

Hyperplans et sous-espaces affines

Corrigé de l'exercice 1 : Reconnaître des formes linéaires

1. Pour tous vecteurs $v = (x, y, z)$, $v' = (x', y', z')$ et tout réel λ , on a
 $\varphi_1(\lambda v + v') = 2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + 3(\lambda z + z') = \lambda \varphi_1(v) + \varphi_1(v')$. **Donc φ_1 est une forme linéaire.**
2. On a $\varphi_2(1, 1) = 1$, alors que $\varphi_2(2(1, 1)) = \varphi_2(2, 2) = 4 \neq 2 \varphi_2(1, 1)$. **Donc φ_2 n'est pas linéaire.**
3. La dérivation est linéaire, de même que l'évaluation en un point. Ainsi,
 $(\lambda P + Q)(1) + (\lambda P + Q)'(0) = \lambda (P(1) + P'(0)) + Q(1) + Q'(0)$. **Donc φ_3 est une forme linéaire.**
4. Pour f continue, $t \rightarrow t f(t)$ est continue, donc l'intégrale existe. Par linéarité de l'intégrale,
 $\varphi_4(\lambda f + g) = \lambda \varphi_4(f) + \varphi_4(g)$. **Donc φ_4 est une forme linéaire.**
5. La trace vaut $\sum_i m_{i,i}$, qui est une combinaison linéaire des coefficients. **Donc φ_5 est une forme linéaire.**
6. Une application linéaire envoie 0 sur 0 . Or $\varphi_6(0, 0) = 1$. **Donc φ_6 n'est pas linéaire.**

Point de méthode : pour réfuter la linéarité, un seul contre-exemple suffit ; le test $\varphi(0) = 0$ est le plus rapide.

Corrigé de l'exercice 2 : Formes coordonnées d'une base de l'espace

1. La matrice de la famille dans la base canonique est triangulaire supérieure :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $1 \neq 0$. Par conséquent, **$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.**

2. On cherche a, b, c tels que $(x, y, z) = a e_1 + b e_2 + c e_3 = (a + b + c, b + c, c)$. On obtient d'abord $c = z$, puis $b = y - z$, enfin $a = x - y$. Ainsi :

$$\boxed{e_1^*(x, y, z) = x - y, \quad e_2^*(x, y, z) = y - z, \quad e_3^*(x, y, z) = z.}$$

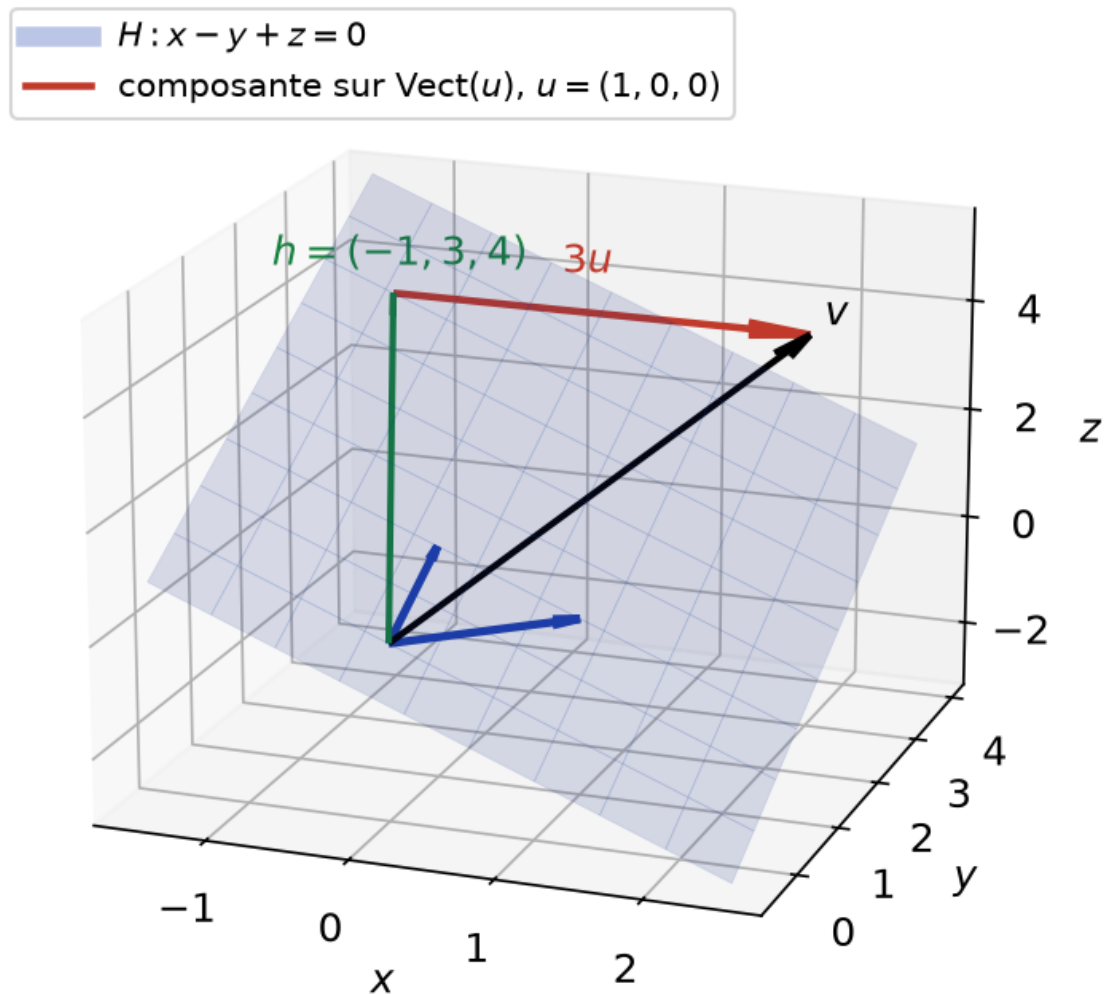
On vérifie par exemple $e_1^*(e_2) = 1 - 1 = 0$ et $e_2^*(e_2) = 1 - 0 = 1$. **Les formes coordonnées sont $x - y$, $y - z$ et z .**

3. D'après le cours, $\varphi = \varphi(e_1) e_1^* + \varphi(e_2) e_2^* + \varphi(e_3) e_3^*$. Or $\varphi(e_1) = 1$, $\varphi(e_2) = 1 + 2 = 3$ et $\varphi(e_3) = 6$. Vérifions :
 $(x - y) + 3(y - z) + 6z = x + 2y + 3z$. **Donc $\varphi = e_1^* + 3 e_2^* + 6 e_3^*$.**
4. Notons (a, b, c) les coordonnées dans $\mathcal{B}$. La question précédente donne
 $\varphi(a e_1 + b e_2 + c e_3) = a + 3b + 6c$. **Dans $\mathcal{B}$, l'hyperplan $\ker \varphi$ a pour équation $a + 3b + 6c = 0$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Équation d'un plan vectoriel

1. Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires : la première coordonnée de v_2 est nulle, contrairement à celle de v_1 , et $v_2 \neq 0$. Donc $\dim H = 2 = 3 - 1$, et H est un hyperplan. On cherche $ax + by + cz = 0$ vérifiée par v_1 et v_2 : $a + b = 0$ et $b + c = 0$. Avec $b = -1$, on trouve $a = 1$ et $c = 1$. **Une équation de H est $x - y + z = 0$.**

2. On pose $\varphi(x, y, z) = x - y + z$. Comme $\varphi(u) = 1 \neq 0$, on a $u \notin H$. D'après le cours, un hyperplan et une droite engendrée par un vecteur hors de lui sont supplémentaires. **Donc** $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}u$.
3. La composante sur $\mathbb{R}u$ vaut λu avec $\lambda = \frac{\varphi(v)}{\varphi(u)} = \frac{2-3+4}{1} = 3$. Ensuite $h = v - 3u = (-1, 3, 4)$, et l'on vérifie $-1 - 3 + 4 = 0$. **Ainsi** $v = (-1, 3, 4) + 3(1, 0, 0)$. La figure ci-dessous montre cette décomposition.



4. Le même calcul pour $w = (x, y, z)$ donne $\lambda = x - y + z$. La projection est donc $p(w) = w - \varphi(w)u$. **On obtient** $p(x, y, z) = (y - z, y, z)$. On vérifie que $y - z - y + z = 0$, donc $p(w) \in H$.

Corrigé de l'exercice 4 : Base d'un hyperplan de dimension trois

1. L'ensemble H est le noyau de $\varphi : x \rightarrow x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$. Cette forme est linéaire et non nulle, car $\varphi(1, 0, 0, 0) = 1$. **Donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, de dimension 3.**

2. L'équation donne $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4$, avec x_2, x_3, x_4 libres. Ainsi

$$x = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-2, 0, 0, 1).$$

Ces trois vecteurs engendrent H . Leurs trois dernières coordonnées forment la matrice identité, donc ils sont libres. **Une base de H est $((-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1))$.**

3. Le vecteur $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ vérifie $\varphi(e_1) = 1 \neq 0$, donc $\mathbb{R}^4 = H \oplus \mathbb{R}e_1$. Ensuite, $\varphi(1, 1, 1, 1) = 1 + 1 - 1 + 2 = 3$. La composante sur la droite est donc $3e_1$, et $h = (1, 1, 1, 1) - 3e_1 = (-2, 1, 1, 1)$. On vérifie : $-2 + 1 - 1 + 2 = 0$. **Ainsi $(1, 1, 1, 1) = (-2, 1, 1, 1) + 3(1, 0, 0, 0)$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Translations et sous-espaces affines

1. Pour tout x , $t_u(t_v(x)) = (x + v) + u = x + (u + v) = t_{u+v}(x)$. En particulier, $t_u \circ t_{-u} = t_{-u} \circ t_u = t_0 = \text{Id}_E$. **Donc t_u est bijective, de réciproque t_{-u} .**

2. Si $u = 0$, $t_u = \text{Id}_E$ est linéaire. Inversement, si t_u est linéaire, alors $t_u(0) = 0$, c'est-à-dire $u = 0$. **Ainsi t_u est linéaire si et seulement si $u = 0$.**

3. On a $t_u(a + f) = (a + u) + f$. Quand f décrit F , ce point décrit $(a + u) + F$. **Donc $t_u(\mathcal{A}) = (a + u) + F$, sous-espace affine de direction F .**

4. D'après le cours, deux sous-espaces affines de même direction $a + F$ et $b + F$ sont égaux si et seulement si $b - a \in F$. Ici $b = a + u$, donc $b - a = u$. **Par conséquent, $t_u(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ si et seulement si $u \in F$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Reconnaître des sous-espaces affines

1. La forme $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ est non nulle, et $\mathcal{A} = \{\varphi = 1\}$. D'après le cours, c'est un hyperplan affine. **$\mathcal{A}$ est le plan affine passant par $(1, 0, 0)$, de direction le plan $x + y + z = 0$.**
2. Les points $b = (1, -1, 0)$ et $c = (-1, -1, 0)$ sont dans $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ était un sous-espace affine de direction F , on aurait $c - b \in F$, donc $\frac{1}{2}(c - b) \in F$, puis $b + \frac{1}{2}(c - b) = (0, -1, 0) \in \mathcal{B}$. Or $0^2 + (-1) = -1 \neq 0$. **Donc $\mathcal{B}$ n'est pas un sous-espace affine.**
3. On a $(1 + t, 2 - t, 3t) = (1, 2, 0) + t(1, -1, 3)$. **$\mathcal{C}$ est la droite affine passant par $(1, 2, 0)$ et dirigée par $(1, -1, 3)$.**
4. Le système donne $x = 2$ et $y = -1$, avec z quelconque. Ainsi $\mathcal{D} = (2, -1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$. **$\mathcal{D}$ est une droite affine, intersection de deux plans affines.**

Corrigé de l'exercice 7 : Deux équations d'un même hyperplan

1. Les deux formes sont non nulles. D'après le théorème du cours, $H_1 = H_2$ si et seulement si $(3, a, b) = \lambda(1, 2, -1)$ pour un réel λ . La première coordonnée impose $\lambda = 3$. **Donc $H_1 = H_2$ si et seulement si $a = 6$ et $b = -3$.**
2. Écrivons $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Alors $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$ et $P''(0) = 2a_2$. Ainsi $\psi(P) = a_0 + a_1 + a_2 = P(1) = \varphi(P)$. Les deux formes sont égales, ce qui est le cas $\lambda = 1$. **En particulier, $\ker \varphi = \ker \psi$.** C'est d'ailleurs la formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus 2.
3. Soit a tel que $\varphi(a) \neq 0$; il existe car $\varphi \neq 0$. On pose $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ et $\chi = \psi - \lambda \varphi$. D'une part, χ est nulle sur $\ker \varphi$, car $\ker \varphi \subset \ker \psi$. D'autre part, $\chi(a) = 0$. Or $E = \ker \varphi \oplus \mathbb{K}a$. Par linéarité, χ est donc nulle sur E . **Ainsi $\psi = \lambda \varphi$.** Ici λ peut être nul : c'est le cas où $\psi = 0$.

Point de méthode : pour montrer qu'une forme est nulle, il suffit de la tester sur un hyperplan et sur un vecteur hors de cet hyperplan.

Corrigé de l'exercice 8 : Hyperplans de polynômes

1. Les applications $\varphi : P \rightarrow P(1)$ et $\psi : P \rightarrow \int_0^1 P(t) dt$ sont des formes linéaires sur E .
Elles sont non nulles, car $\varphi(1) = \psi(1) = 1$. **Donc** $H = \ker \varphi$ et $G = \ker \psi$ **sont des hyperplans de** E , **de dimension** 3.

2. Pour $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$, on a $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$. Dans la base canonique, l'équation est donc $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Ensuite, si $P = b_0 + b_1(X-1) + b_2(X-1)^2 + b_3(X-1)^3$, alors $P(1) = b_0$. **Dans la seconde base, l'équation de** H **est simplement** $b_0 = 0$.

3. Le polynôme $X - 1$ appartient à H . En revanche, $\int_0^1 (t-1) dt = -\frac{1}{2} \neq 0$, donc $X - 1 \notin G$. Ainsi $H \neq G$, et les formes φ et ψ ne sont pas proportionnelles. La famille (φ, ψ) est donc de rang 2. D'après le cours, $\dim(H \cap G) = 4 - 2 = 2$.

4. Un polynôme de H admet 1 pour racine, donc s'écrit $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
Calculons son intégrale :

$$\int_0^1 (t-1)(a t^2 + b t + c) dt = a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + b\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + c\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{a}{12} - \frac{b}{6} - \frac{c}{2}.$$

La condition $P \in G$ s'écrit donc $a + 2b + 6c = 0$, soit $a = -2b - 6c$. Avec $(b, c) = (1, 0)$, puis $(b, c) = (0, 1)$, on obtient

$$P_1 = (X-1)(X-2X^2) = X(X-1)(1-2X), \quad P_2 = (X-1)(1-6X^2).$$

Ces deux polynômes ne sont pas colinéaires. En effet, $P_1(0) = 0$ alors que $P_2(0) = -1$, et $P_1 \neq 0$. Ils forment une famille libre de $H \cap G$, de dimension 2. **Une base de** $H \cap G$ **est** $(X(X-1)(1-2X), (X-1)(1-6X^2))$.

Corrigé de l'exercice 9 : Système d'équations d'un sous-espace

1. On cherche les formes $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4$ nulles sur les deux générateurs :
 $a + c + d = 0$ et $b + c - d = 0$. Ainsi $a = -c - d$ et $b = -c + d$. Le choix
 $(c, d) = (1, 0)$ donne $(-1, -1, 1, 0)$; le choix $(c, d) = (0, 1)$ donne $(-1, 1, 0, 1)$. La
famille $((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1))$ est libre, donc $\dim F = 2$, et il faut $4 - 2 = 2$
équations indépendantes.

$$[\boxed{?}] F : \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \end{cases}$$

On vérifie sur $(1, 0, 1, 1)$: $1 = 1 + 0$ et $1 = 1 - 0$. Puis, sur $(0, 1, 1, -1)$: $1 = 0 + 1$
et $-1 = 0 - 1$. **Le système obtenu décrit bien F .**

2. En ajoutant puis en soustrayant les équations de G , on obtient $2x_1 + 2x_3 = 0$ et
 $2x_2 + 2x_4 = 0$. Le système équivaut donc à $x_3 = -x_1$ et $x_4 = -x_2$. Ainsi
 $x = x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1)$. **G a pour base $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ et**
 $\dim G = 2$.
3. Un vecteur de $F \cap G$ vérifie $x_1 + x_2 = x_3 = -x_1$, donc $x_2 = -2x_1$. Il vérifie aussi
 $x_1 - x_2 = x_4 = -x_2$, donc $x_1 = 0$. On en déduit $x_2 = 0$, puis $x_3 = x_4 = 0$.
Ainsi $F \cap G = \{0\}$. De plus, $\dim F + \dim G = 4$. **Par conséquent, $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Rang d'une famille de formes linéaires

1. On remarque que $\varphi_1 + \varphi_2 = 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 + x_4 = \varphi_3$. La famille est donc liée. En
revanche, φ_1 et φ_2 ne sont pas proportionnelles : leurs coefficients de x_4 valent 1 et 0,
alors que ceux de x_1 valent tous deux 1. **Le rang de la famille vaut 2.**
2. D'après le cours, la dimension de l'intersection vaut $n - r$. **Donc $\dim F = 4 - 2 = 2$.** De
plus, $F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$, puisque φ_3 s'annule dès que φ_1 et φ_2 s'annulent.
3. On résout $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. La seconde équation donne

$x_1 = x_2 - 2x_3$. En reportant, $2x_2 - x_3 + x_4 = 0$, soit $x_2 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)$. Pour $(x_3, x_4) = (2, 0)$, on trouve $(-3, 1, 2, 0)$. Pour $(x_3, x_4) = (0, 2)$, on trouve $(-1, -1, 0, 2)$. On vérifie : $-3 + 1 + 2 = 0$, $-3 - 1 + 4 = 0$, puis $-1 - 1 + 2 = 0$, $-1 + 1 = 0$. Ces vecteurs sont libres, car leurs deux dernières coordonnées le sont. **Une base de F est $((-3, 1, 2, 0), (-1, -1, 0, 2))$.**

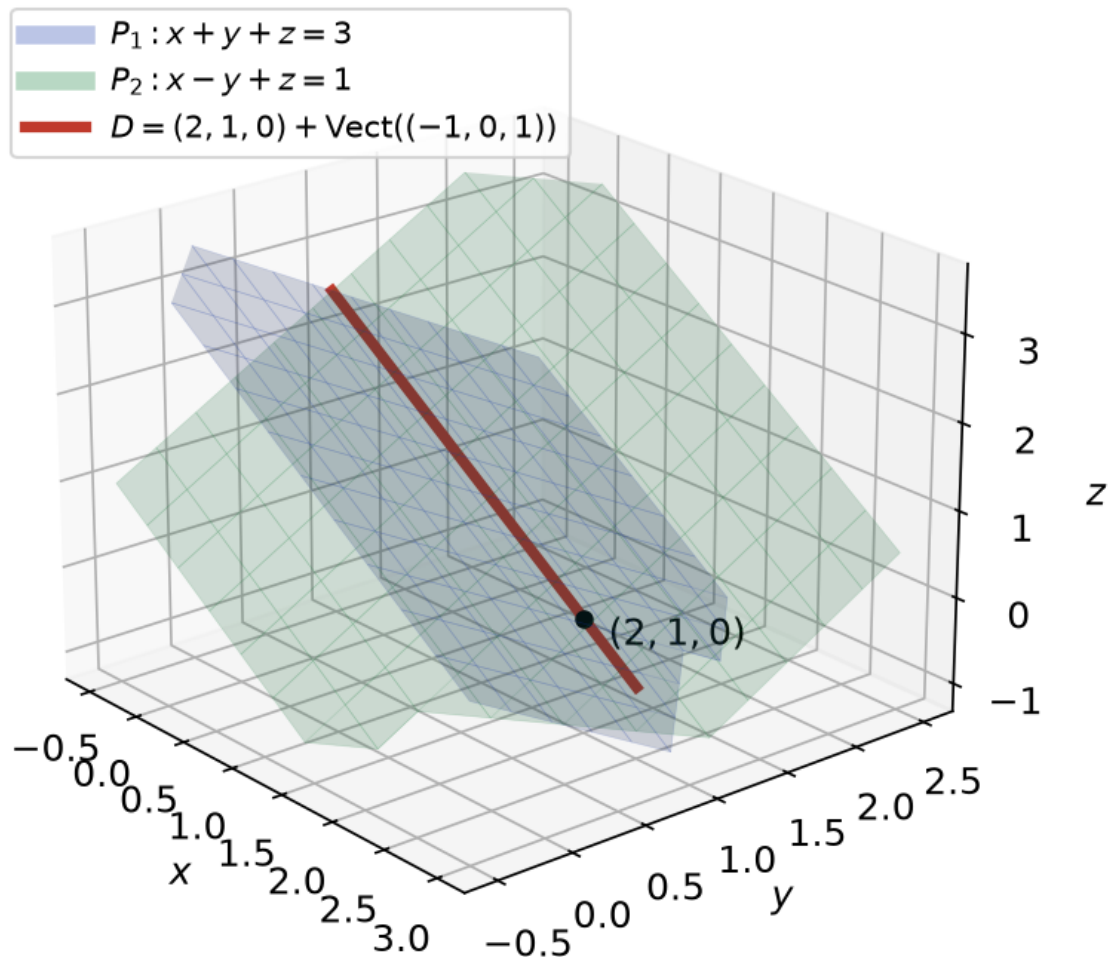
Corrigé de l'exercice 11 : Intersection de droites affines de l'espace

1. Un point de $\mathcal{D}_1$ s'écrit $(1 + s, s, 2)$ et un point de $\mathcal{D}_2$ s'écrit $(2, 3 + t, -t)$. L'égalité donne $1 + s = 2$, $s = 3 + t$ et $2 = -t$. Ainsi $s = 1$ et $t = -2$, et la deuxième équation est bien vérifiée. **Donc $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{(2, 1, 2)\}$.**
2. Un point commun à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ vérifierait $(1 + s, s, 2) = (r, r, r)$. On aurait alors $r = s$ et $r = 1 + s$, ce qui est impossible. **Donc $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 = \emptyset$.** Pourtant, les directions $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.
3. Supposons $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ contenues dans un plan affine de direction P , avec $\dim P = 2$. Alors P contient $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ et le vecteur joignant $0 \in \mathcal{D}_3$ à $(1, 0, 2) \in \mathcal{D}_1$. Or

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times (2 - 0) - 1 \times (2 - 0) + 1 \times (1 - 0) = 1 \neq 0.$$
 Ces trois vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui contredit $\dim P = 2$. **Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ ne sont pas coplanaires.**
4. Les points $(1 + s, s, 2)$ vérifient $x - y = 1$ et $z = 2$. Réciproquement, si $x - y = 1$ et $z = 2$, on pose $s = y$ et l'on retrouve un point de $\mathcal{D}_1$. **Un système de $\mathcal{D}_1$ est $x - y = 1, z = 2$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Intersection de plans affines selon un paramètre

1. On ajoute puis on soustrait les équations de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$: $2x + 2z = 4$ et $2y = 2$. Donc $y = 1$ et $x = 2 - z$. En posant $z = t$, on obtient $(2 - t, 1, t)$. **Ainsi** $\mathcal{D} = (2, 1, 0) + \mathbb{R}(-1, 0, 1)$. La direction est bien l'intersection des plans vectoriels $x + y + z = 0$ et $x - y + z = 0$, comme le montre la figure.



2. On cherche α, β tels que $(1, 2, 1) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -1, 1)$. Il faut $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = 2$, donc $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$. La troisième coordonnée donne encore $\alpha + \beta = 1$. **Ainsi** $x + 2y + z = \frac{3}{2}(x + y + z) - \frac{1}{2}(x - y + z)$: **les formes sont liées.**
3. Sur $\mathcal{D}$, la forme vaut $x + 2y + z = (2 - t) + 2 + t = 4$, quelle que soit la valeur de t . On retrouve $\frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 = 4$. Par conséquent, si $a = 4$, tout point de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{P}_3$. En revanche, si $a \neq 4$, aucun point ne convient. **L'intersection vaut $\mathcal{D}$ si $a = 4$, et $\emptyset$ sinon.** Elle n'est jamais réduite à un point, car les trois formes sont de rang 2.

Corrigé de l'exercice 13 : Système linéaire vu comme $u(x) = a$

1. La troisième ligne de A est la somme des deux premières. Le noyau est donc décrit par $x + y + z = 0$ et $x + 2y + 3z = 0$. Par différence, $y + 2z = 0$, d'où $y = -2z$ puis $x = z$. **Ainsi** $\ker u = \text{Vect}((1, -2, 1))$, **et** $\text{rg } u = 3 - 1 = 2$ d'après le théorème du rang.
2. L'image est un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, donc un hyperplan. Les colonnes $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$ vérifient toutes $b_3 = b_1 + b_2$. La forme $b_1 + b_2 - b_3$ est non nulle ; son noyau est donc un hyperplan qui contient $\text{Im } u$. Les deux sont de dimension 2, donc égaux. **Im u a pour équation** $b_1 + b_2 - b_3 = 0$.
3. Le second membre $(1, 2, 3)$ vérifie $3 = 1 + 2$: il est dans l'image. De plus, c'est la deuxième colonne de A , donc $x_0 = (0, 1, 0)$ est une solution particulière. D'après le cours, $S = x_0 + \ker u$. **Les solutions forment la droite affine** $(0, 1, 0) + \mathbb{R}(1, -2, 1)$. Géométriquement, c'est l'intersection des plans affines $x + y + z = 1$ et $x + 2y + 3z = 2$.
4. Pour $(1, 0, 0)$, on a $b_1 + b_2 - b_3 = 1 \neq 0$. Ce vecteur n'est pas dans l'image. **L'équation** $u(x) = (1, 0, 0)$ **n'a aucune solution.**

Corrigé de l'exercice 14 : Équations différentielles et cadre affine

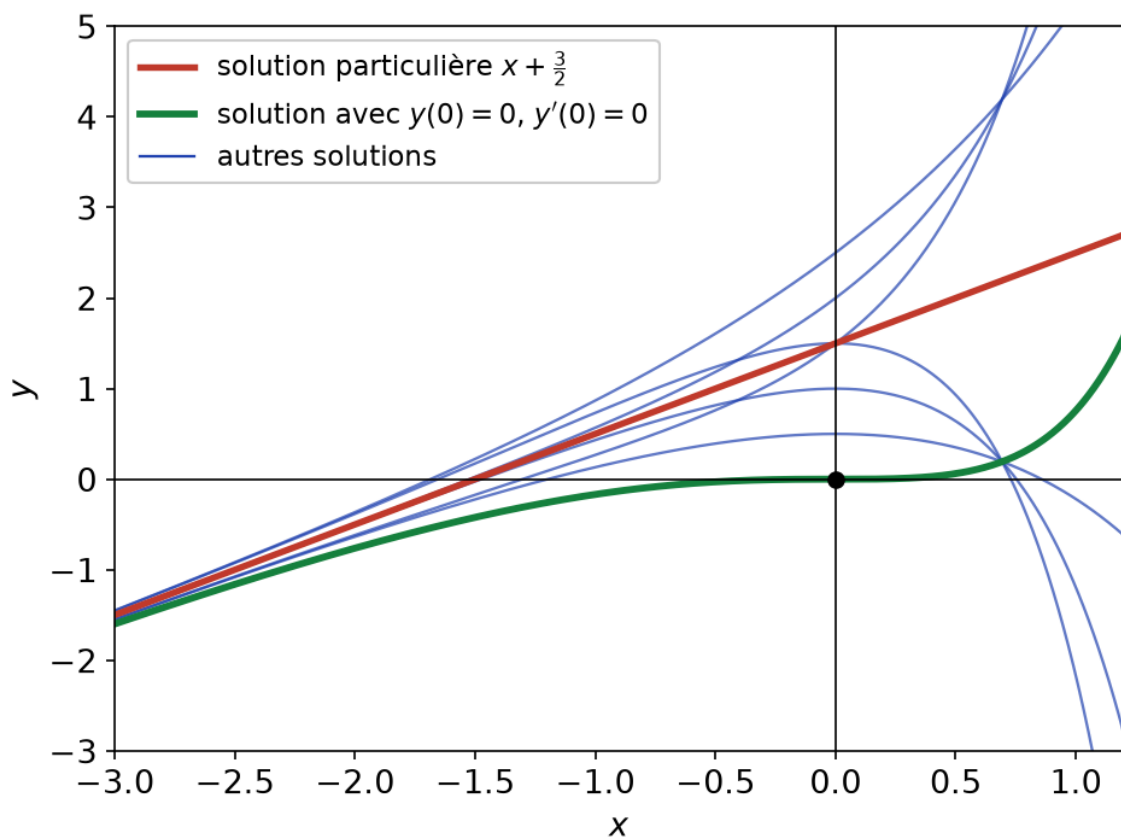
1. La dérivation est linéaire, donc $u(\lambda y + z) = \lambda u(y) + u(z)$. De plus, $y' + y$ est continue si y est de classe $\mathcal{C}^1$. Ensuite, $\ker u$ est l'ensemble des solutions de $y' = -y$, soit $\text{Vect}(x \rightarrow e^{-x})$. Enfin, $y_0 = \frac{1}{2}\exp$ vérifie $y_0' + y_0 = \exp$. D'après le théorème de structure, **les solutions de** $u(y) = \exp$ **sont les fonctions** $x \rightarrow \frac{1}{2}e^x + C e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2. D'après le cours sur les équations à coefficients constants, $\ker v = \text{Vect}(x \rightarrow e^x, x \rightarrow e^{2x})$, **de dimension** 2.
3. Pour $y = \alpha x + \beta$, on a $y' = \alpha$ et $y'' = 0$. L'équation devient $-3\alpha + 2\alpha x + 2\beta = 2x$. Par identification, $\alpha = 1$ puis $\beta = \frac{3}{2}$. Ainsi l'ensemble des

solutions est un plan affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

$$y(x) = x + \frac{3}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

C'est le plan affine passant par $x \rightarrow x + \frac{3}{2}$ et dirigé par $\ker v$.

4. On a $y(0) = \frac{3}{2} + \lambda + \mu$ et $y'(0) = 1 + \lambda + 2\mu$. Le système $\lambda + \mu = -\frac{3}{2}$, $\lambda + 2\mu = -1$ donne, par différence, $\mu = \frac{1}{2}$, puis $\lambda = -2$. On vérifie : $y(0) = \frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 0$ et $y'(0) = 1 - 2 + 1 = 0$. **La solution cherchée est** $y(x) = x + \frac{3}{2} - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}$. La figure la situe parmi les autres solutions.



Corrigé de l'exercice 15 : Suites récurrentes et cadre affine

1. Une suite constante c convient si et seulement si $c = 2c + 3$, soit $c = -3$. Posons $v_n = u_n + 3$. Alors $v_{n+1} = 2u_n + 6 = 2v_n$, donc $v_n = 2^n v_0$. **Les solutions**

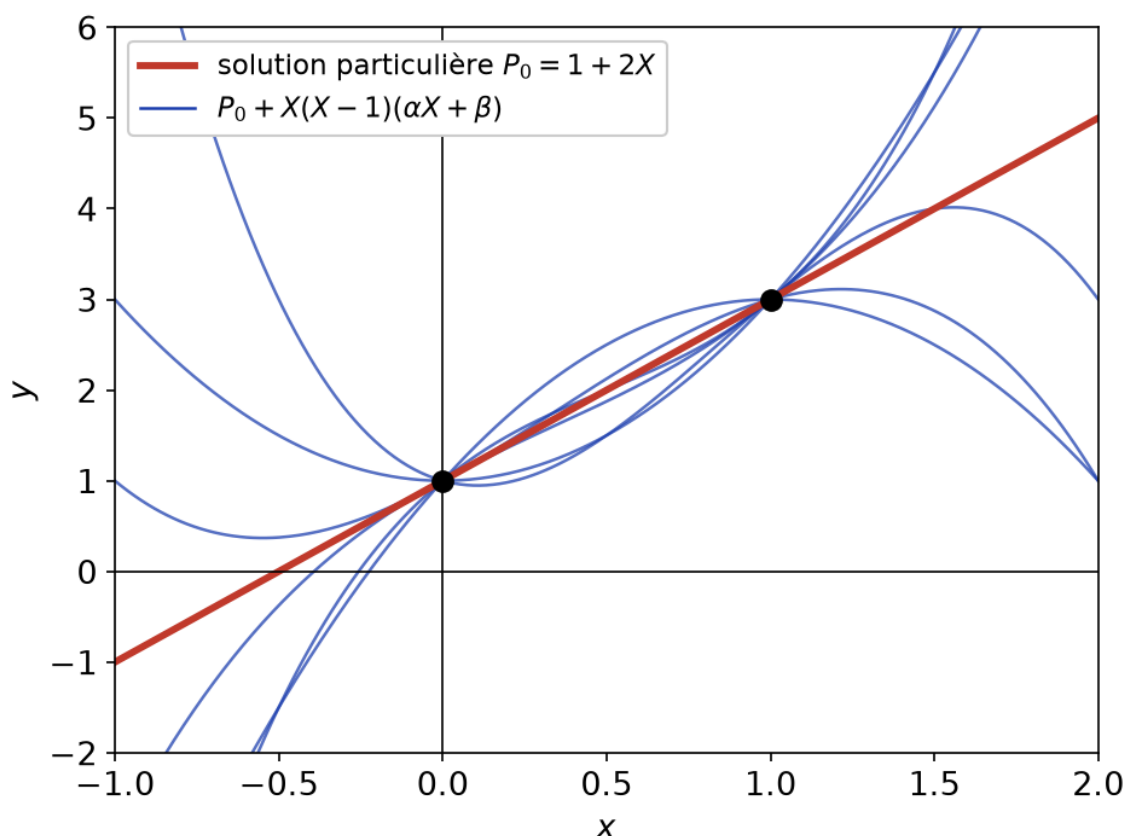
sont les suites $u_n = -3 + (u_0 + 3)2^n$. Leur ensemble est la droite affine passant par la suite constante -3 et dirigée par $(2^n)_n$.

2. L'application $\Phi : u \rightarrow (u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n)_n$ est linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. De plus, $\mathcal{S} = \Phi^{-1}(\{c\})$, où c est la suite constante égale à 2 . Une suite constante k est solution si et seulement si $k - 5k + 6k = 2$, soit $k = 1$. Par ailleurs, $\ker \Phi$ est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$, de racines 2 et 3 . Ainsi $\ker \Phi = \text{Vect}((2^n), (3^n))$, de dimension 2 . **Donc** $\mathcal{S} = 1 + \text{Vect}((2^n), (3^n))$ **est un plan affine.**

3. On écrit $u_n = 1 + \lambda 2^n + \mu 3^n$. Les conditions donnent $1 + \lambda + \mu = 0$ et $1 + 2\lambda + 3\mu = 1$. La seconde donne $\lambda = -\frac{3}{2}\mu$. En reportant, $1 - \frac{1}{2}\mu = 0$, donc $\mu = 2$ et $\lambda = -3$. **On obtient** $u_n = 1 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$. Vérification : la récurrence donne $u_2 = 5 \times 1 - 6 \times 0 + 2 = 7$, et la formule donne $1 - 12 + 18 = 7$.

Corrigé de l'exercice 16 : Interpolation et équation affine

1. Les évaluations en 0 et en 1 sont linéaires, donc θ l'est aussi. De plus, $\theta(1 - X) = (1, 0)$ et $\theta(X) = (0, 1)$. L'image contient donc une base de $\mathbb{R}^2$. **Ainsi θ est linéaire et surjective.**
2. Un polynôme P est dans $\ker \theta$ si et seulement si 0 et 1 sont racines, c'est-à-dire si $X(X - 1)$ divise P . Comme $\deg P \leq 3$, le quotient est de degré au plus 1 . **Donc** $\ker \theta = \{X(X - 1)(\alpha X + \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, **de dimension** 2 . Le théorème du rang le confirme : $4 - 2 = 2$.
3. Le polynôme $P_0 = 1 + 2X$ vérifie $P_0(0) = 1$ et $P_0(1) = 3$. D'après le théorème de structure, **les solutions sont les polynômes** $1 + 2X + X(X - 1)(\alpha X + \beta)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. C'est un plan affine de $\mathbb{R}_3[X]$. La figure ci-dessous montre plusieurs de ces courbes, qui passent toutes par les deux points imposés.



4. Posons $Q = (X-1)(\alpha X + \beta)$, de sorte que $P = 1 + 2X + XQ$. Alors $P' = 2 + Q + XQ'$, donc $P'(0) = 2 + Q(0) = 2 - \beta$. La condition $P'(0) = 0$ équivaut à $\beta = 2$. **Les solutions sont les polynômes $1 + 2X + X(X-1)(\alpha X + 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$: une droite affine.**

Corrigé de l'exercice 17 : Hyperplans en dimension finie

1. La famille (x) est libre, car $x \neq 0$. D'après le théorème de la base incomplète, on la complète en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de E . La première forme coordonnée φ de cette base vérifie $\varphi(x) = 1$. **Une telle forme existe donc toujours.**
2. Soit $x \neq 0$ et φ comme ci-dessus. Alors $\varphi \neq 0$ et $x \notin \ker \varphi$. Ainsi x n'appartient pas à tous les hyperplans. Réciproquement, 0 est dans chacun d'eux. **L'intersection de tous les hyperplans est donc $\{0\}$.**
3. On a $H \subset H + H'$. Si l'on avait $H + H' = H$, alors $H' \subset H$, et l'égalité des

dimensions donnerait $H' = H$, ce qui est exclu. Donc $\dim(H + H') > n - 1$, c'est-à-dire $H + H' = E$. La formule de Grassmann donne alors

$$\dim(H \cap H') = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2.$$

Ainsi $H + H' = E$ **et** $\dim(H \cap H') = n - 2$.

4. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F , éventuellement vide. Comme $x \notin F$, la famille $(f_1, \dots, f_p, x)$ est libre. On la complète en une base de E , et l'on note φ la forme coordonnée associée à x . Alors $\varphi(f_k) = 0$ pour tout k , donc $F \subset \ker \varphi$; en revanche, $\varphi(x) = 1$. **L'hyperplan $\ker \varphi$ contient F mais pas x .**

Corrigé de l'exercice 18 : Formes linéaires sur les matrices

- Le produit $M \rightarrow AM$ est linéaire, et la trace aussi; par composition, φ_A est une forme linéaire. Ensuite, $AE_{i,j}$ a pour seule colonne non nulle sa colonne j , égale à la colonne i de A . Son unique coefficient diagonal éventuellement non nul est donc en position (j, j) et vaut $a_{j,i}$. **Ainsi** $\varphi_A(E_{i,j}) = a_{j,i}$.
- L'application Φ est linéaire, car $\text{tr}((\lambda A + B)M) = \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM)$. Si $\varphi_A = 0$, alors $a_{j,i} = \varphi_A(E_{i,j}) = 0$ pour tous i, j , donc $A = 0$. Par conséquent, Φ est injective. Or les deux espaces ont pour dimension n^2 . **Donc Φ est un isomorphisme : toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $M \rightarrow \text{tr}(AM)$ pour une unique matrice A .**
- Les colonnes de N sont, à l'ordre près, les vecteurs de la base canonique; elles forment donc une base, et N est inversible. De plus, comme $n \geq 2$, tous les coefficients diagonaux de N sont nuls. Enfin, $(J_r N)_{i,i} = \sum_k (J_r)_{i,k} N_{k,i} = (J_r)_{i,i} N_{i,i} = 0$. **Donc** $\text{tr}(J_r N) = 0$.
- Soit H un hyperplan : $H = \ker \varphi$, avec $\varphi \neq 0$. D'après la question 2, $\varphi = \varphi_A$ avec $A \neq 0$. Soit $r = \text{rg } A \geq 1$. D'après le cours sur le rang, il existe P, Q inversibles telles que $A = P J_r Q$. On pose $M = Q^{-1} N P^{-1}$, qui est inversible. Par la propriété $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$,

$$\text{tr}(AM) = \text{tr}(P J_r N P^{-1}) = \text{tr}(J_r N P^{-1} P) = \text{tr}(J_r N) = 0.$$

Ainsi $M \in H$ est inversible : tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Point de méthode : la réduction $A = P J_r Q$ ramène un problème sur une matrice quelconque au cas simple de J_r .

Corrigé de l'exercice 19 : Problème, barycentres et intersections affines

1. Soit $\mathcal{A} = a + F$, et $b, c \in \mathcal{A}$. D'après le cours, $c - b \in F$ et $\mathcal{A} = b + F$. Donc $(1 - \lambda)b + \lambda c = b + \lambda(c - b) \in b + F$. **Un sous-espace affine est stable par barycentres.**
2. Soit $x \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $(1 - \lambda)a_0 + \lambda x = a_0 + \lambda(x - a_0) \in \mathcal{A}$. Par définition de F , cela signifie $\lambda(x - a_0) \in F$. **Donc F est stable par multiplication par un réel.**
3. Soient $x, y \in \mathcal{A}$. Le milieu $m = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ est dans $\mathcal{A}$, avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Donc $m - a_0 = \frac{1}{2}((x - a_0) + (y - a_0)) \in F$. D'après la question 2, en multipliant par 2, on obtient $(x - a_0) + (y - a_0) \in F$. Ainsi F est stable par somme. De plus, $0 = a_0 - a_0 \in F$. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel. Enfin, $\mathcal{A} = a_0 + F$ par construction. **Une partie non vide stable par barycentres est un sous-espace affine.**
4. Par linéarité, $u(a + f) = u(a) + u(f)$. Quand f décrit F , $u(f)$ décrit le sous-espace vectoriel $u(F)$. **Donc $u(a + F) = u(a) + u(F)$ est un sous-espace affine.**
5. Supposons $u^{-1}(\{b\})$ non vide. Pour x, y dans cet ensemble, $u((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)b + \lambda b = b$. L'ensemble est donc stable par barycentres, donc affine d'après la partie A. Sa direction est $\{x - x_0 : u(x) = b\} = \ker u$, car $u(x) = b = u(x_0)$ équivaut à $x - x_0 \in \ker u$. **On retrouve $S = x_0 + \ker u$.**
6. Soient $a + P$ et $b + P'$ deux plans affines, avec $P \neq P'$. D'après l'exercice 17, deux hyperplans distincts vérifient $P + P' = E$. Donc $b - a \in P + P'$, et l'intersection est non vide d'après le cours. Sa direction est $P \cap P'$, de dimension $3 - 2 = 1$. **Les deux plans se coupent selon une droite affine.**
7. Comme $w \notin P$, on a $E = P \oplus \mathbb{R}w$. En particulier, $b - a \in P + \mathbb{R}w$, donc l'intersection est non vide. Sa direction est $P \cap \mathbb{R}w = \{0\}$. **L'intersection est donc réduite à un point.**

8. La direction du plan est $x + y - z = 0$, et $1 + 2 - 1 = 2 \neq 0$: le vecteur $(1, 2, 1)$ n'est pas dans cette direction. D'après la question 7, l'intersection est un unique point. Le point $(1 + t, 2t, t)$ est dans le plan si et seulement si $1 + t + 2t - t = 2$, soit $t = \frac{1}{2}$. On vérifie : $\frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 2$. **L'intersection est le point $(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$.**

Point de méthode : pour montrer qu'une intersection affine est non vide, on vérifie que le vecteur joignant deux points de base est dans la somme des directions.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [hyperplans et sous-espaces affines, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur hyperplans et sous-espaces affines](#)
- À maîtriser avant : [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Chapitre précédent : [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Chapitre suivant : [Matrices, changements de base, rang et trace](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)