

Groupes et actions

Exercice 1 : Sous-groupes distingués de S_3

On considère le groupe symétrique S_3 des permutations de $\{1, 2, 3\}$.

1. Donnez la liste des six éléments de S_3 avec leur ordre, puis la liste de tous ses sous-groupes.
2. Déterminez, parmi ces sous-groupes, ceux qui sont distingués.
3. Montrez que S_3/A_3 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à l'aide d'un morphisme bien choisi.
4. Existe-t-il un morphisme surjectif de S_3 sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$? Justifiez.

Exercice 2 : Le groupe spécial linéaire

Soit $n \geq 1$. On note $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1, et $GL_n^+(\mathbb{R})$ celui des matrices de déterminant strictement positif.

1. Montrez que $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrez que $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.
3. Montrez que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est distingué dans $GL_n(\mathbb{R})$, et identifiez le quotient $GL_n(\mathbb{R})/GL_n^+(\mathbb{R})$.
4. Pour $n = 2$, montrez que le sous-groupe T des matrices triangulaires supérieures inversibles n'est pas distingué dans $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Sous-groupes d'indice 2

Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2 de G .

1. Montrez que H est distingué dans G .
2. Dédisez-en que A_n est distingué dans S_n pour $n \geq 2$, et que le sous-groupe des rotations est distingué dans le groupe diédral D_n .
3. Montrez que $g^2 \in H$ pour tout $g \in G$.
4. Application : montrez que A_4 n'a aucun sous-groupe d'ordre 6. On pourra observer que tout 3-cycle est le carré d'un 3-cycle.

Exercice 4 : Centre et quotient cyclique

Soit G un groupe de centre $Z(G)$, et p un nombre premier.

1. Rappelez pourquoi $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G .
2. On suppose que $G/Z(G)$ est cyclique, engendré par la classe de a . Montrez que tout élément de G s'écrit $a^k z$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $z \in Z(G)$. Dédisez-en que G est abélien.
3. Soit G un groupe d'ordre p^2 . En utilisant la formule des classes, montrez que G est abélien.
4. Montrez qu'un groupe d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Isomorphismes par passage au quotient

On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des complexes de module 1, et $\mathbb{U}_n$ celui des racines n -ièmes de

l'unité. Pour chaque cas, construisez un morphisme surjectif adapté et appliquez le premier théorème d'isomorphisme.

1. $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}_+^*$.
2. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{U}$.
3. $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{U}$ pour tout $n \geq 1$.
4. $\mathbb{Z}^2/H \simeq \mathbb{Z}$, où $H = \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 6 : Quotients de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

On pose $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $K = \langle \bar{4} \rangle$.

1. Donnez les éléments de K et son ordre. Pourquoi K est-il distingué ?
2. Écrivez les classes de G/K . Montrez que G/K est cyclique d'ordre 4.
3. Montrez directement que l'application $\bar{x} \rightarrow x \bmod 4$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, est bien définie. Retrouvez alors $G/K \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et interprétez ce résultat avec le troisième théorème d'isomorphisme.
4. Identifiez de même $G/\langle \bar{6} \rangle$ et $G/\langle \bar{3} \rangle$.
5. À l'aide du lemme chinois, écrivez un isomorphisme $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et déterminez l'image de K .

Exercice 7 : Générateurs et sous-groupes de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$

On travaille dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Calculez l'ordre de $\bar{6}$, de $\bar{8}$ et de $\bar{15}$.
2. Combien $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ a-t-il de générateurs ? Donnez-les.
3. Donnez la liste de tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, avec un générateur de chacun, et décrivez leurs inclusions.
4. Déterminez les éléments d'ordre 10. Montrez que $\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{2} \rangle$.

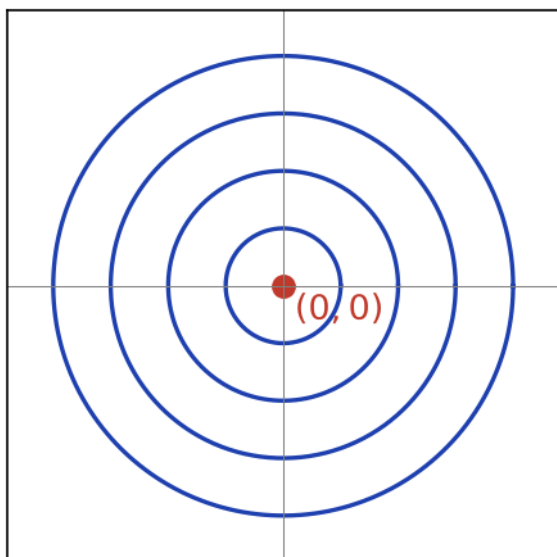
Exercice 8 : Produits de groupes cycliques

Soit $m, n \geq 1$ deux entiers.

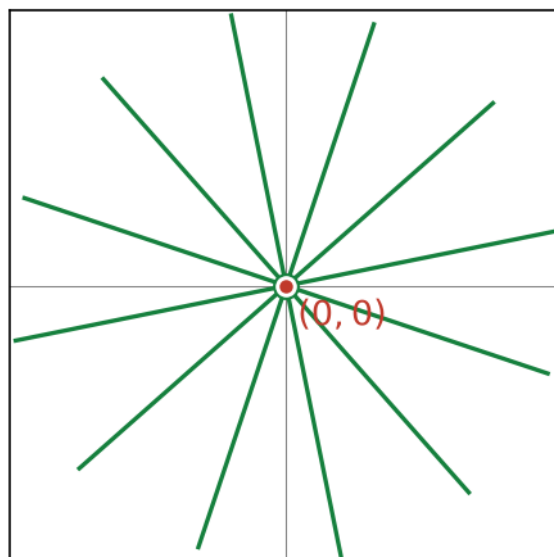
1. Montrez que l'ordre de (a, b) dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le ppcm des ordres de a et de b .
2. Montrez que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si $m \wedge n = 1$.
3. Le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est-il cyclique ? Montrez qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
4. Combien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ contient-il d'éléments d'ordre 2 ? Déduisez-en qu'il n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ par un second argument.

Exercice 9 : Orbites de quatre actions

Pour chaque action, vérifiez les axiomes, puis déterminez les orbites et les stabilisateurs. La figure ci-dessous illustre les deux premières actions.



action de $SO(2)$ par rotations



action de $\mathbb{R}^*$ par homothéties

1. Le groupe $SO(2)$ des rotations vectorielles agit sur $\mathbb{R}^2$ par $R \cdot x = Rx$.
2. Le groupe $\mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{R}^2$ par $\lambda \cdot x = \lambda x$.
3. Le groupe $GL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}^2$ par $A \cdot x = Ax$. Déterminez le stabilisateur de $e_1 = (1, 0)$.
4. Le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ agit sur $\mathbb{R}$ par $k \cdot x = x + k$. Montrez que chaque orbite rencontre $[0, 1[$ en exactement un point.

Exercice 10 : Classes de conjugaison dans S_4

On étudie l'action de S_4 sur lui-même par conjugaison.

1. Donnez les types de permutations de S_4 et le nombre d'éléments de chaque type.
2. Déduisez-en la formule des classes de S_4 et l'ordre du centralisateur de chaque type d'élément. Que vaut $Z(S_4)$?
3. Soit $V_4 = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. Montrez que V_4 est un sous-groupe distingué de S_4 , isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- Vérifiez que $\mathcal{A}_4$ est réunion de classes de conjugaison de $\mathcal{S}_4$.
- Déterminez le nombre n_3 de 3-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_4$, et vérifiez qu'il satisfait les conditions des théorèmes de Sylow.

Exercice 11 : Une permutation de $\mathcal{S}_9$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_9$ définie par le tableau suivant.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 8 & 2 & 4 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

- Décomposez σ en produit de cycles à supports disjoints.
- Calculez l'ordre et la signature de σ . Appartient-elle à $\mathcal{A}_9$?
- Calculez σ^{2026} .
- Écrivez σ comme produit de transpositions.
- Trouvez $\tau \in \mathcal{S}_9$ telle que $\tau \sigma \tau^{-1} = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$.

Exercice 12 : Parties génératrices de $\mathcal{S}_n$

Soit $n \geq 3$.

- Montrez que les transpositions $(1\ k)$, pour $2 \leq k \leq n$, engendrent $\mathcal{S}_n$.

- On pose $c = (1\ 2 \dots n)$ et $t = (1\ 2)$. Montrez que $c^k t c^{-k} = (k+1, k+2)$ pour

$$0 \leq k \leq n-2.$$

3. Déduisez-en que $\mathcal{S}_n = \langle t, c \rangle$.
4. Montrez que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à $\{\text{id}\}$.

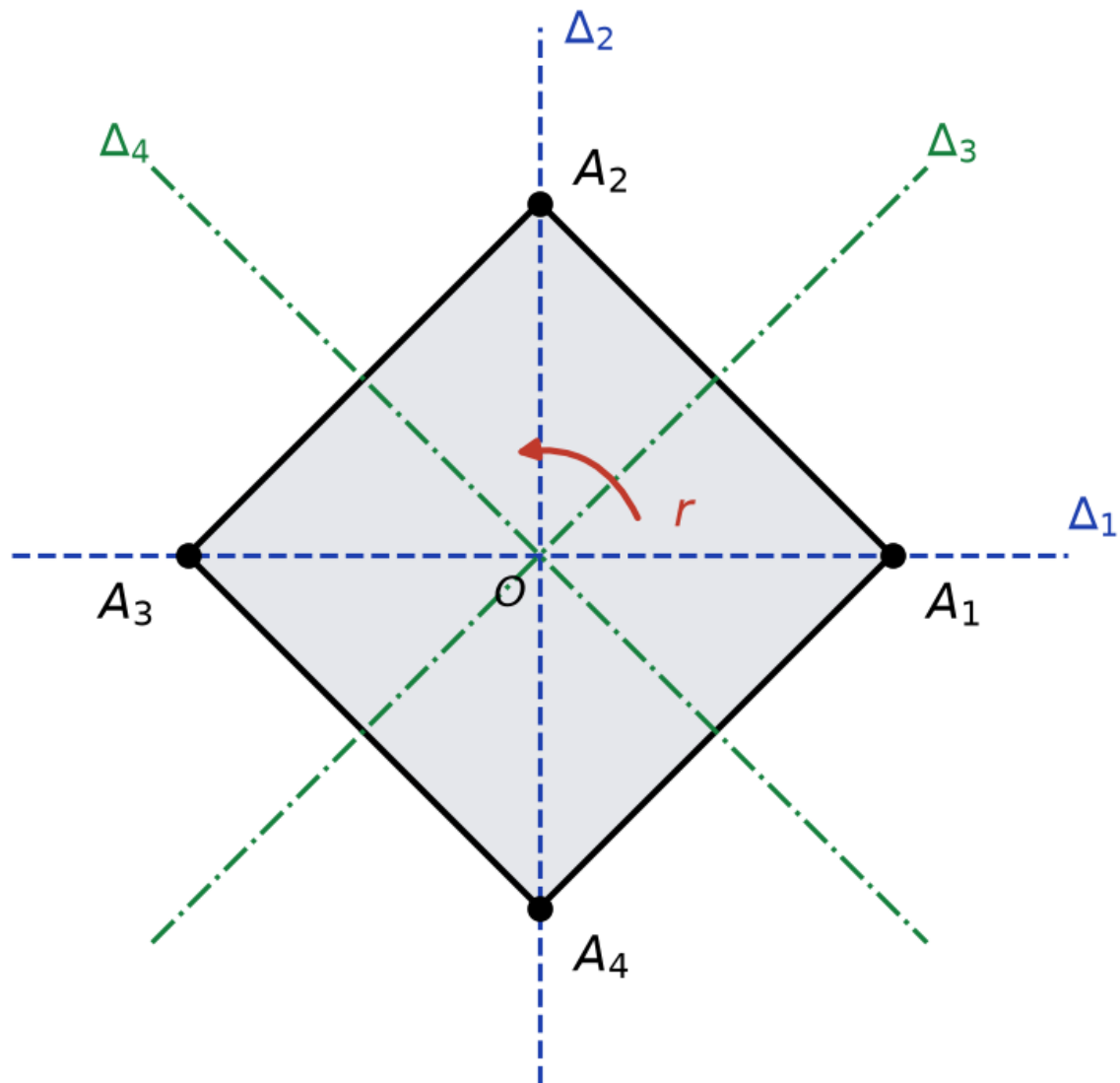
Exercice 13 : Colorier un carré avec la formule de Burnside

On colorie les quatre sommets A_1, A_2, A_3, A_4 d'un carré. Deux coloriage sont considérés comme identiques s'ils se déduisent l'un de l'autre par une isométrie d'un groupe G donné. On compte donc les orbites de G agissant sur l'ensemble X des coloriage.

1. On prend deux couleurs et $G = \langle r \rangle$, le groupe des quatre rotations du carré. Calculez $|\text{Fix}(g)|$ pour chaque $g \in G$, puis le nombre d'orbites. Décrivez chaque orbite et son cardinal.
2. Même question, sans description des orbites, avec trois couleurs.
3. On prend trois couleurs et $G = D_4$, le groupe des huit isométries du carré. Combien y a-t-il de coloriage différents ?
4. Avec deux couleurs et $G = D_4$, comparez avec la question 1 et expliquez le résultat.

Exercice 14 : Le groupe di dal D_4

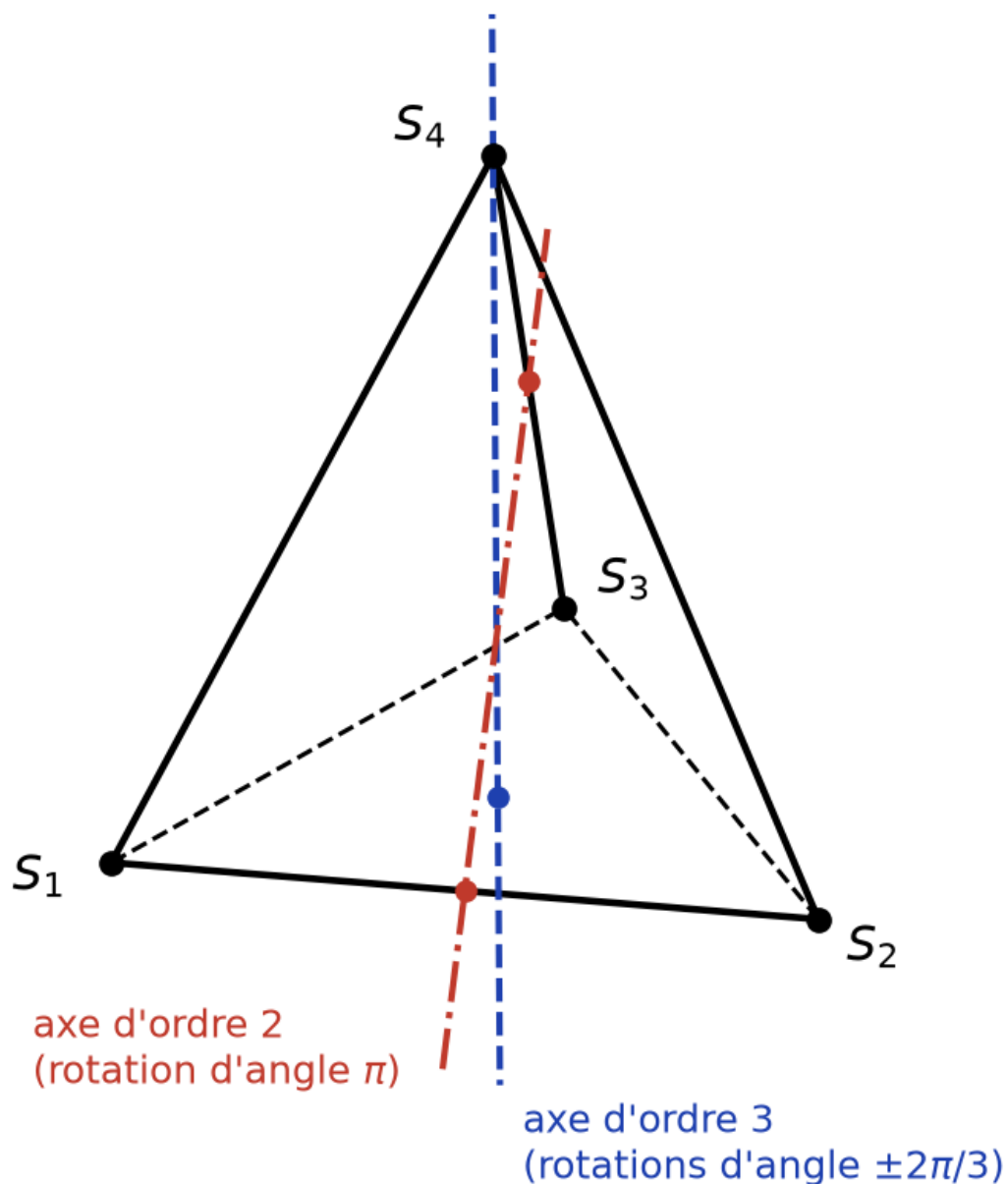
Le carré $A_1A_2A_3A_4$ de centre O est représenté ci-dessous. On note r la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$, qui envoie A_1 sur A_2 , et s_i la réflexion d'axe Δ_i pour $1 \leq i \leq 4$.



1. Écrivez s_2 , s_3 et s_4 sous la forme $s_1 r^k$.
2. Déterminez le centre de D_4 .
3. Déterminez les classes de conjugaison de D_4 et écrivez sa formule des classes.
4. Donnez les trois sous-groupes d'ordre 4 de D_4 . Sont-ils distingués ?
5. Identifiez le groupe quotient $D_4/Z(D_4)$.
6. En faisant agir D_4 sur les quatre sommets, montrez que D_4 est isomorphe à un 2-sous-groupe de Sylow de S_4 .

Exercice 15 : Rotations du tétraèdre régulier

Soit T un tétraèdre régulier de sommets S_1, S_2, S_3, S_4 et de centre O . On note G le groupe des rotations de l'espace qui conservent T . La figure montre deux types d'axes de rotation.



1. Décrivez les rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, puis les demi-tours d'axe joignant les milieux de deux arêtes opposées. Combien en obtient-on, en comptant l'identité ?
2. Montrez que G agit transitivement sur les sommets. Déterminez le stabilisateur de S_4 et

déduisez-en $|G|$.

- Montrez que l'action sur les sommets fournit un morphisme injectif $G \rightarrow S_4$, puis que $G \simeq A_4$.
- Déterminez l'orbite et le stabilisateur de l'arête $[S_1 S_2]$ pour l'action de G sur les six arêtes.

Exercice 16 : Action sur les classes à gauche

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice n . Le groupe G agit sur G/H par $g \cdot (xH) = gxH$. On note $\rho : G \rightarrow S(G/H)$ le morphisme associé et $K = \ker \rho$.

- Montrez que $K = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$. Déduisez-en que K est un sous-groupe distingué de G contenu dans H .
- Montrez que $[G : K]$ divise $n!$.
- On suppose $H \neq G$ et $|G|$ ne divisant pas $n!$. Montrez que G n'est pas simple.
Application : un groupe d'ordre 36 possédant un sous-groupe d'ordre 9.
- Soit p le plus petit nombre premier divisant $|G|$. Montrez que tout sous-groupe d'indice p est distingué.
- Application : un groupe d'ordre 45 possède-t-il un sous-groupe d'ordre 15 non distingué ?

Exercice 17 : Théorème de Cauchy par une action

Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$. On pose

$$X = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \dots x_p = e\}.$$

- Montrez que $|X| = |G|^{p-1}$.

- Montrez que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur X par permutation circulaire :

$$\bar{1} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_2, \dots, x_p, x_1).$$
- Quels sont les cardinaux possibles des orbites ? Décrivez les points fixes de l'action.
- Démontrez le théorème de Cauchy : G possède un élément d'ordre p .
- Application : soit q un nombre premier impair et G un groupe d'ordre $2q$. Montrez que G possède un unique sous-groupe d'ordre q , et que celui-ci est distingué.

Exercice 18 : Groupes d'ordre 35

Soit G un groupe d'ordre 35.

- Déterminez n_5 et n_7 .
- Soit P le 5-Sylow et Q le 7-Sylow. Montrez que P et Q sont distingués et que $P \cap Q = \{e\}$.
- Montrez que tout élément de P commute avec tout élément de Q .
- Déduisez-en que G est cyclique.
- Généralisation : soit $p < q$ deux nombres premiers tels que p ne divise pas $q - 1$. Montrez que tout groupe d'ordre pq est cyclique.

Exercice 19 : Groupes d'ordre 20 et 30 non simples

- Montrez qu'un groupe d'ordre 20 possède un sous-groupe distingué d'ordre 5.
- Soit G un groupe d'ordre 30. Donnez les valeurs possibles de n_3 et de n_5 .
- En comptant les éléments d'ordre 3 et d'ordre 5, montrez que $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$.

4. Soit P_3 un 3-Sylow et P_5 un 5-Sylow. Montrez que $P_3 P_5$ est un sous-groupe d'ordre 15, distingué dans G .
5. Montrez finalement que $n_3 = n_5 = 1$.

Exercice 20 : Problème, simplicité de A_5

Ce problème démontre que le groupe alterné A_5 , d'ordre 60, est simple.

1. Donnez les types de permutations paires de S_5 et le nombre d'éléments de chaque type.
2. Soit $\sigma \in A_5$. On note $C_S(\sigma)$ son centralisateur dans S_5 et $C_A(\sigma) = C_S(\sigma) \cap A_5$ son centralisateur dans A_5 . Montrez que :
 - si $C_S(\sigma)$ contient une permutation impaire, la classe de σ dans A_5 est égale à sa classe dans S_5 ;
 - sinon, la classe de σ dans A_5 a deux fois moins d'éléments que sa classe dans S_5 .
3. Déduisez-en les classes de conjugaison de A_5 et leurs cardinaux : 1, 20, 15, 12, 12.
4. Soit N un sous-groupe distingué de A_5 . Expliquez pourquoi $|N|$ est une somme de cardinaux de classes contenant 1, et divise 60.
5. Concluez que A_5 est simple. Déduisez-en que A_5 n'a pas de sous-groupe d'ordre 30.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [groupes et actions, cours de maths en L3](#)
- Chapitre précédent : [Espaces \$L^p\$](#)
- Chapitre suivant : [Anneaux, idéaux et arithmétique](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)