

Groupes

Exercice 1 : Une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ privé de -1

On pose $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et, pour $x, y \in G$, $x * y = x + y + xy$.

1. Vérifiez que $x * y = (1 + x)(1 + y) - 1$. En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur G .
2. Montrez que $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^*, x \rightarrow 1 + x$, est une bijection qui vérifie $\varphi(x * y) = \varphi(x)\varphi(y)$.
3. En déduire que $(G, *)$ est un groupe abélien. Précisez son neutre et le symétrique de x .
4. Calculez $x^{*n} = x * x * \dots * x$ (n facteurs) pour $n \geq 1$, puis résolvez $x * x * x = 7$ dans G .

Exercice 2 : Structures de groupe ou non

Dites, en justifiant, lesquels des couples suivants sont des groupes.

1. $(\mathbb{N}, +)$ et $(2\mathbb{Z}, +)$.
2. $(\mathbb{Z}, \times)$ et $(\{-1, 1\}, \times)$.
3. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}, \times)$ et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}, \times)$.

4. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
5. $(\mathbb{R}, -)$ avec $x - y = x - y$.

Exercice 3 : Reconnaître des sous-groupes

Dans chaque cas, dites si H est un sous-groupe du groupe G indiqué.

1. $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ et $H = \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
2. $G = (\mathbb{Q}^*, \times)$ et $H = \mathbb{Q}_+^*$.
3. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = 2\mathbb{Z} + 1$, l'ensemble des entiers impairs.
4. $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et H l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $ad \neq 0$.
5. $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et $H = \text{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A : \det A = 1\}$.
6. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^* : |x| \geq 1\}$.

Exercice 4 : Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et sous-groupe engendré

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrez que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Déterminez l'entier $d \geq 0$ tel que $\langle 6, 15 \rangle = 6\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
3. Déterminez l'entier $m \geq 0$ tel que $6\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.
4. La réunion $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ est-elle un sous-groupe de $\mathbb{Z}$?
5. Soient a, b deux entiers non tous deux nuls. Montrez que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$, en utilisant le théorème de classification des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Ordre des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et des racines de l'unité

1. Déterminez l'ordre de $\bar{8}$, $\bar{9}$ et $\bar{5}$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
2. Donnez la liste des éléments d'ordre 12, puis celle des éléments d'ordre 6.
3. Dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, déterminez l'ordre de $\omega = e^{2i\pi \cdot 10/24}$ et celui de $\zeta = e^{3i\pi/4}$.
4. Quel est l'ordre de $1 + i$ dans $\mathbb{C}^*$?

Exercice 6 : Noyau et image de morphismes usuels

Pour chacune des applications suivantes, vérifiez que c'est un morphisme de groupes, puis déterminez son noyau et son image. Dites si elle est injective, surjective.

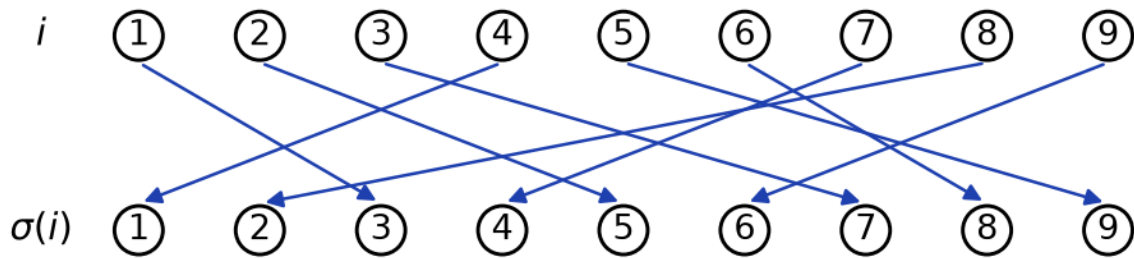
1. $f : (\mathbb{C}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times), z \rightarrow |z|$.
2. $g : (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times), x \rightarrow x^2$.
3. $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$.
4. $h : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \bar{k} \rightarrow \overline{2k}$. On vérifiera d'abord que h est bien définie.

Exercice 7 : Décomposition d'une permutation en cycles

On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_9$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 9 & 8 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Le schéma ci-dessous relie chaque i de la ligne du haut à son image $\sigma(i)$ sur la ligne du bas.



1. Décomposez σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminez l'ordre et la signature de σ .
3. Écrivez σ^{-1} comme produit de cycles disjoints.
4. Calculez σ^{2026} .
5. Écrivez σ comme produit de transpositions.

Exercice 8 : Ordres de matrices et produit d'éléments d'ordre fini

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 et A^3 , puis déterminez l'ordre de A dans $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrez que B est d'ordre 4 et C d'ordre 3.
3. Calculez BC , puis $(BC)^n$ pour $n \geq 1$. Quel est l'ordre de BC ? Que retenir?

4. Soit G un groupe abélien, a d'ordre m et b d'ordre n , avec $\text{pgcd}(m, n) = 1$.
Montrez que ab est d'ordre mn .

Exercice 9 : Morphismes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

1. Soit $f: \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes et $a = f(\bar{1})$. Montrez que $f(\bar{k}) = ka$ pour tout k , et que $12a = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
2. Réciproquement, soit $a \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ tel que $12a = \bar{0}$. Montrez que $\bar{k} \rightarrow ka$ définit bien un morphisme.
3. En déduire tous les morphismes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Combien y en a-t-il ?
4. Pour $a = \bar{3}$, déterminez le noyau et l'image du morphisme obtenu.
5. Existe-t-il un morphisme injectif de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$?

Exercice 10 : Centre et automorphismes intérieurs

Soit G un groupe. Son **centre** est $Z(G) = \left\{ a \in G : \text{orall } x \in G, ax = xa \right\}$. Pour $g \in G$, on pose $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$.

1. Montrez que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .
2. Montrez que φ_g est un automorphisme de G .
3. Montrez que $\Phi: g \rightarrow \varphi_g$ est un morphisme de G dans le groupe $(\text{Aut}(G), \circ)$, et que $\ker \Phi = Z(G)$.
4. Déterminez $Z(S_3)$. Que peut-on dire de Φ lorsque $G = S_3$?

Exercice 11 : Groupes d'exposant 2

Soit G un groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout x .

1. Montrez que G est abélien.

2. On pose, dans S_4 , $V = \left\{ \begin{matrix} \text{Id}, (1,2)(3,4), \\ (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \end{matrix} \right\}$. Montrez que V est un sous-groupe de S_4 dont tous les éléments vérifient $x^2 = \text{Id}$.

3. Montrez que si G est fini et non réduit à $\{e\}$, son ordre est pair.
4. Montrez que la réciproque de la question 1 est fausse : un groupe abélien peut contenir un élément x avec $x^2 \neq e$.

Exercice 12 : Élément d'ordre 2 dans un groupe d'ordre pair

Soit G un groupe fini d'ordre pair.

1. On note $A = \{x \in G : x \neq x^{-1}\}$. Montrez que A a un cardinal pair.
2. En déduire que G contient un élément d'ordre 2, et même un nombre impair d'éléments d'ordre 2.
3. Montrez qu'un groupe d'ordre impair ne contient aucun élément d'ordre 2.
4. Vérifiez le résultat de la question 2 sur S_3 et sur $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 13 : Classes à gauche et à droite dans S_3

Dans S_3 , on considère $H = \left\{ \text{Id}, \begin{pmatrix} 1 \\ ,2 \end{pmatrix} \right\}$ et $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ ,2 \\ ,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ ,3 \\ ,2 \end{pmatrix} \right\}$. On rappelle que $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$.

1. Vérifiez que H et K sont des sous-groupes de S_3 .
2. Déterminez les classes à gauche σH , puis les classes à droite $H\sigma$. Comparez.
3. Déterminez les classes à gauche et à droite modulo K . Comparez.
4. Vérifiez le théorème de Lagrange dans les deux cas.

Exercice 14 : Lagrange et calculs modulaires

1. Montrez que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times$ est un groupe d'ordre $\varphi(n)$. En déduire le théorème d'Euler : $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ si $\text{pgcd}(a, n) = 1$.
2. Déterminez l'ordre de $\bar{7}$ dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$, et vérifiez qu'il divise $\varphi(15)$. En déduire le reste de 7^{100} modulo 15.
3. Déterminez l'ordre de $\bar{2}$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, puis le reste de 2^{1000} modulo 13.
4. Montrez qu'un groupe d'ordre premier p n'a que deux sous-groupes.

Exercice 15 : Conjugaison et produit de cycles

1. Soit $c = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ un cycle de $\mathcal{S}_n$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$. Montrez que $\tau c \tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \dots, \tau(a_k))$.
2. Calculez le produit $(1, 2)(2, 3)(3, 4)$ dans $\mathcal{S}_4$ et décomposez-le en cycles disjoints.
3. Avec $\rho = (1, 2, 3, 4)$, calculez $\rho (1, 3) \rho^{-1}$ sans calcul direct.
4. Montrez que deux cycles de même longueur sont conjugués dans $\mathcal{S}_n$.

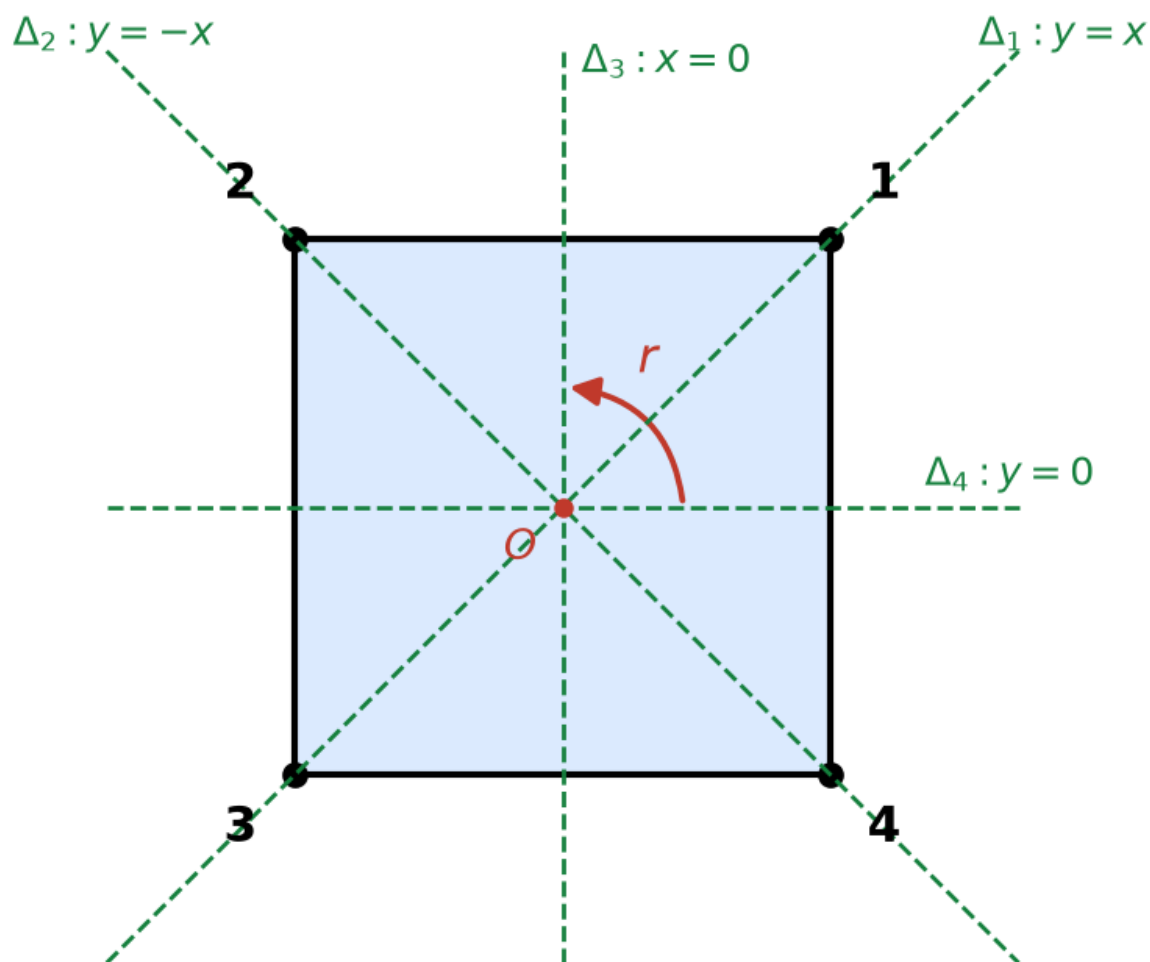
Exercice 16 : Ordres des éléments de $\mathcal{S}_5$ et $\mathcal{S}_6$

1. Montrez que le nombre de cycles de longueur k dans $\mathcal{S}_n$ est $\frac{n!}{k(n-k)!}$.
2. En classant les permutations selon les longueurs de leurs cycles, déterminez l'ensemble des ordres des éléments de $\mathcal{S}_5$, puis de $\mathcal{S}_6$.
3. Combien $\mathcal{S}_5$ contient-il d'éléments d'ordre 6 ?
4. $\mathcal{S}_5$ contient-il un sous-groupe cyclique d'ordre 10 ?

Exercice 17 : Le groupe des isométries du carré

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O , on considère le carré de sommets $1 = (1, 1)$, $2 = (-1, 1)$, $3 = (-1, -1)$ et $4 = (1, -1)$. On note D_4 le groupe des isométries du plan qui conservent ce carré. Il contient la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et les

symétries orthogonales s_1, s_2, s_3, s_4 d'axes $\Delta_1: y = x$, $\Delta_2: y = -x$, $\Delta_3: x = 0$ et $\Delta_4: y = 0$, dessinés ci-dessous.



1. On admet que $D_4 = \{\text{Id}, r, r^2, r^3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et que toute isométrie de D_4 est linéaire. À chaque $g \in D_4$, on associe la permutation $\Phi(g) \in \mathcal{S}_4$ des sommets. Montrez que Φ est un morphisme injectif.
2. Écrivez les huit permutations $\Phi(g)$ en produit de cycles disjoints.
3. Donnez l'ordre de chaque élément de D_4 .
4. Calculez $r s_1$ et $s_1 r$. Le groupe D_4 est-il abélien ?
5. Trouvez un sous-groupe cyclique d'ordre 4 et un sous-groupe d'ordre 4 non cyclique de D_4 . Quel est l'indice de $\Phi(D_4)$ dans $\mathcal{S}_4$?

Exercice 18 : Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, inversibles et corps

1. Déterminez les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et l'inverse de chacun.
2. Trouvez deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dont le produit est nul. L'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est-il un corps ?
3. Montrez que $\overline{17}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ et calculez son inverse par l'algorithme d'Euclide.
4. Résolvez l'équation $17x \equiv 5 \pmod{60}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
5. Un anneau commutatif A est dit intègre si $1_A \neq 0_A$ et si $ab = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$. Montrez qu'un anneau commutatif intègre fini est un corps, en utilisant pour $a \neq 0$ l'application $x \rightarrow ax$.

Exercice 19 : Idéaux de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}[X]$

1. Déterminez $12\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z}$ et $12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z}$. Ce sont des idéaux de $\mathbb{Z}$: justifiez-le.
2. Montrez que $I = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et que $I = (X - 1)\mathbb{R}[X]$.
3. Montrez de même que $J = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = P(2) = 0\}$ est l'idéal engendré par $(X-1)(X-2)$.
4. Soit K un corps. Montrez que les seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K .
5. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Q}$?

Exercice 20 : Sous-groupes d'un groupe cyclique

Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n .

1. Soit H un sous-groupe de G . En considérant $\{k \in \mathbb{Z} : a^k \in H\}$, montrez que H est cyclique.
2. Soit d un diviseur de n . Montrez que $\langle a^{n/d} \rangle$ est l'unique sous-groupe d'ordre d de G .
3. Faites la liste des sous-groupes de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, avec un générateur et l'ordre de chacun, et précisez les inclusions entre eux.
4. En comptant les générateurs de chaque sous-groupe, montrez que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. Vérifiez l'égalité pour $n = 18$.

Exercice 21 : Générateurs du groupe symétrique

Soit $n \geq 3$.

1. Vérifiez que, pour $i, j \geq 2$ distincts, $(i \ j) = (1 \ i)(1 \ j)(1 \ i)$. En déduire que les transpositions $(1 \ k)$, $2 \leq k \leq n$, engendrent S_n .
2. Pour $2 \leq k \leq n-1$, montrez que $(1 \ k+1) = (k \ k+1)(1 \ k)(k \ k+1)$. En déduire que les transpositions $(k \ k+1)$, $1 \leq k \leq n-1$, engendrent S_n .

3. On pose $t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix}$. Calculez $c^k t c^{-k}$ pour $0 \leq k \leq n-2$. En déduire que $\mathcal{S}_n = \langle t, c \rangle$.
4. Les transpositions $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$ engendrent-elles $\mathcal{S}_4$? Quel est le sous-groupe qu'elles engendrent?

Exercice 22 : Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$

- Montrez que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ est un sous-groupe cyclique de $\mathbb{C}^*$ d'ordre n .
- Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, d'ordre n . Montrez que $G = \mathbb{U}_n$. En déduire que tout sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$ est cyclique.
- Montrez que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_d$ avec $d = \text{pgcd}(m, n)$. Illustrez avec $m = 4$ et $n = 6$.
- On suppose $\text{pgcd}(m, n) = 1$. Montrez que $(z, w) \rightarrow zw$ est une bijection de $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$ sur $\mathbb{U}_{mn}$.
- Soit $\mathbb{U}_\infty$ la réunion des $\mathbb{U}_n$, $n \geq 1$. Montrez que c'est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$ dont tous les éléments sont d'ordre fini. Est-il monogène?

Exercice 23 : Problème, sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $\alpha = \inf (H \cap \mathbb{R}_+^*)$.

- Justifiez que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, donc que α existe et que $\alpha \geq 0$.
- On suppose $\alpha > 0$. Montrez que $\alpha \in H$. On pourra raisonner par l'absurde et trouver deux

éléments de H dans $]a, 2a[$.

3. Toujours si $a > 0$, montrez que $H = a\mathbb{Z}$.

4. On suppose $a = 0$. Montrez que H est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle $]x, y[$ avec $x < y$ contient un élément de H .

5. Montrez que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.

6. En déduire que l'ensemble des parties fractionnaires $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, $n \in \mathbb{Z}$, est dense dans $[0, 1]$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [groupes, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Arithmétique et anneau \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$](#)
- Chapitre précédent : [Arithmétique et anneau \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$](#)
- Chapitre suivant : [Normes et topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#)
- Le même thème en maths spé : [groupes, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)