

Groupes, anneaux et corps

Exercice 1 : Propriétés de lois de composition usuelles

Pour chacune des lois suivantes, dites si elle est associative, si elle est commutative, si elle admet un élément neutre et, le cas échéant, déterminez les éléments inversibles. Dans les questions 1 et 2, E désigne un ensemble non vide.

1. La réunion $\cup$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .
2. L'intersection $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$.
3. La loi $(m, n) \rightarrow \max(m, n)$ sur $\mathbb{N}$.
4. La soustraction sur $\mathbb{Z}$.
5. La composition $\circ$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Parties stables

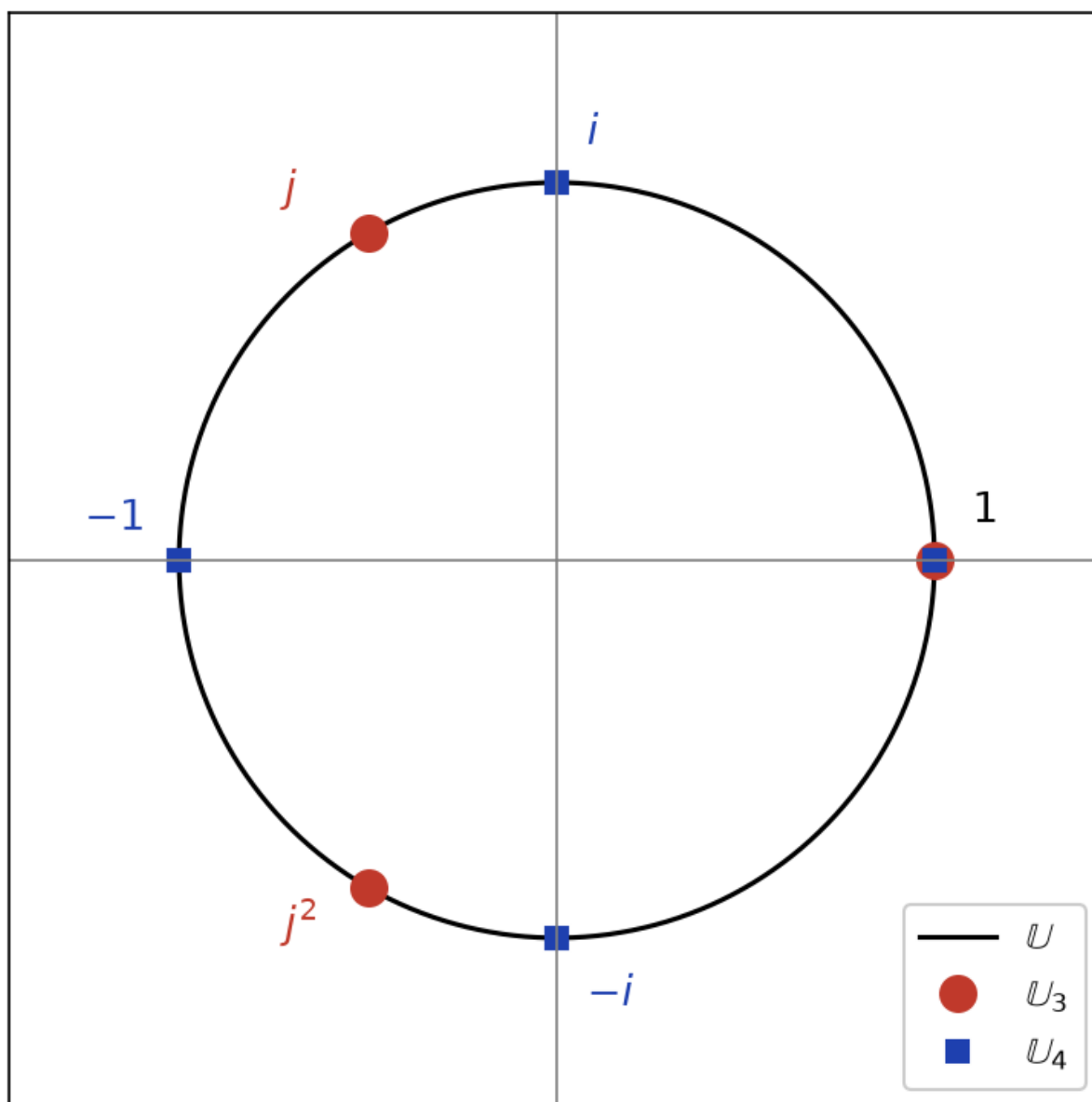
Dites si chacune des parties suivantes est stable pour la ou les lois indiquées. Justifiez par une preuve ou par un contre-exemple.

1. L'ensemble $\mathcal{I}$ des entiers impairs, pour l'addition puis pour la multiplication.
2. L'ensemble $\mathbb{R}_+$, pour l'addition puis pour la multiplication.
3. L'ensemble $\bigcup_n$ des racines n -ièmes de l'unité, pour la multiplication des complexes.

4. Le cercle $\left\{ z \in \mathbb{C}, |z| = 2 \right\}$, pour la multiplication.
5. L'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis celui des fonctions impaires, pour la multiplication des fonctions.
6. L'ensemble des injections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour la composition.

Exercice 3 : Les groupes U , U_n , C^* et $\mathbb{R}^*_+$

On note $j = e^{2i\pi/3}$. La figure ci-dessous place les éléments de U_3 et de U_4 sur le cercle unité.



1. Montrez que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrez que, si n divise m , alors $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}_m$.
3. Déterminez $\mathbb{U}_3 \cap \mathbb{U}_4$. La réunion $\mathbb{U}_3 \cup \mathbb{U}_4$ est-elle un sous-groupe de $\mathbb{U}$?
4. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $(r, u) \rightarrow ru$, où l'ensemble de départ est muni de la structure de groupe produit. Montrez que φ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 : Montrer qu'une partie est un sous-groupe

Dans chaque cas, dites si H est un sous-groupe du groupe G indiqué.

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = 5\mathbb{Z}$.
2. $G = (\mathbb{Q}^*, \times)$ et $H = \left\{ 2^k, \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$.
3. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$.
4. $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = \mathbb{N}$.
5. $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ et $H = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
6. $G = (S_{\mathbb{R}}, \circ)$, groupe des bijections de $\mathbb{R}$, et $H = \left\{ f \in S_{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0 \right\}$.

Exercice 5 : Intersection et réunion de sous-groupes

Soient $(G, -)$ un groupe et H, K deux sous-groupes de G .

1. Montrez que $H \cap K$ est un sous-groupe de G .
2. Montrez que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
Pour le sens direct, raisonnez par l'absurde en prenant $h \in H \setminus K$ et $k \in K \setminus H$.
3. Déterminez $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$. L'ensemble $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 6 : Le groupe produit $U_2 \times U_2$

On munit $G = \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ de la structure de groupe produit, avec $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$. On note $e = (1, 1)$, $a = (1, -1)$, $b = (-1, 1)$ et $c = (-1, -1)$.

1. Dressez la table de la loi de G .
2. Montrez que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$ et que G est abélien.
3. Dressez la table de $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Montrez que G et $\mathbb{U}_4$ ne sont pas isomorphes, bien qu'ils aient le même nombre d'éléments.
4. Déterminez tous les sous-groupes de G .

Exercice 7 : Le groupe symétrique S_3

On note $\rho \in S_3$ la permutation $\begin{matrix} 1 \rightarrow 2, \\ 2 \rightarrow 3, \\ 3 \rightarrow 1 \end{matrix}$, et τ_{ij} la transposition qui échange i et j .

1. Calculez ρ^2 et ρ^3 . Justifiez que $S_3 = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}$.
2. Calculez $\tau_{12} \circ \tau_{13}$ et $\tau_{13} \circ \tau_{12}$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrez que $A = \{\text{id}, \rho, \rho^2\}$ est un sous-groupe de S_3 .
4. Montrez que $H = \left\{ \sigma \in S_3, \begin{matrix} \sigma(3) = 3 \end{matrix} \right\}$ est un sous-groupe de S_3 et déterminez ses éléments.
5. Soit $n \geq 3$. En prolongeant τ_{12} et τ_{13} par l'identité sur $\{4, \dots, n\}$, montrez que S_n n'est pas abélien.

Exercice 8 : Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Le but est de montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$H = n\mathbb{Z}.$$

1. Traitez le cas $H = \{0\}$. On suppose désormais $H \neq \{0\}$.
2. Montrez que $H \cap \mathbb{N}^*$ est non vide. On note n son plus petit élément. Montrez que $n\mathbb{Z} \subset H$.
3. À l'aide de la division euclidienne, montrez que $H \subset n\mathbb{Z}$. Justifiez l'unicité de n .
4. Montrez que $K = \left\{ \begin{pmatrix} 4u+6 \\ u, v \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$, puis déterminez l'entier n tel que $K = n\mathbb{Z}$.

Exercice 9 : Morphismes usuels et noyaux

Pour chacune des applications suivantes, montrez que c'est un morphisme de groupes, déterminez son noyau et dites si elle est injective.

1. $f_1: (\mathbb{C}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times), z \rightarrow |z|$.
2. $f_2: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times), t \rightarrow e^{2i\pi t}$.
3. $f_3: (\mathbb{C}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times), z \rightarrow z^4$.
4. $f_4: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times), k \rightarrow i^k$. Déterminez aussi son image.
5. $f_5: (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \times), x \rightarrow x^3$. Est-ce un automorphisme ?

Exercice 10 : Une spirale et un morphisme injectif

On considère $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ définie par $f(\theta) = e^{(1+i)\theta} = e^\theta e^{i\theta}$.

1. Montrez que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminez $\ker f$. Qu'en déduisez-vous ?
3. Justifiez que $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Le morphisme f est-il surjectif ?
4. Déterminez $\operatorname{Im} f \cap \mathbb{U}$ et $\operatorname{Im} f \cap \mathbb{R}_+^*$.
5. Décrivez géométriquement $\operatorname{Im} f$ à l'aide du module et d'un argument de $f(\theta)$.

Exercice 11 : Image directe et image réciproque par un morphisme

Soit $f : (G, \cdot) \rightarrow (G', \diamond)$ un morphisme de groupes.

1. Soit H un sous-groupe de G . Montrez que $f(H)$ est un sous-groupe de G' .
2. Soit H' un sous-groupe de G' . Montrez que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G qui contient $\ker f$.
3. On prend $G = G' = (\mathbb{C}^*, \times)$ et $f(z) = z^2$. Déterminez $f^{-1}(\mathbb{U})$, $f^{-1}(\{-1, 1\})$, $f(\mathbb{U}_6)$ et $f(\mathbb{R}^*)$.

Exercice 12 : Automorphismes intérieurs et centre d'un groupe

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour $a \in G$, on définit $\varphi_a : G \rightarrow G$ par $\varphi_a(x) = a x a^{-1}$. Le centre de G est $Z(G) = \left\{ a \in G, \text{ or all } x \in G, ax = xa \right\}$.

1. Montrez que φ_a est un automorphisme de G et précisez sa réciproque.
2. Montrez que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$. En déduire que $\Phi : G \rightarrow S_G, a \mapsto \varphi_a$, est un morphisme

de groupes.

- Montrez que $\ker \varphi = Z(G)$. Qu'en déduit-on pour $Z(G)$?
- Déterminez le centre de S_3 , avec les notations de l'exercice 7.

Exercice 13 : Isomorphismes et non-isomorphismes

- Montrez que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes.
- Montrez qu'il n'existe aucun isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$. On pourra utiliser le fait que tout complexe non nul est un carré.
- Montrez que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.
- Montrez que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes.
- Montrez que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 14 : Sous-anneaux de $\mathbb{C}$

Dites si chacune des parties suivantes est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

- $\mathbb{Z}[i] = \left\{ a + bi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.
- L'ensemble $\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \mid \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z}, \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$ des nombres décimaux.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.

4. $B = \left\{ a + 2i, (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$
5. $2\mathbb{Z}$, puis le disque $\left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \right\}$, puis $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

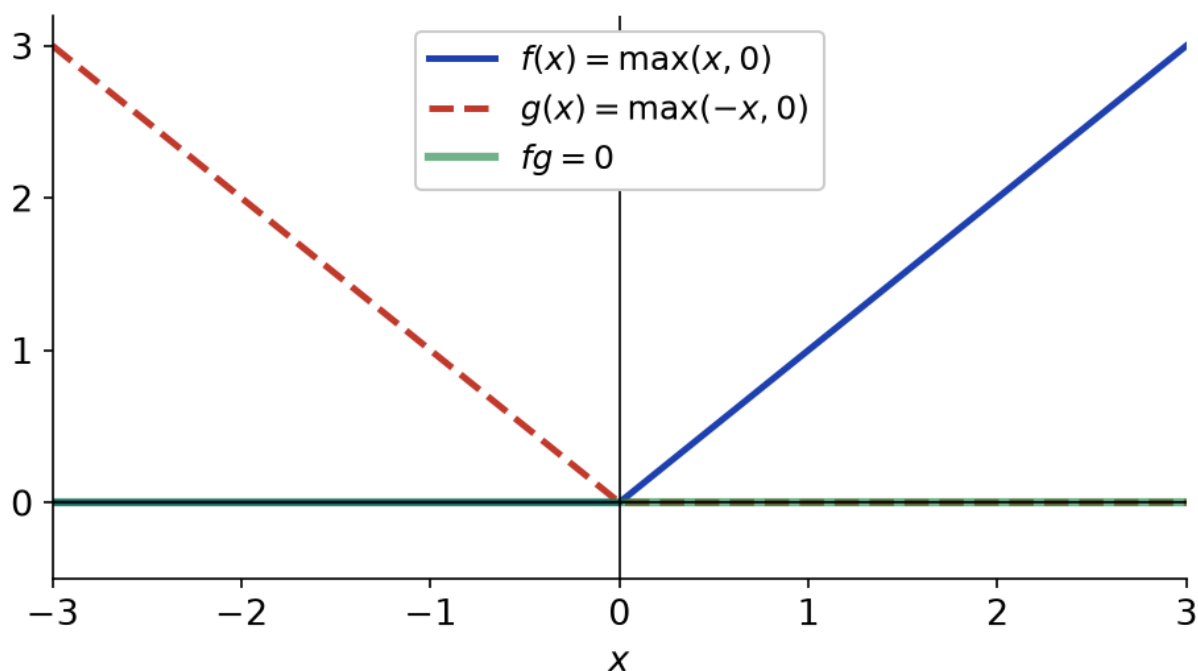
Exercice 15 : Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$

Pour $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, on pose $N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2$. On admet que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

1. Montrez que $N(z) \in \mathbb{N}$ et que $N(zw) = N(z)N(w)$ pour tous $z, w \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Montrez que si z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $N(z) = 1$.
3. En déduire le groupe des inversibles $\mathbb{Z}[i]^\times$. À quel groupe usuel est-il égal ?
4. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est-il intègre ? Est-ce un corps ?

Exercice 16 : Diviseurs de zéro dans un anneau de fonctions

On note $A = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni de l'addition et de la multiplication point par point. On considère $f(x) = \max(x, 0)$ et $g(x) = \max(-x, 0)$, représentées ci-dessous.



1. Montrez que l'anneau $\mathcal{A}$ n'est pas intègre.
2. Déterminez le groupe des inversibles $\mathcal{A}^\times$.
3. Soit $h \in \mathcal{A}$. Montrez qu'il existe $k \in \mathcal{A}$, non nulle, telle que $hk = 0$, si et seulement si h s'annule au moins une fois.
4. Déterminez les éléments $e \in \mathcal{A}$ tels que $e^2 = e$.
5. Montrez que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues est un sous-anneau de $\mathcal{A}$. Est-il intègre ? Que dire du signe d'un inversible de cet anneau ?

Exercice 17 : Formule du binôme et matrices carrées d'ordre 2

On admet que l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 est un anneau, avec le produit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

et de neutre $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez N^2 . Justifiez que N commute avec λI pour tout réel λ .
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculez $(N + B)^2$ et $N^2 + 2NB + B^2$. Commentez.

Exercice 18 : Éléments nilpotents d'un anneau

Soit A un anneau. Un élément $a \in A$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^p = 0$.

1. Soit a nilpotent, avec $a^p = 0$. Montrez que $1 - a$ est inversible et exprimez son inverse.
2. Soient a et b nilpotents tels que $ab = ba$, avec $a^p = 0$ et $b^q = 0$. Montrez que $a + b$ est nilpotent.
3. Soient a nilpotent et $b \in A$ tel que $ab = ba$. Montrez que ab est nilpotent.
4. Montrez que, dans un anneau intègre, le seul élément nilpotent est 0 .
5. À l'aide des matrices N et B de l'exercice 17, montrez que l'hypothèse $ab = ba$ de la question 2 ne peut pas être supprimée.

Exercice 19 : Morphismes d'anneaux

1. Soit A un anneau. Montrez que l'application $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow A$, $n \rightarrow n \cdot 1_A$, est un morphisme d'anneaux, et que c'est le seul.
2. Montrez que tout élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrit de manière unique $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. En déduire que $\sigma: a + b\sqrt{2} \rightarrow a - b\sqrt{2}$ est bien définie, puis que c'est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3. Soient K un corps, B un anneau non réduit à $\{0\}$ et $f: K \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Montrez que f est injectif.
4. Déterminez tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 20 : Le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

On pose $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in {}_{\nu}\mathbb{Q}^2 \right\}$. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrez que l'écriture $a + b\sqrt{2}$ d'un élément de K est unique.
2. Montrez que K est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
3. Montrez que tout élément non nul de K est inversible dans K . Conclure.
4. Calculez les inverses de $3 + 2\sqrt{2}$, de $1 + \sqrt{2}$ et de $2 + \sqrt{2}$.
5. Montrez que $\sqrt{3} \notin K$.

Exercice 21 : Un anneau intègre fini est un corps

Soit A un anneau commutatif fini, non réduit à $\{0\}$. Pour $a \in A$, on note $m_a: A \rightarrow A$, $x \mapsto ax$.

1. On suppose A intègre et $a \neq 0$. Montrez que m_a est injective.
2. En déduire qu'un anneau intègre fini est un corps.
3. On ne suppose plus A intègre. Montrez que tout élément a de A est soit inversible, soit un diviseur de zéro, c'est-à-dire qu'il existe $b \neq 0$ tel que $ab = 0$.
4. Le résultat de la question 2 subsiste-t-il pour un anneau intègre infini ?

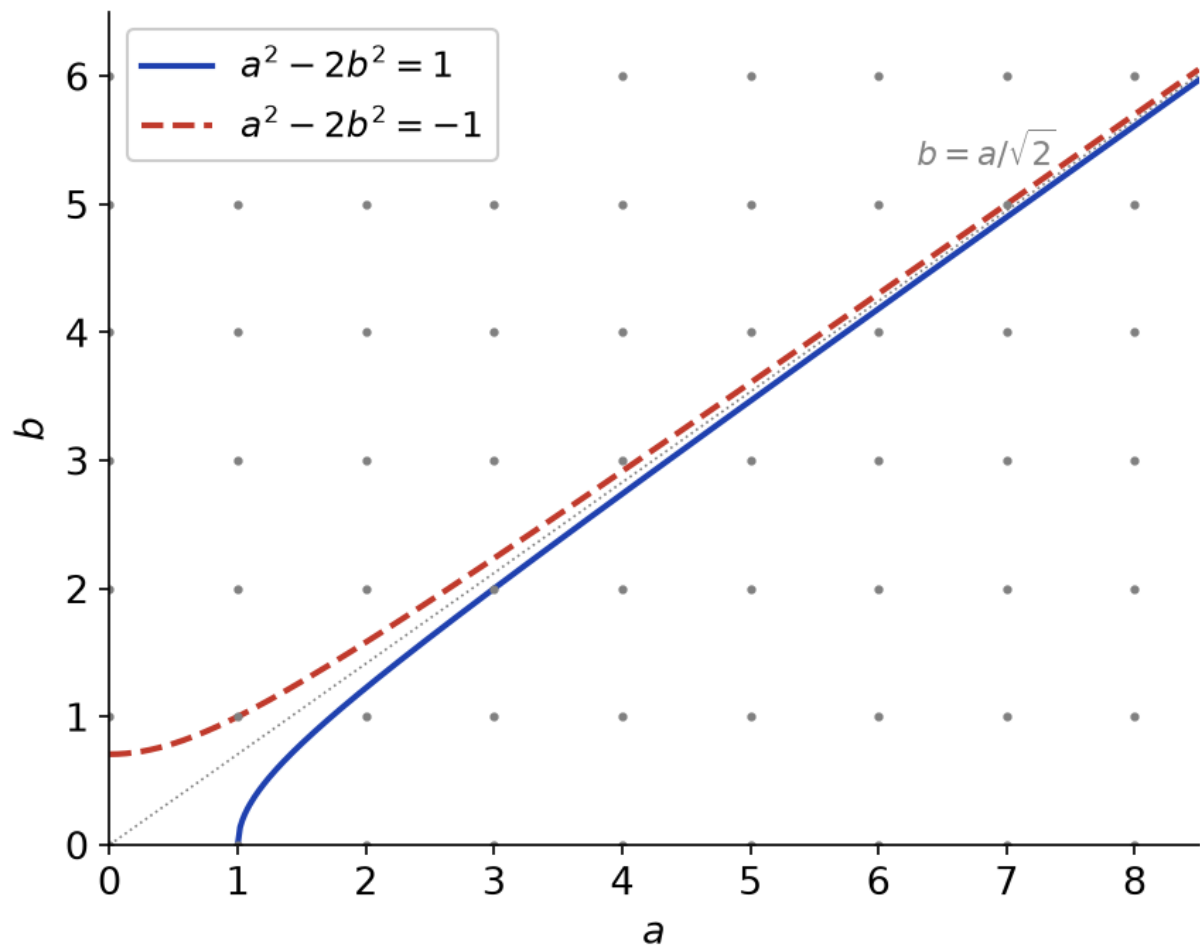
Exercice 22 : Anneau de Boole et différence symétrique

Un anneau de Boole est un anneau A , non réduit à $\{0\}$, dans lequel $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

1. Montrez que $x + x = 0$ pour tout $x \in A$.
2. Montrez que A est commutatif.
3. Montrez que $x(1 - x) = 0$ pour tout x . En déduire que A est intègre si et seulement si $A = \{0, 1\}$.
4. Soit E un ensemble non vide. Pour $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, on note $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. On admet que Δ est associative et que $\cap$ est distributive sur Δ . Montrez que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
5. Déterminez les inversibles de cet anneau. Pour quels ensembles E est-il intègre ?

Exercice 23 : Problème : unités de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et équation de Pell-Fermat

On note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et σ l'automorphisme $a + b\sqrt{2} \rightarrow a - b\sqrt{2}$ de l'exercice 19. Pour $z \in A$, on pose $N(z) = z \sigma(z)$, et l'on note $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$. On cherche les couples d'entiers (a, b) tels que $a^2 - 2b^2 = 1$. La figure ci-dessous montre les deux hyperboles $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ et les points à coordonnées entières.



1. Pour $z = a + b\sqrt{2}$, calculez $N(z)$. Montrez que $N(zw) = N(z)N(w)$.
2. Montrez que $z \in A^\times$ si et seulement si $N(z) = \pm 1$.
3. Vérifiez que ε est inversible et calculez ε^2 , ε^3 . Montrez que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ possède une infinité de solutions entières.
4. Soit $u = a + b\sqrt{2} \in A^\times$ tel que $u > 1$. Montrez que $|\sigma(u)| < 1$, puis que $a \geq 1$ et $b \geq 1$. En déduire que $u \geq \varepsilon$.
5. Montrez que les inversibles strictement positifs de A sont exactement les ε^n , $n \in \mathbb{Z}$.
6. En déduire l'ensemble des solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ de $a^2 - 2b^2 = 1$.
7. Montrez que l'application $(n, s) \rightarrow s\varepsilon^n$ est un isomorphisme du groupe produit $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{U}_2, \times)$ sur $(A^\times, \times)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [groupes, anneaux et corps, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#), [Nombres complexes et exponentielle complexe](#)
- Chapitre précédent : [Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs](#)
- Chapitre suivant : [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)