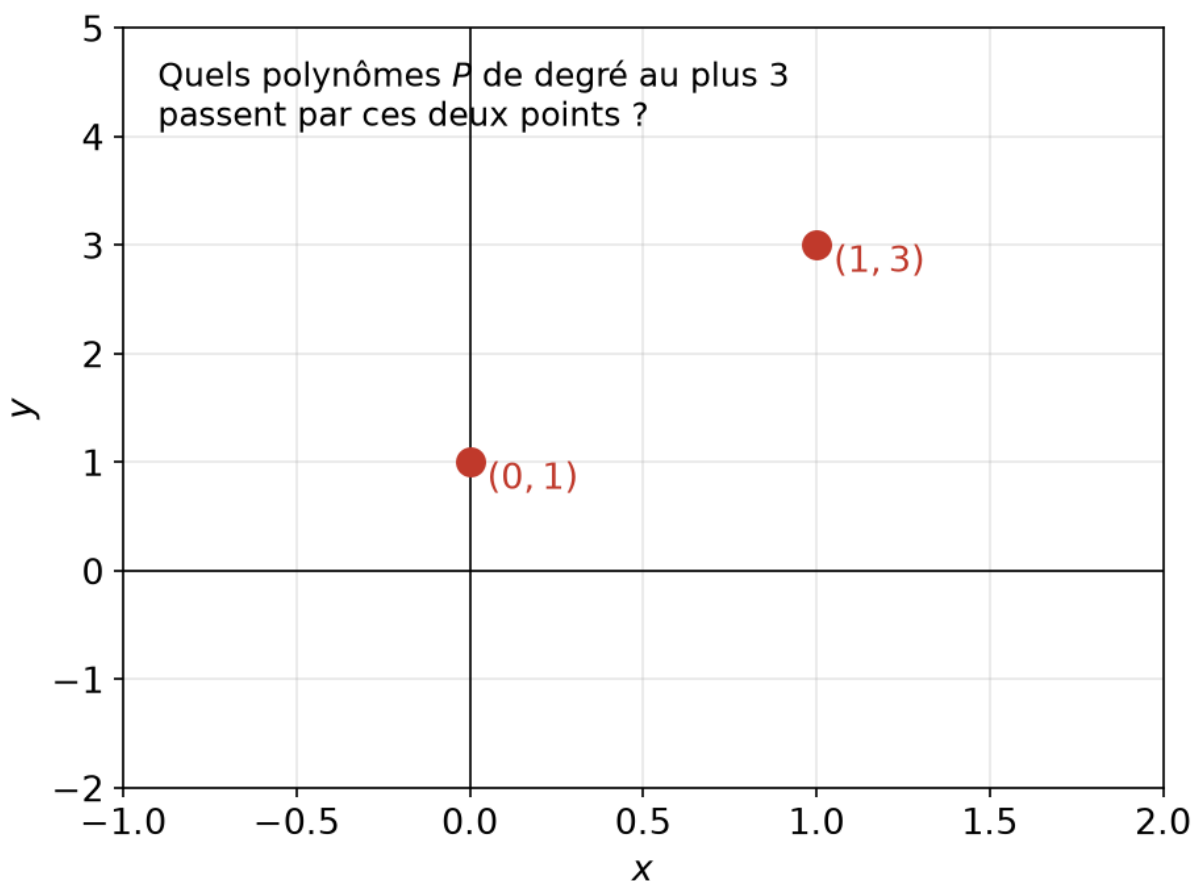
1. On considère $u : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $y \mapsto y' + y$. Justifier que u est linéaire, déterminer son noyau, puis résoudre $u(y) = \exp$.
2. On considère $v : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $y \mapsto y'' - 3y' + 2y$. Déterminer $\ker v$ et sa dimension.
3. Chercher une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 2x$ sous la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$. En déduire l'ensemble des solutions et sa structure.
4. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 15 : Suites récurrentes et cadre affine

1. Déterminer les suites réelles vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n , en cherchant d'abord une suite constante solution. Décrire la structure de l'ensemble obtenu.
2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est un plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en préciser la direction.
3. Déterminer l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Vérifier le résultat sur u_2 .

Exercice 16 : Interpolation et équation affine

Soit $\theta : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P \rightarrow (P(0), P(1))$. On cherche les polynômes de degré au plus 3 dont la courbe passe par les deux points de la figure ci-dessous.



1. Montrer que θ est linéaire et surjective.
2. Déterminer $\ker \theta$ et sa dimension.
3. Résoudre $\theta(P) = (1, 3)$.
4. Parmi ces solutions, déterminer celles qui vérifient de plus $P'(0) = 0$.

Exercice 17 : Hyperplans en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

1. Soit $x \in E$ non nul. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.
2. En déduire que l'intersection de tous les hyperplans de E est $\{0\}$.
3. Soient H et H' deux hyperplans distincts. Montrer que $H + H' = E$ et que $\dim(H \cap H') = n - 2$.
4. Soit F un sous-espace de E et $x \notin F$. Montrer qu'il existe un hyperplan contenant F mais pas x .

Exercice 18 : Formes linéaires sur les matrices

Soit $n \geq 2$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\varphi_A : M \rightarrow \text{tr}(AM)$.

1. Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis calculer $\varphi_A(E_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire.
2. Montrer que $\Phi : A \rightarrow \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.
3. On note N la matrice de permutation telle que $N_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $N_{n,1} = 1$, et les autres coefficients nuls. Montrer que N est inversible et que $\text{tr}(J_r N) = 0$ pour $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 19 : Problème, barycentres et intersections affines

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une partie $\mathcal{A}$ non vide de E est dite **stable par barycentres** si pour tous $a, b \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le point $(1 - \lambda)a + \lambda b$ appartient à $\mathcal{A}$.

Partie A.

1. Montrer qu'un sous-espace affine est stable par barycentres.
2. Réciproquement, soit $\mathcal{A}$ non vide et stable par barycentres, $a_0 \in \mathcal{A}$ et $F = \{x, a_0 : x \in \mathcal{A}\}$. Montrer que F est stable par multiplication par un réel.
3. En utilisant le milieu de deux points, montrer que F est stable par somme. Conclure que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine.

Partie B. Soient $u \in \mathcal{L}(E, E')$, où E' est un autre espace vectoriel.

4. Montrer que l'image par u d'un sous-espace affine $a + F$ est le sous-espace affine $u(a) + u(F)$.
5. Montrer que, pour $b \in E'$, l'image réciproque $u^{-1}(\{b\})$ est vide ou un sous-espace affine, et retrouver ainsi la structure des solutions de $u(x) = b$.

Partie C. On suppose $\dim E = 3$.

6. Montrer que deux plans affines de directions distinctes se coupent selon une droite affine.
7. Montrer qu'un plan affine $a + P$ et une droite affine $b + \mathbb{R}w$ avec $w \notin P$ se coupent en un unique point.
8. Application : déterminer l'intersection du plan $x + y - z = 2$ et de la droite $(1, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 2, 1)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [hyperplans et sous-espaces affines, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Chapitre précédent : [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Chapitre suivant : [Matrices, changements de base, rang et trace](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)