

Groupes et actions

Corrigé de l'exercice 1 : Sous-groupes distingués de S_3

1. Les éléments de S_3 sont id (ordre 1), les trois transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$ (ordre 2) et les deux 3-cycles $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$ (ordre 3). D'après le théorème de Lagrange, un sous-groupe a pour ordre 1, 2, 3 ou 6. Un sous-groupe d'ordre 2 est engendré par une transposition. Un sous-groupe d'ordre 3 est engendré par un 3-cycle ; or les deux 3-cycles engendrent le même groupe $A_3 = \{[\text{id}], (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. **Les sous-groupes sont donc $\{\text{id}\}$, $\langle (1\ 2) \rangle$, $\langle (1\ 3) \rangle$, $\langle (2\ 3) \rangle$, A_3 et S_3 .**
2. Les sous-groupes triviaux $\{\text{id}\}$ et S_3 sont distingués. Ensuite, A_3 est d'indice 2, donc distingué. En revanche, $(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)^{-1} = (3\ 2)$ n'appartient pas à $\langle (1\ 2) \rangle$. De même, pour a, b, c distincts, $(a\ c)(a\ b)(a\ c) = (c\ b)$, donc aucun sous-groupe d'ordre 2 n'est distingué. **Les sous-groupes distingués sont $\{\text{id}\}$, A_3 et S_3 .**
3. La signature $\varepsilon : S_3 \rightarrow \{-1, 1\}$ est un morphisme. Il est surjectif, car $\varepsilon((1\ 2)) = -1$. Son noyau est A_3 par définition. D'après le premier théorème d'isomorphisme, $S_3/A_3 \simeq \{-1, 1\}$. **Ainsi, $S_3/A_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**
4. Supposons qu'il existe un morphisme surjectif $f : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Alors $S_3/\ker f \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, donc $|\ker f| = 6/3 = 2$. Or $\ker f$ est distingué, et aucun sous-groupe d'ordre 2 ne l'est. **Il n'existe donc pas de tel morphisme.**

Point de méthode : un quotient G/N correspond toujours à un sous-groupe distingué N . Chercher les quotients possibles revient donc à chercher les sous-groupes distingués.

Corrigé de l'exercice 2 : Le groupe spécial linéaire

1. Le déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes, car $\det(AB) = \det A \det B$. Son noyau est $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. **Par conséquent, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué.**
2. Le morphisme $\det$ est surjectif : pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$ a pour déterminant λ . Le premier théorème d'isomorphisme donne alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.
3. L'application $\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^* \rightarrow \{-1, 1\}$, qui donne le signe, est un morphisme. Donc $A \mapsto \mathrm{sgn}(\det A)$ est un morphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\{-1, 1\}$, de noyau $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Il est surjectif, car $\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ a un déterminant négatif. Ainsi, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est distingué, d'indice 2. **Le quotient est isomorphe à $\{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**
4. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $P^{-1} = P$. Multiplier à gauche par P échange les lignes, et multiplier à droite échange les colonnes. On obtient

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas triangulaire supérieure. **Donc T n'est pas distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Sous-groupes d'indice 2

1. Les classes à gauche forment une partition de G en deux parties. L'une est $H = eH$, donc l'autre est $G \setminus H$. Le même raisonnement vaut pour les classes à droite. Soit $g \in G$. Si $g \in H$, alors $gH = H = Hg$. Si $g \notin H$, alors $gH \neq H$, donc $gH = G \setminus H$; de même $Hg = G \setminus H$. Dans tous les cas, $gH = Hg$, c'est-à-dire $gHg^{-1} = H$. **Ainsi, H est distingué.**
2. La signature est surjective sur $\{-1, 1\}$ pour $n \geq 2$, de noyau $\mathcal{A}_n$. Donc $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$, et $\mathcal{A}_n$ est distingué. De même, le sous-groupe des rotations de D_n est d'ordre n , dans un groupe d'ordre $2n$. **Il est d'indice 2, donc distingué.**
3. D'après la question 1, le quotient G/H est un groupe d'ordre 2. Tout élément d'un groupe

d'ordre 2 a un carré égal au neutre. Donc $(gH)^2 = g^2 H = H$. **Par conséquent,**
 $g^2 \in H$.

4. Supposons que H soit un sous-groupe d'ordre 6 de A_4 . Il est d'indice $12/6 = 2$, donc il contient tous les carrés d'éléments de A_4 d'après la question 3. Or un 3-cycle c vérifie $c^3 = \text{id}$, d'où $c = c^4 = (c^2)^2$, avec $c^2 \in A_4$. Ainsi, H contient les huit 3-cycles de A_4 et l'identité, soit au moins 9 éléments. **C'est absurde : A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.**

Point de méthode : cet exemple montre que la réciproque du théorème de Lagrange est fausse, puisque 6 divise 12.

Corrigé de l'exercice 4 : Centre et quotient cyclique

1. Le centre est un sous-groupe : il contient e , et il est stable par produit et par inverse. De plus, pour $z \in Z(G)$ et $g \in G$, on a $gzg^{-1} = zgg^{-1} = z \in Z(G)$. **Donc $Z(G)$ est distingué.**

2. Notons $\pi : G \rightarrow G/Z(G)$ la projection. Pour $g \in G$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi(g) = \pi(a)^k = \pi(a^k)$. Donc $z = a^{-k} g \in Z(G)$, soit $g = a^k z$. Prenons alors $g = a^k z$ et $g' = a^l z'$. Comme z et z' sont centraux,

$$gg' = a^k a^l z z' = a^{k+l} z z' = a^l a^k z' z = g' g.$$

Donc G est abélien.

3. D'après le corollaire de la formule des classes, $Z(G) \neq \{e\}$. Par Lagrange, $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. Supposons $|Z(G)| = p$. Alors $G/Z(G)$ est d'ordre p premier, donc cyclique. La question 2 montre que G est abélien, d'où $Z(G) = G$, ce qui contredit $|Z(G)| = p$. **Ainsi, $Z(G) = G$ et G est abélien.**

4. Si G possède un élément d'ordre p^2 , il est cyclique, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sinon, tout élément $x \neq e$ est d'ordre p . Choisissons $x \neq e$, puis $y \notin \langle x \rangle$. L'application $f : (\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow x^a y^b$ est bien définie, car $x^p = y^p = e$. C'est un morphisme, puisque G est abélien. Ensuite, $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est un sous-groupe de $\langle y \rangle$, distinct de $\langle y \rangle$, donc trivial. Si $x^a y^b = e$, alors $y^b = x^{-a}$ est dans cette intersection. Donc $y^b = e$ puis $x^a = e$, et $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$. Le morphisme f est injectif entre deux ensembles de cardinal p^2 . **Par conséquent, $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Isomorphismes par passage au quotient

1. Posons $f(z) = |z|$. C'est un morphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, car $|zw| = |z||w|$. Il est surjectif, puisque $f(r) = r$ pour $r > 0$. Son noyau est $\{z \mid |z| = 1\} = \mathbb{U}$. **Donc** $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}_+^*$.
2. Posons $g(z) = z/|z|$. On a $g(zw) = \frac{zw}{|z||w|} = g(z)g(w)$. De plus, $g(u) = u$ pour $u \in \mathbb{U}$, donc g est surjectif sur $\mathbb{U}$. Enfin, $g(z) = 1$ équivaut à $z = |z|$, c'est-à-dire $z \in \mathbb{R}_+^*$. **Ainsi**, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{U}$.
3. Posons $h(z) = z^n$ sur $\mathbb{U}$. Comme $\mathbb{U}$ est commutatif, h est un morphisme. Il est surjectif : $e^{i\theta} = h(e^{i\theta/n})$. Son noyau est $\mathbb{U}_n$. **Donc** $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{U}$. On remarque qu'un groupe peut être isomorphe à l'un de ses quotients stricts, ce qui est impossible pour un groupe fini.
4. Posons $\varphi(a, b) = a - b$. C'est un morphisme de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$, surjectif car $\varphi(k, 0) = k$. Son noyau est $\{(a, b) \mid a = b\} = H$. **Par conséquent**, $\mathbb{Z}^2/H \simeq \mathbb{Z}$.

Point de méthode : on ne manipule jamais les classes. On exhibe un morphisme surjectif dont le noyau est le sous-groupe voulu.

Corrigé de l'exercice 6 : Quotients de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

1. On a $K = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, car $3 \cdot \bar{4} = \bar{12} = \bar{0}$. **Ainsi**, K est d'ordre 3 ; il est distingué, car G est abélien.
2. Il y a $12/3 = 4$ classes :
$$K = \{0, 4, 8\}, 1 + K = \{1, 5, 9\}, 2 + K = \{2, 6, 10\}, 3 + K = \{3, 7, 11\}.$$
Ensuite, $k(\bar{1} + K) = K$ équivaut à $\bar{k} \in K$, soit $4 \mid k$. L'ordre de $\bar{1} + K$ vaut donc 4, c'est-à-dire l'ordre du quotient. **Ainsi**, G/K est cyclique d'ordre 4, engendré par $\bar{1} + K$.
3. Si $x \equiv y \pmod{12}$, alors $12 \mid x - y$, donc $4 \mid x - y$. L'application est donc bien définie.

C'est un morphisme additif, surjectif, et son noyau est formé des $\bar{x}$ avec $4 \mid x$, soit K . Le premier théorème d'isomorphisme donne $G/K \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. En termes de troisième théorème, on a $12\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ et $K = 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. On retrouve $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

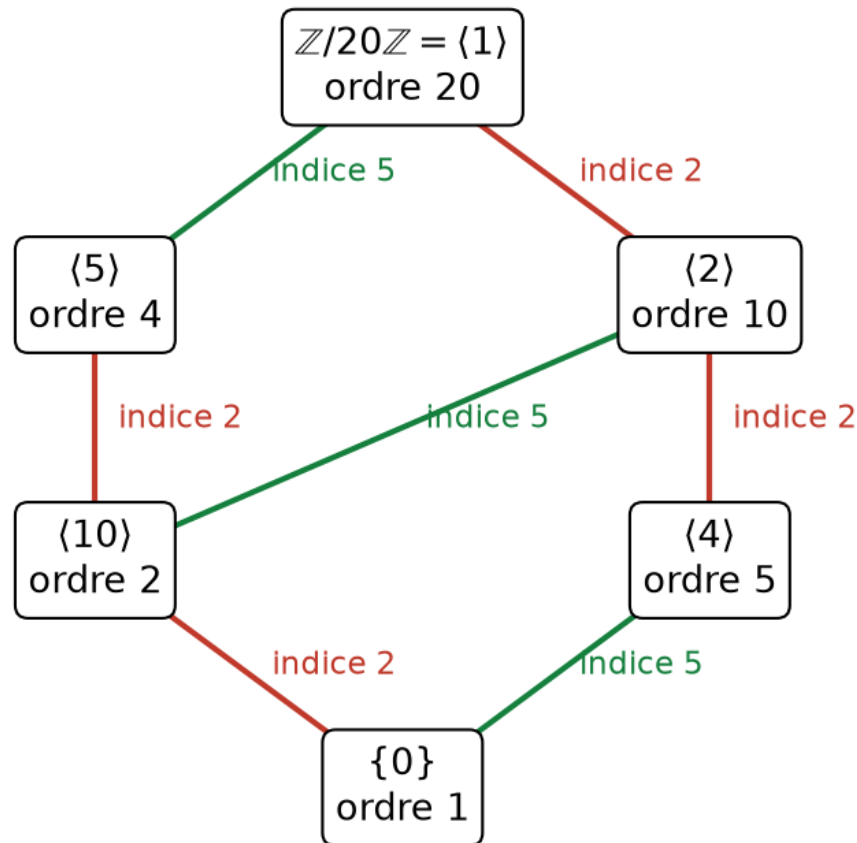
4. De même, $\langle \bar{6} \rangle = 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $\langle \bar{3} \rangle = 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Donc $G/\langle \bar{6} \rangle \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $G/\langle \bar{3} \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5. Comme $4 \wedge 3 = 1$, le lemme chinois fournit l'isomorphisme $\psi: \bar{x} \rightarrow (x \bmod 4, x \bmod 3)$. On calcule $\psi(\bar{0}) = (0, 0)$, $\psi(\bar{4}) = (0, 1)$ et $\psi(\bar{8}) = (0, 2)$. Donc $\psi(K) = \{0\} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et le quotient par ce facteur redonne bien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Générateurs et sous-groupes de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$

1. L'ordre de $\bar{k}$ vaut $20/(k \wedge 20)$. Ainsi, $\bar{6}$ est d'ordre $20/2 = 10$, $\bar{8}$ d'ordre $20/4 = 5$ et $\bar{15}$ d'ordre $20/5 = 4$. **Les ordres sont 10, 5 et 4.**
2. Les générateurs sont les $\bar{k}$ avec $k \wedge 20 = 1$. Leur nombre est $\varphi(20) = 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 8$. **Ce sont $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{19}$.**
3. Il y a un unique sous-groupe par diviseur d de 20, engendré par $\overline{20/d}$. On obtient :
 - ordre 1 : $\{\bar{0}\}$; ordre 2 : $\langle \bar{10} \rangle = \{0, 10\}$;
 - ordre 4 : $\langle \bar{5} \rangle = \{0, 5, 10, 15\}$; ordre 5 : $\langle \bar{4} \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16\}$;
 - ordre 10 : $\langle \bar{2} \rangle$, les classes paires ; ordre 20 : le groupe entier.

Un sous-groupe d'ordre d est inclus dans un sous-groupe d'ordre d' si et seulement si $d \mid d'$. En effet, le sous-groupe d'ordre d' est cyclique, donc il contient un sous-groupe d'ordre d , qui est le seul de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. **Le treillis des sous-groupes est représenté ci-dessous.**



4. On cherche k tel que $k \wedge 20 = 2$. Alors $k = 2j$ avec $j \wedge 10 = 1$, soit $j \in \{1, 3, 7, 9\}$. **Les éléments d'ordre 10 sont $\bar{2}, \bar{6}, \bar{14}, \bar{18}$.** Enfin, $\langle \bar{6} \rangle$ et $\langle \bar{2} \rangle$ sont deux sous-groupes d'ordre 10. Par unicité, $\langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{2} \rangle$.

Corrigé de l'exercice 8 : Produits de groupes cycliques

- Notons α et β les ordres de a et de b . Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $k(a, b) = (0, 0)$ si et seulement si $ka = 0$ et $kb = 0$, c'est-à-dire $\alpha \mid k$ et $\beta \mid k$. Cela équivaut à $\text{ppcm}(\alpha, \beta) \mid k$. **L'ordre de (a, b) est donc $\text{ppcm}(\alpha, \beta)$.**
- Si $m \wedge n = 1$, le lemme chinois donne un isomorphisme avec $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, qui est cyclique. Réciproquement, supposons $d = m \wedge n > 1$. Les ordres α et β divisent m et n . Donc l'ordre de (a, b) divise $\text{ppcm}(m, n) = mn/d < mn$. Aucun élément n'est d'ordre mn . **Le**

produit est cyclique si et seulement si $m \wedge n = 1$.

3. Ici, $4 \wedge 6 = 2$, donc $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ **n'est pas cyclique** ; ses éléments sont d'ordre au plus 12. Ensuite, le lemme chinois donne $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. En réordonnant les facteurs,

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

L'isomorphisme annoncé est établi.

4. Un élément (a, b) vérifie $2(a, b) = 0$ si et seulement si $a \in \{\bar{0}, \bar{2}\}$ et $b \in \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Il y a donc 4 tels éléments, dont le neutre. **Il y a 3 éléments d'ordre 2.** Or $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ n'en a qu'un, à savoir $\bar{12}$, car il a un unique sous-groupe d'ordre 2. Les deux groupes ne sont donc pas isomorphes.

Corrigé de l'exercice 9 : Orbites de quatre actions

- On a $I_2 x = x$ et $R(R'x) = (RR')x$: c'est une action. Une rotation conserve la norme. Réciproquement, si $|y| = |x| = \rho > 0$, la rotation d'angle $\arg y - \arg x$ envoie x sur y . **L'orbite de $x \neq 0$ est le cercle de centre 0 et de rayon $|x|$, celle de 0 est $\{0\}$.** Ensuite, une rotation qui fixe un vecteur non nul est d'angle nul. Le stabilisateur de $x \neq 0$ est donc $\{I_2\}$, et celui de 0 est $SO(2)$.
- On a $1 \cdot x = x$ et $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. Pour $x \neq 0$, l'orbite est $\left\{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}$. **C'est la droite $\mathbb{R}x$ privée de l'origine ; l'orbite de 0 est $\{0\}$.** Si $x \neq 0$, $\lambda x = x$ donne $(\lambda - 1)x = 0$, donc $\lambda = 1$: le stabilisateur est $\{1\}$. Celui de 0 est $\mathbb{R}^*$.
- Les axiomes se vérifient comme en 1. Soit $x \neq 0$. On complète x en une base (x, y) de $\mathbb{R}^2$. La matrice A de colonnes x et y est inversible, et $Ae_1 = x$. **Il y a donc deux orbites : $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.** Enfin, $Ae_1 = x$ signifie que la première colonne de A est e_1 . **Le stabilisateur de e_1 est** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}, d \neq 0 \right\}$.
- On a $0 \cdot x = x$ et $k \cdot (l \cdot x) = x + l + k = (k + l) \cdot x$. L'orbite de x est $x + \mathbb{Z}$. Elle contient $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$. De plus, deux points de $[0, 1[$ qui diffèrent d'un entier sont égaux, car leur différence est dans $] -1, 1[$. **Chaque orbite rencontre $[0, 1[$ en exactement un point**, et tous les stabilisateurs sont réduits à $\{0\}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Classes de conjugaison dans S_4

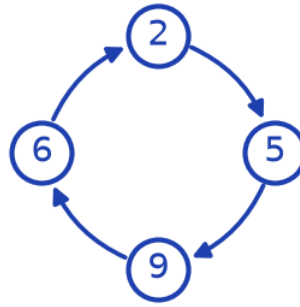
1. On dénombre les types. Il y a l'identité (1 élément), les transpositions ($\binom{4}{2} = 6$), les doubles transpositions (3), les 3-cycles ($4 \times 2 = 8$) et les 4-cycles ($3! = 6$). **On vérifie que**
 $1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24$.
2. Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type. Les classes sont donc les cinq types, et **la formule des classes s'écrit** $24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6$. D'après la relation orbite-stabilisateur, le centralisateur d'un élément a pour ordre 24 divisé par le cardinal de sa classe. On trouve 24 pour l'identité, 4 pour une transposition, 8 pour une double transposition, 3 pour un 3-cycle et 4 pour un 4-cycle. Le centre est la réunion des classes à un élément. **Donc**
 $Z(S_4) = \{\text{id}\}$.
3. Chaque élément non trivial de V_4 est son propre inverse. De plus, en composant de droite à gauche, $(1\ 2)(3\ 4) \circ (1\ 3)(2\ 4)$ envoie $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$. C'est donc $(1\ 4)(2\ 3)$. Par symétrie, le produit de deux éléments non triviaux distincts est le troisième, et V_4 est un sous-groupe commutatif. Ensuite, V_4 est la réunion de deux classes de conjugaison. Il est donc stable par conjugaison, **donc distingué**. Enfin, V_4 est d'ordre 4 sans élément d'ordre 4 : il n'est pas cyclique. **D'après l'exercice 4, il est isomorphe à**
 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Les permutations paires sont l'identité, les doubles transpositions et les 3-cycles. Les transpositions et les 4-cycles sont impairs. **Ainsi, A_4 est la réunion de trois classes : $1 + 3 + 8 = 12$ éléments.**
5. On a $24 = 2^3 \times 3$. Un 3-sous-groupe de Sylow est d'ordre 3, donc engendré par un 3-cycle, et il contient exactement deux 3-cycles. Deux tels sous-groupes distincts ne partagent que l'identité. **Il y a donc $n_3 = 8/2 = 4$ sous-groupes de Sylow d'ordre 3.** On vérifie que 4 divise 8 et que $4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Une permutation de S_9

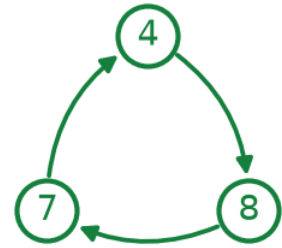
1. On suit les images à partir de 1 : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. On repart de 2 : $2 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 2$. Enfin, à partir de 4 : $4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 4$. Tous les points sont atteints. **Donc**
 $\sigma = (1\ 3)(2\ 5\ 9\ 6)(4\ 8\ 7)$. La figure ci-dessous montre ces trois cycles.



(1 3) : longueur 2



(2 5 9 6) : longueur 4



(4 8 7) : longueur 3

- L'ordre est le ppcm des longueurs : $\text{ppcm}(2, 4, 3) = 12$. La signature vaut $(-1)^1 \times (-1)^3 \times (-1)^2 = 1$. **Ainsi, σ est d'ordre 12, de signature 1, et $\sigma \in \mathcal{A}_9$.**
- On a $2026 = 12 \times 168 + 10$, donc $\sigma^{2026} = \sigma^{10}$. Les cycles commutent, et l'on réduit chaque exposant modulo la longueur du cycle. D'abord, $(1\ 3)^{10} = \text{id}$. Ensuite, $(2\ 5\ 9\ 6)^{10} = (2\ 5\ 9\ 6)^2 = (2\ 9)(5\ 6)$. Enfin, $(4\ 8\ 7)^{10} = (4\ 8\ 7)$. **Donc $\sigma^{2026} = (2\ 9)(5\ 6)(4\ 8\ 7)$.**
- Un cycle $(a_1 \dots a_k)$ vaut $(a_1\ a_2)(a_2\ a_3) \dots (a_{k-1}\ a_k)$. Par exemple, $(2\ 5)(5\ 9)(9\ 6)$ envoie bien $2 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 9$, $9 \rightarrow 6$ et $6 \rightarrow 2$. **On obtient $\sigma = (1\ 3)(2\ 5)(5\ 9)(9\ 6)(4\ 8)(8\ 7)$, produit de six transpositions, ce qui confirme la signature.**
- On utilise $\tau(a_1 \dots a_k)\tau^{-1} = (\tau(a_1) \dots \tau(a_k))$. Il suffit d'envoyer terme à terme $(1\ 3)$ sur $(1\ 2)$, $(2\ 5\ 9\ 6)$ sur $(3\ 4\ 5\ 6)$ et $(4\ 8\ 7)$ sur $(7\ 8\ 9)$. **On prend $\tau(1) = 1$, $\tau(3) = 2$, $\tau(2) = 3$, $\tau(5) = 4$, $\tau(9) = 5$, $\tau(6) = 6$, $\tau(4) = 7$, $\tau(8) = 8$ et $\tau(7) = 9$. C'est bien une bijection de $\{1, \dots, 9\}$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Parties génératrices de S_n

- Soit i et j deux éléments distincts, tous deux différents de 1. La formule de conjugaison donne $(1\ i)(1\ j)(1\ i)^{-1} = (i\ j)$, car $(1\ i)$ envoie 1 sur i et fixe j . Ainsi, toute transposition est un produit de transpositions $(1\ k)$. **Comme les transpositions engendrent S_n , les $(1\ k)$ l'engendrent aussi.**

2. On a $c^k(1) = k + 1$ et $c^k(2) = k + 2$ pour $k + 2 \leq n$. La formule de conjugaison $c^k t c^{-k} = (c^k(1) \ c^k(2))$, donne alors $(k+1 \ k+2)$.

3. Le sous-groupe $\langle t, c \rangle$ contient donc toutes les transpositions $(j \ j+1)$. Montrons par récurrence qu'il contient $(1 \ k)$ pour $2 \leq k \leq n$. Pour $k = 2$, c'est t . Si $(1 \ k) \in \langle t, c \rangle$ avec $k \leq n - 1$, alors $(k \ k+1)(1 \ k)(k \ k+1) = (1 \ k+1)$, car $(k \ k+1)$ fixe 1 et envoie k sur $k+1$. **D'après la question 1, $\langle t, c \rangle = \mathcal{S}_n$.**

4. Soit $\sigma \neq \text{id}$. Il existe i tel que $j = \sigma(i) \neq i$. Comme $n \geq 3$, on choisit $k \notin \{i, j\}$ et on pose $\tau = (j \ k)$. D'une part, $\sigma\tau(i) = \sigma(i) = j$, car τ fixe i . D'autre part, $\tau\sigma(i) = \tau(j) = k \neq j$. Donc σ ne commute pas avec τ . **Le centre de $\mathcal{S}_n$ est $\{\text{id}\}$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Colorier un carré avec la formule de Burnside

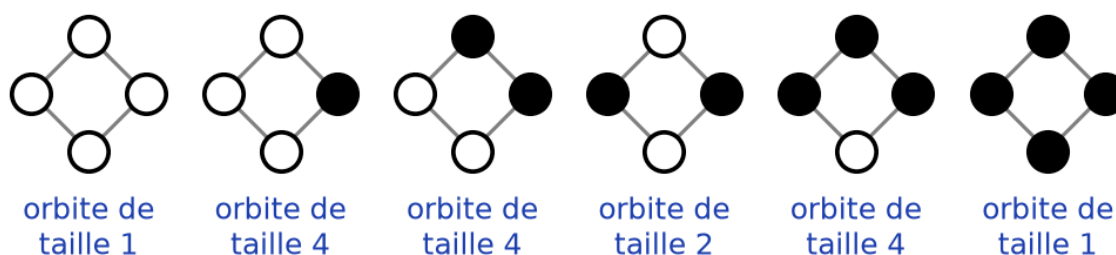
Avec c couleurs, $|X| = c^4$. Un coloriage est fixé par une isométrie g si et seulement s'il est constant sur chaque cycle de la permutation des sommets induite par g . Ainsi, $|\text{Fix}(g)| = c^{m(g)}$, où $m(g)$ est le nombre de cycles, points fixes compris.

1. L'identité a 4 cycles, $r = (A_1 A_2 A_3 A_4)$ et r^3 en ont un seul, et $r^2 = (A_1 A_3)(A_2 A_4)$ en a deux. Avec $c = 2$, la formule de Burnside donne

$$\frac{16 + 2 + 4 + 2}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Il y a 6 orbites. On les décrit par le nombre de sommets noirs. Aucun ou quatre sommets noirs : deux orbites d'un élément. Un ou trois sommets noirs : deux orbites de 4 éléments. Deux sommets noirs adjacents : une orbite de 4 éléments. Deux sommets noirs opposés : une orbite de 2 éléments. On vérifie que $1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 1 = 16$. La figure ci-dessous donne un représentant de

chaque orbite.



2. Avec $c = 3$, on obtient $\frac{81 + 3 + 9 + 3}{4} = \frac{96}{4} = 24$. **Il y a 24 coloriages différents à rotation près.**

3. On ajoute les réflexions. Les réflexions s_1 et s_2 , d'axes passant par deux sommets, fixent deux sommets et échangent les deux autres : 3 cycles chacune. Les réflexions s_3 et s_4 , d'axes passant par les milieux des côtés, échangent deux paires de sommets : 2 cycles chacune. Donc

$$\frac{96 + 2 \times 27 + 2 \times 9}{8} = \frac{168}{8} = 21.$$

Il y a 21 coloriages différents sous l'action de D_4 .

4. Avec deux couleurs et D_4 , on obtient $\frac{24 + 2 \times 8 + 2 \times 4}{8} = \frac{48}{8} = 6$. **On retrouve 6 orbites.** En effet, chaque représentant de la figure est fixé par une réflexion s . Or $D_4 = \langle r \rangle \cup \langle r \rangle s$, donc son orbite sous D_4 coïncide avec son orbite sous $\langle r \rangle$. Avec trois couleurs, ce n'est plus vrai : par exemple, le coloriage $(1, 2, 3, 3)$ n'est fixé par aucune réflexion.

Point de méthode : pour appliquer la formule de Burnside, on classe les éléments du groupe par type de permutation, puis on compte les coloriages constants sur chaque cycle.

Corrigé de l'exercice 14 : Le groupe diédral D_4

Une isométrie du carré est déterminée par l'image des sommets, puisque A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés. On raisonne donc sur les permutations des sommets, avec $r = (A_1 A_2 A_3 A_4)$ et $s_1 = (A_2 A_4)$.

- On compose de droite à gauche. D'abord, $s_1 r$ envoie $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$, $A_2 \rightarrow A_3$, $A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_2$ et $A_4 \rightarrow A_1$. C'est $(A_1 A_4)(A_2 A_3)$, la réflexion d'axe Δ_4 . Ensuite, $s_1 r^2 = (A_1 A_3)$ fixe A_2 et A_4 : c'est s_2 . Enfin, $s_1 r^3 = (A_1 A_2)(A_3 A_4)$, réflexion d'axe Δ_3 . **Donc** $s_2 = s_1 r^2$, $s_3 = s_1 r^3$ et $s_4 = s_1 r$.
- D'une part, $s_1 r^k s_1 = r^{-k}$, donc r^k commute avec s_1 si et seulement si $r^{2k} = \text{id}$, soit $k \in \{0, 2\}$. D'autre part, $r(s_1 r^k) = s_1 r^{k-1}$ et $(s_1 r^k) r = s_1 r^{k+1}$. Ces deux éléments diffèrent, car $r^2 \neq \text{id}$. Aucune réflexion n'est donc centrale. **Ainsi**, $Z(D_4) = \{\text{id}, r^2\}$.
- Les éléments centraux forment des classes à un élément. Ensuite, $s_1 r s_1^{-1} = r^{-1} = r^3$, donc $\{r, r^3\}$ est une classe. Pour les réflexions, $r^j (s_1 r^k) r^{-j} = s_1 r^{k-2j}$, et un calcul analogue donne $(s_1 r^m)(s_1 r^k)(s_1 r^m)^{-1} = s_1 r^{2m-k}$. La parité de k est conservée. **Les classes sont** $\{\text{id}\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$, $\{s_1, s_2\}$, $\{s_3, s_4\}$, **et** $8 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2$.
- Un sous-groupe d'ordre 4 est cyclique ou formé d'éléments d'ordre au plus 2. Le seul cyclique est $\langle r \rangle$. Par ailleurs, $s_1 r^a$ et $s_1 r^b$ commutent si et seulement si $r^{2(a-b)} = \text{id}$, c'est-à-dire $a - b$ pair ; leur produit vaut alors r^2 . On obtient $\{\text{id}, r^2, s_1, s_2\}$ et $\{\text{id}, r^2, s_3, s_4\}$. Aucun autre n'est possible, car le produit de deux réflexions est une rotation. **Ces trois sous-groupes sont d'indice 2, donc distingués.**
- Le quotient $D_4/Z(D_4)$ est d'ordre 4. S'il était cyclique, D_4 serait abélien d'après l'exercice 4, ce qui est faux. **Donc** $D_4/Z(D_4) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- L'action sur les sommets fournit un morphisme $\rho : D_4 \rightarrow S_4$. Il est injectif, car une isométrie qui fixe les quatre sommets est l'identité. Son image est d'ordre 8. Or $24 = 2^3 \times 3$. **Donc** $\rho(D_4)$ **est un 2-sous-groupe de Sylow de** S_4 , **isomorphe à** D_4 .

Corrigé de l'exercice 15 : Rotations du tétraèdre régulier

On travaille avec les coordonnées $S_1 = (1, 1, 1)$, $S_2 = (1, -1, -1)$, $S_3 = (-1, 1, -1)$ et $S_4 = (-1, -1, 1)$. Les six distances mutuelles valent $2\sqrt{2}$, donc ce tétraèdre est régulier, de centre O .

1. L'application $(x, y, z) \rightarrow (z, x, y)$ est orthogonale de déterminant 1, donc c'est une rotation. Elle fixe S_1 et envoie $S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_2$. C'est la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe (OS_1) , qui passe par le centre de la face opposée. Son carré est la rotation d'angle $-2\pi/3$. On obtient ainsi 2 rotations par sommet, soit 8. Ensuite, $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$ est le demi-tour d'axe (Ox) , qui joint les milieux $(1, 0, 0)$ de $[S_1S_2]$ et $(-1, 0, 0)$ de $[S_3S_4]$. Il échange $S_1 \leftrightarrow S_2$ et $S_3 \leftrightarrow S_4$. Il y a trois paires d'arêtes opposées, donc 3 demi-tours. **Avec l'identité, on obtient $1 + 8 + 3 = 12$ rotations.**
2. Les trois demi-tours envoient S_4 sur S_3 , S_2 et S_1 . L'action est donc transitive, et l'orbite de S_4 a 4 éléments. Une rotation de G fixe O , isobarycentre des sommets. Si elle fixe aussi S_4 , elle est d'axe (OS_4) ou égale à l'identité. Elle permute alors les sommets du triangle équilatéral $S_1S_2S_3$, centré sur cet axe. Seules les rotations d'angle 0 et $\pm 2\pi/3$ conviennent. **Donc $|GS_4| = 3$ et $|G| = 4 \times 3 = 12$: la liste de la question 1 est complète.**
3. L'action fournit un morphisme $\rho : G \rightarrow S_4$. Une rotation qui fixe les quatre sommets fixe un repère affine de l'espace, donc c'est l'identité : ρ est injectif. Ensuite, les rotations d'ordre 3 donnent des 3-cycles, et les demi-tours des doubles transpositions. Ces permutations sont paires, donc $\rho(G) \subset \mathcal{A}_4$. **Comme $|\rho(G)| = 12 = |\mathcal{A}_4|$, on a $G \simeq \mathcal{A}_4$.**
4. Via ρ , l'image de $\{1, 2\}$ par $(1\ 3\ 4)$ est $\{3, 2\}$, et par $(1\ 4\ 3)$ est $\{4, 2\}$. De même, $(2\ 3\ 4)$ donne $\{1, 3\}$, $(2\ 4\ 3)$ donne $\{1, 4\}$, et $(1\ 3)(2\ 4)$ donne $\{3, 4\}$. **L'orbite de $[S_1S_2]$ est l'ensemble des six arêtes.** Son stabilisateur a donc $12/6 = 2$ éléments. **C'est $\{\text{id}, h\}$, où h est le demi-tour d'axe joignant les milieux de $[S_1S_2]$ et $[S_3S_4]$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Action sur les classes à gauche

1. On a $g \in K$ si et seulement si $gxH = xH$ pour tout x , c'est-à-dire $x^{-1}gx \in H$ pour tout x . Cela équivaut à $g \in xHx^{-1}$ pour tout $x \in G$. Donc $K = \bigcap_x xHx^{-1}$. **Comme noyau, K est distingué ; le terme $x = e$ montre que $K \subset H$.**
2. Le premier théorème d'isomorphisme donne $G/K \simeq \rho(G)$, sous-groupe de $\mathcal{S}(G/H) \simeq \mathcal{S}_n$. **D'après Lagrange, $[G : K] = |\rho(G)|$ divise $n!$.**
3. Si $K = \{e\}$, alors $|G| = [G : K]$ divise $n!$, ce qui est exclu. Donc $K \neq \{e\}$. Par ailleurs, $K \subset H \neq G$. **Ainsi, K est un sous-groupe distingué propre et non trivial : G n'est pas simple.** Pour un groupe d'ordre 36 avec un sous-groupe d'ordre 9, on a $n = 4$ et $4! = 24$. Or 36 ne divise pas 24. **Un tel groupe n'est donc pas simple.**

4. Soit H d'indice p et $d = [G : K]$. D'une part, d divise $|G|$, donc ses facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à p . D'autre part, d divise $p! = p \times (p-1)!$, dont les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à p , le facteur p n'apparaissant qu'une fois. Par conséquent, $d \in \{1, p\}$. Or $d = [G : H][H : K] \geq p$. Donc $d = p$ et $[H : K] = 1$. Ainsi, $H = K$ est distingué.
5. On a $45 = 3^2 \times 5$, dont le plus petit facteur premier est 3. Un sous-groupe d'ordre 15 est d'indice 3. **D'après la question 4, il est distingué : la réponse est non.**

Corrigé de l'exercice 17 : Théorème de Cauchy par une action

1. L'application $(x_1, \dots, x_p) \rightarrow (x_1, \dots, x_{p-1})$, de X dans G^{p-1} , est bijective. En effet, la condition impose $x_p = (x_1 \dots x_{p-1})^{-1}$. Donc $|X| = |G|^{p-1}$.
2. Si $x_1 x_2 \dots x_p = e$, alors $x_2 \dots x_p x_1 = x_1^{-1} (x_1 x_2 \dots x_p) x_1 = e$. Le décalage δ envoie donc X dans X , et $\delta^p = \text{id}$. On définit une action en posant $\bar{k} \cdot x = \delta^k(x)$, ce qui ne dépend pas du représentant k .
3. Le cardinal d'une orbite divise $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$. Il vaut donc 1 ou p . Un point fixe vérifie $x_1 = x_2 = \dots = x_p$. Les points fixes sont les $(x, \dots, x)$ avec $x^p = e$.
4. La formule des classes donne $|X| = |\text{Fix}| + p \times N$, où N est le nombre d'orbites à p éléments. Or p divise $|G|$, donc $|X| = |G|^{p-1}$. Par conséquent, p divise $|\text{Fix}|$. Comme $(e, \dots, e)$ est fixe, $|\text{Fix}| \geq p \geq 2$. Il existe donc $x \neq e$ avec $x^p = e$. Puisque p est premier, x est d'ordre p .
5. D'après le théorème de Cauchy, G contient un élément d'ordre q , donc un sous-groupe P d'ordre q . Il est d'indice 2, donc distingué. Soit $Q \neq P$ un autre sous-groupe d'ordre q . Alors $P \cap Q$ est d'ordre divisant q et différent de q , donc trivial. L'application $(x, y) \rightarrow xy$, de $P \times Q$ dans G , est alors injective : $xy = x'y'$ donne $x'^{-1}x = y'y^{-1} \in P \cap Q$. On obtiendrait $q^2 > 2q$ éléments, car $q \geq 3$. C'est absurde : P est l'unique sous-groupe d'ordre q , et il est distingué.

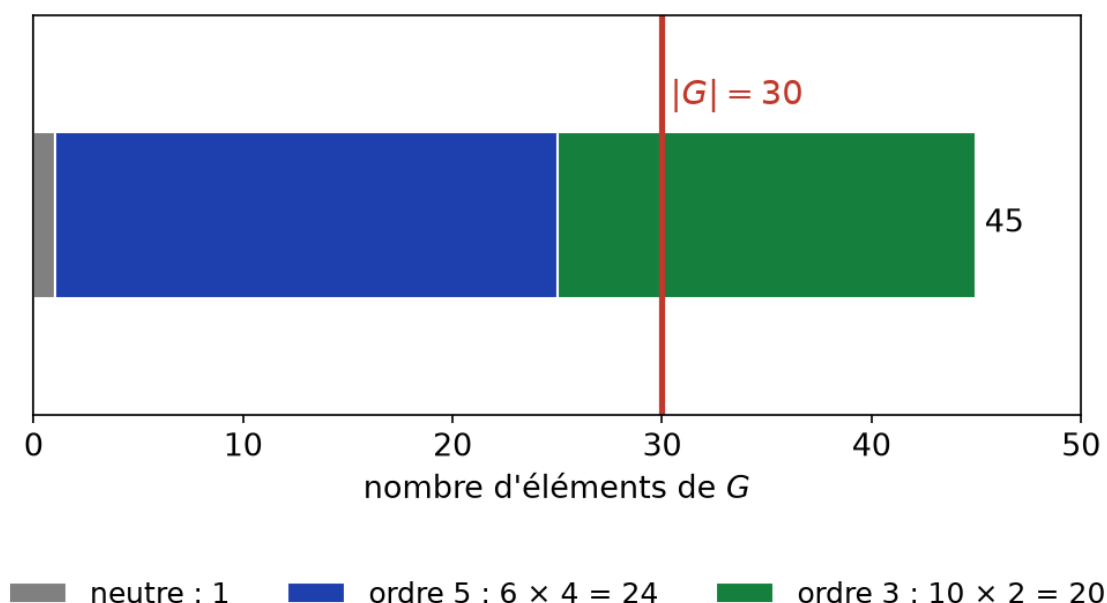
Corrigé de l'exercice 18 : Groupes d'ordre 35

- On a $35 = 5 \times 7$. D'abord, n_5 divise 7 et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$. Comme $7 \equiv 2 \pmod{5}$, on a $n_5 = 1$. Ensuite, n_7 divise 5 et $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$. Comme $5 \not\equiv 1 \pmod{7}$, on a $n_7 = 1$. **Donc** $n_5 = n_7 = 1$.
- Un sous-groupe de Sylow est distingué si et seulement s'il est unique. Donc P et Q sont distingués. Par ailleurs, l'ordre de $P \cap Q$ divise 5 et 7. **Ainsi**, $P \cap Q = \{e\}$.
- Soit $x \in P$ et $y \in Q$. Le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ s'écrit $(xyx^{-1})y^{-1}$, qui est dans Q car Q est distingué. Il s'écrit aussi $x(yx^{-1}y^{-1})$, qui est dans P . Il appartient donc à $P \cap Q = \{e\}$. **Par conséquent**, $xy = yx$.
- Soit x un générateur de P et y un générateur de Q . Comme ils commutent, $(xy)^k = x^k y^k$. Si $(xy)^k = e$, alors $x^k = y^{-k} \in P \cap Q$, donc $x^k = y^k = e$. Ainsi, 5 et 7 divisent k , donc 35 divise k . L'élément xy est d'ordre 35. **Donc** G est cyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.
- D'abord, n_q divise p et $n_q \equiv 1 \pmod{q}$. Or $1 < p < q$, donc $p \not\equiv 1 \pmod{q}$ et $n_q = 1$. Ensuite, $n_p \in \{1, q\}$ et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$. Comme p ne divise pas $q - 1$, on a $n_p = 1$. Les questions 2 à 4 s'appliquent alors mot pour mot. **Tout groupe d'ordre** pq **est cyclique**.

Corrigé de l'exercice 19 : Groupes d'ordre 20 et 30 non simples

- On a $20 = 2^2 \times 5$. Le nombre n_5 divise 4, donc vaut 1, 2 ou 4, et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$. Seul 1 convient. **Le 5-Sylow est unique, donc distingué, d'ordre 5.**
- On a $30 = 2 \times 3 \times 5$. D'abord, n_3 divise 10 et $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$: parmi 1, 2, 5, 10, seuls 1 et 10 conviennent. Ensuite, n_5 divise 6 et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$: parmi 1, 2, 3, 6, seuls 1 et 6 conviennent. **Donc** $n_3 \in \{1, 10\}$ **et** $n_5 \in \{1, 6\}$.
- Deux sous-groupes distincts d'ordre premier p ont une intersection triviale. Chacun contient $p - 1$ éléments d'ordre p , et chaque élément d'ordre p engendre l'un d'eux. Supposons $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$. On obtient alors $10 \times 2 = 20$ éléments d'ordre 3 et $6 \times 4 = 24$ éléments d'ordre 5. Avec le neutre, cela fait $45 > 30$ éléments, comme le montre la figure ci-

dessous. **C'est absurde** : $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$.



4. D'après la question 3, l'un des deux sous-groupes P_3 , P_5 est distingué. Notons-le N , et L l'autre. Alors $NL = LN$ est un sous-groupe. De plus, $N \cap L = \{e\}$, car leurs ordres sont premiers entre eux. L'application $(x, y) \rightarrow xy$ est donc injective, et $|P_3 P_5| = 3 \times 5 = 15$. **Ce sous-groupe est d'indice 2, donc distingué.**
5. Posons $H = P_3 P_5$. Il est d'ordre 15, donc cyclique d'après l'exemple du cours. Soit Q un 5-Sylow quelconque de G . Son image dans G/H , d'ordre 2, a un ordre qui divise 5 et 2 : elle est triviale, donc $Q \subset H$. Or H cyclique n'a qu'un sous-groupe d'ordre 5. Ainsi, tous les 5-Sylow sont égaux, et $n_5 = 1$. Le même argument s'applique aux 3-Sylow. **Donc** $n_3 = n_5 = 1$.

Point de méthode : lorsque les congruences de Sylow ne suffisent pas, on compte les éléments d'ordre premier. Les sous-groupes d'ordre premier se coupent en $\{e\}$, ce qui rend le comptage exact.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, simplicité de A5

1. Les permutations paires de S_5 sont de quatre types. L'identité donne 1 élément. Les 3-cycles sont au nombre de $\binom{5}{3} \times 2 = 20$. Les doubles transpositions sont au nombre de $5 \times 3 = 15$: on choisit le point fixe, puis l'appariement des quatre autres. Enfin, il y a $4! = 24$ cycles de

longueur 5. **On vérifie que** $1 + 20 + 15 + 24 = 60$.

2. La classe de σ dans $\mathcal{A}_5$ a $60/|C_{\mathcal{A}}(\sigma)|$ éléments. Sa classe dans $\mathcal{S}_5$ en a $120/|C_{\mathcal{S}}(\sigma)|$. La restriction de ε à $C_{\mathcal{S}}(\sigma)$ est un morphisme de noyau $C_{\mathcal{A}}(\sigma)$.
 - Si $C_{\mathcal{S}}(\sigma)$ contient une permutation impaire, cette restriction est surjective sur $\{-1, 1\}$, donc $|C_{\mathcal{A}}(\sigma)| = |C_{\mathcal{S}}(\sigma)|/2$. La classe dans $\mathcal{A}_5$ a alors $120/|C_{\mathcal{S}}(\sigma)|$ éléments. Comme elle est incluse dans la classe dans $\mathcal{S}_5$, **les deux classes sont égales.**
 - Sinon, $C_{\mathcal{A}}(\sigma) = C_{\mathcal{S}}(\sigma)$, et la classe dans $\mathcal{A}_5$ a $60/|C_{\mathcal{S}}(\sigma)|$ éléments. **C'est la moitié de la classe dans $\mathcal{S}_5$.**
3. Le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$ commute avec la transposition $(4\ 5)$, qui est impaire : sa classe a 20 éléments. La double transposition $(1\ 2)(3\ 4)$ commute avec $(1\ 2)$: sa classe a 15 éléments. Pour un 5-cycle c , on a $|C_{\mathcal{S}}(c)| = 120/24 = 5$. Or $\langle c \rangle$ est d'ordre 5 et inclus dans $C_{\mathcal{S}}(c)$. Donc $C_{\mathcal{S}}(c) = \langle c \rangle \subset \mathcal{A}_5$, sans permutation impaire. Chaque 5-cycle a donc une classe de 12 éléments dans $\mathcal{A}_5$, et les 24 cycles se répartissent en deux classes. **Les classes de $\mathcal{A}_5$ ont pour cardinaux 1, 20, 15, 12 et 12.**
4. Un sous-groupe distingué N est stable par conjugaison dans $\mathcal{A}_5$. C'est donc une réunion de classes de conjugaison, parmi lesquelles $\{\text{id}\}$. **Ainsi, $|N|$ vaut 1 plus une somme de cardinaux pris dans $\{20, 15, 12, 12\}$, et $|N|$ divise 60 d'après Lagrange.**
5. Les sommes possibles sont 1, 13, 16, 21, 25, 28, 33, 36, 40, 45, 48 et 60. Or les diviseurs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Seuls 1 et 60 sont communs aux deux listes. Donc $N = \{\text{id}\}$ ou $N = \mathcal{A}_5$. **Le groupe $\mathcal{A}_5$ est simple.** Enfin, un sous-groupe d'ordre 30 serait d'indice 2, donc distingué. **Par conséquent, $\mathcal{A}_5$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 30.**

Point de méthode : pour montrer qu'un groupe fini est simple, on calcule ses classes de conjugaison, puis on confronte leurs sommes aux diviseurs de l'ordre.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [groupes et actions, cours de maths en L3](#)

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur groupes et actions](#)
- Chapitre précédent : [Espaces \$L^p\$](#)
- Chapitre suivant : [Anneaux, idéaux et arithmétique](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)