

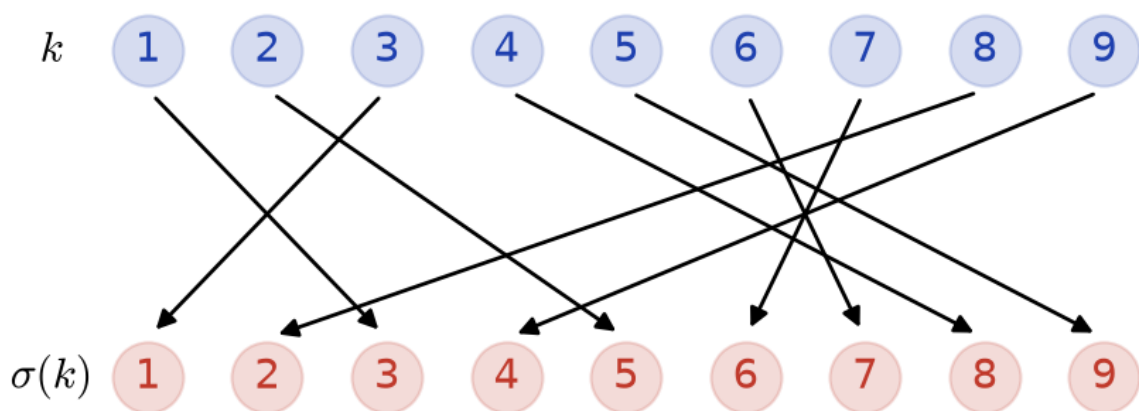
Groupe symétrique et déterminants

Exercice 1 : Décomposition d'une permutation de S_9

On considère la permutation $\sigma \in S_9$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le schéma ci-dessous relie chaque entier k à son image $\sigma(k)$.



1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer l'ordre de σ dans le groupe S_9 .
3. Calculer la signature de σ .
4. Calculer σ^{2026} .

5. Écrire σ comme produit de transpositions et vérifier la parité obtenue.

Exercice 2 : Composée, inverse et signature dans S_5

Dans S_5 , on pose $\sigma = (1 \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{smallmatrix}) (4 \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix})$ et $\tau = (1 \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}) (2 \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix})$.

1. Calculer $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$, puis les décomposer en cycles à supports disjoints. Le groupe S_5 est-il commutatif ?
2. Déterminer σ^{-1} .
3. Calculer $\epsilon(\sigma)$, $\epsilon(\tau)$ et $\epsilon(\sigma\tau)$. Vérifier la propriété de morphisme.
4. Écrire σ sous forme de tableau à deux lignes, compter ses inversions et retrouver $\epsilon(\sigma)$.

Exercice 3 : Conjugaison d'un cycle

Soient $n \geq 2$, $\gamma = (a_1 \begin{smallmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{smallmatrix})$ un cycle de S_n et $\sigma \in S_n$.

$$\sigma \gamma \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \begin{smallmatrix} \sigma(a_2) \\ \vdots \\ \sigma(a_p) \end{smallmatrix})$$

1. Montrer que $\sigma \gamma \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \begin{smallmatrix} \sigma(a_2) \\ \vdots \\ \sigma(a_p) \end{smallmatrix})$.

2. En déduire que deux cycles de même longueur sont conjugués dans S_n : pour deux tels cycles γ et γ' , il existe σ tel que $\gamma' = \sigma \gamma \sigma^{-1}$.

3. Dans S_5 , calculer $\sigma(1,2,3,4)\sigma^{-1}$ pour $\sigma = (1,2,3,4,5)$.

4. Trouver une permutation $\sigma \in S_3$ telle que $\sigma(1,2,3)\sigma^{-1} = (1,3,2)$.

Exercice 4 : Parties génératrices du groupe symétrique

Soit $n \geq 3$. On note $c = (1,2,\dots,n)$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.

1. Soient $i \neq j$ deux éléments de $\llbracket 2, n \rrbracket$. Vérifier que $(i,j)(1,2,\dots,i,j,i)$. En déduire que les transpositions $(1,k)$, pour $2 \leq k \leq n$, engendrent S_n .

2. Montrer que pour $2 \leq k \leq n-1$, on a $(1,k+1) = (k,k+1)(k,k+1)(k,k+1)$. En déduire que les transpositions $(k,k+1)$, pour $1 \leq k \leq n-1$, engendrent S_n .

3. Montrer que $c^{k-1}(1,2)c^{-(k-1)} = (k,k+1)$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

4. Conclure que S_n est engendré par les deux permutations $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et c .

Exercice 5 : Morphismes du groupe symétrique vers $\mathbb{C}^*$

Soient $n \geq 2$ et φ un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Montrer que toutes les transpositions ont la même image par φ . On pourra utiliser l'exercice 3.
2. Montrer que cette image commune vaut 1 ou -1 .
3. En déduire que φ est soit le morphisme constant égal à 1 , soit la signature ε .
4. Application : montrer que pour $n \geq 2$, le groupe alterné A_n a pour cardinal $\frac{n!}{2}$. On pourra considérer l'application $\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sigma$.

Exercice 6 : Le jeu de taquin

Le taquin est une grille 4×4 contenant quinze carreaux numérotés et une case vide. Un coup consiste à faire glisser dans la case vide un carreau voisin, horizontalement ou verticalement. On numérote les cases de 1 à 16 , ligne par ligne, et l'on considère la case vide comme un carreau portant le numéro 16 . Une configuration est alors une permutation $\sigma \in S_{16}$, où $\sigma(k)$ est le numéro du carreau situé dans la case k . La position de départ correspond à l'identité.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	vide

position de départ

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	vide

position visée

1. Montrer qu'un coup qui déplace la case vide de la case p vers la case q transforme la configuration σ en $\sigma \circ (p, q)$.
2. On colorie les cases comme un damier. Montrer que chaque coup change la couleur de la case vide. En déduire que si la case vide revient en case 16, le nombre de coups joués est pair.
3. Montrer qu'il est impossible, à partir de la position de départ, d'atteindre la position visée ci-dessus, où seuls les carreaux 14 et 15 ont été échangés.

Exercice 7 : Formes bilinéaires alternées du plan

Pour $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi_1(u, v) = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \varphi_2(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1, \quad \varphi_3(u, v) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

1. Vérifier que ces trois applications sont bilinéaires. Lesquelles sont alternées ?
2. Soit f une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$. Montrer directement que si f est alternée, alors f est antisymétrique.

3. Soit f une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$ et (e_1, e_2) la base canonique. Montrer que $f(u, v) = f(e_1, e_2) \varphi_1(u, v)$ pour tous u, v .

Exercice 8 : Opérations sur les colonnes d'un déterminant

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, B une base de E , et u, v, w trois vecteurs tels que $\det_B(u, v, w) = 3$. Calculer, en justifiant chaque étape :

1. $\det_B(v, u, w)$ et $\det_B(w, u, v)$;
2. $\det_B(2u, 3v, -w)$;
3. $\det_B(u + 2v, v, w - 5u)$;
4. $\det_B(u + v, v + w, w + u)$;
5. $\det_B(u - v, v - w, w - u)$.

Exercice 9 : Un déterminant d'ordre 3

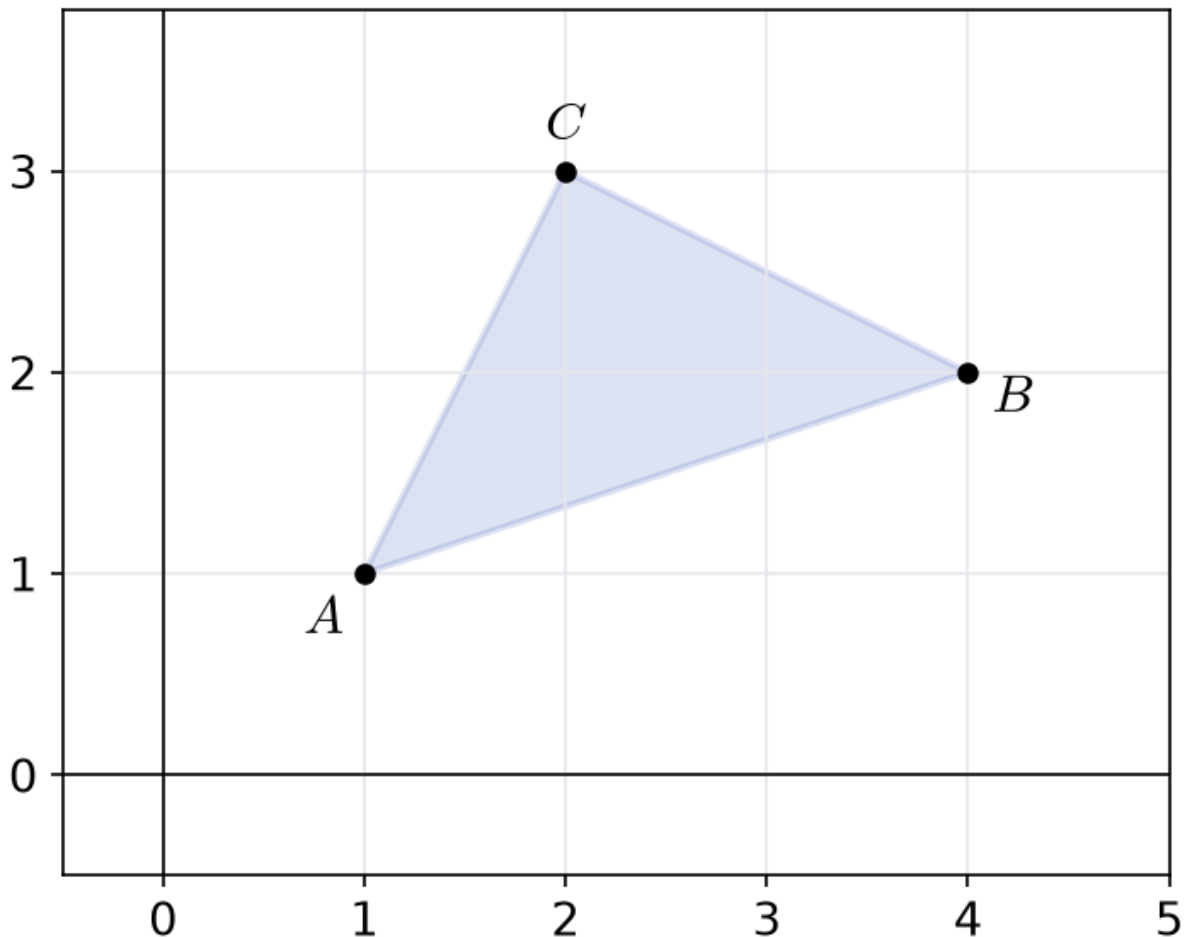
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A$ par la règle de Sarrus.
2. Retrouver ce résultat en développant selon la deuxième ligne.
3. En déduire $\det(A^T)$, $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^3)$ et $\det(A^{-1})$.

Exercice 10 : Aires et volumes orientés

Le plan et l'espace sont rapportés à leurs repères orthonormés directs usuels. On considère les points $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ et $C(2, 3)$ représentés ci-dessous.



1. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est-elle directe ?
2. En déduire l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis l'aire du triangle ABC .
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Quelle est l'aire de l'image du carré unité par f ? Celle de l'image du triangle ABC ?
4. Calculer le volume du parallélépipède construit sur $u = (1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 3)$.

Exercice 11 : Un déterminant d'ordre 4 par opérations élémentaires

Calculer le déterminant suivant en se ramenant à une matrice triangulaire, puis dire si la matrice correspondante est inversible :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 : Une base de l'espace dépendant d'un paramètre

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u_\alpha = (1, 1, \alpha), \quad v_\alpha = (1, \alpha, 1), \quad w_\alpha = (\alpha, 1, 1).$$

1. Calculer $\det(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ dans la base canonique et le factoriser.
2. Pour quelles valeurs de α la famille $(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer le rang de la famille dans les cas restants.

Exercice 13 : Matrices antisymétriques de taille impaire

Soit $n \geq 1$ un entier impair.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T = -A$. Montrer que $\det A = 0$.
2. Le résultat subsiste-t-il si n est pair ?
3. Montrer qu'il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$.

4. Montrer qu'il n'existe pas deux matrices inversibles $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MN = -NM$. Donner un contre-exemple lorsque $n = 2$.

Exercice 14 : Déterminant de quelques endomorphismes

Soit $n \geq 1$. Calculer le déterminant des endomorphismes suivants et dire lesquels sont des automorphismes.

1. $\varphi : P \rightarrow P(X+1)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. $\psi : P \rightarrow P + X P'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. $D : P \rightarrow P'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4. $T : M \rightarrow M^T$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admettra que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe du sous-espace des matrices symétriques, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, et de celui des matrices antisymétriques, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 15 : Déterminant à diagonale constante

Soient $n \geq 2$ et a, b deux réels. On note Δ_n le déterminant de la matrice de taille n dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres valent b .

1. Calculer Δ_n en ajoutant toutes les colonnes à la première.
2. Pour quelles valeurs de (a, b) cette matrice est-elle inversible ?
3. Application : calculer le déterminant de taille 5 dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres 1.

Exercice 16 : Déterminant de la matrice des minimums

Soit $n \geq 2$. On note $M_n = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Par exemple,

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det M_n$ en remplaçant, pour i allant de n à 2 , la ligne L_i par $L_i - L_{i-1}$.
2. En déduire que M_n est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.

Exercice 17 : Déterminants tridiagonaux

Pour $n \geq 1$ et des réels a, b , on note $D_n(a, b)$ le déterminant de taille n dont les coefficients diagonaux valent a , ceux situés juste au-dessus et juste en dessous de la diagonale valent b , et tous les autres valent 0 . On pose $D_0(a, b) = 1$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $D_n(a, b) = a D_{n-1}(a, b) - b^2 D_{n-2}(a, b)$.
2. Calculer $D_n(2, -1)$ pour tout n .
3. Calculer $D_n(5, 2)$ pour tout n .
4. On note $T_n = D_n(1, 1)$. Calculer $T_1, \dots, T_7$ et montrer que la suite (T_n) est périodique. Pour quels n la matrice correspondante est-elle inversible ?

Exercice 18 : Variantes du déterminant de Vandermonde

1. Calculer $V(1, 2, 3, 4)$.

2. Soient a, b, c trois réels. En considérant le polynôme $P(X) = V(a, b, c, X)$ et son coefficient en X^2 , montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(b - a)(c - a)(c - b).$$

3. Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que l'application $P \rightarrow (P(x_0), \dots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
4. Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 5$.

Exercice 19 : Comatrice et inverse d'une matrice d'ordre 3

On reprend la matrice de l'exercice 9 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les neuf cofacteurs de A et écrire $\text{com}(A)$.
- Vérifier que $A \text{com}(A)^T = \det(A) I_3$.
- En déduire A^{-1} .

Exercice 20 : Matrices inversibles à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice carrée à coefficients entiers.

- Montrer que $\det A \in \mathbb{Z}$ et que les cofacteurs de A sont entiers.
- Montrer que A est inversible et que A^{-1} est à coefficients entiers si et seulement si

$$\det A \in \{-1, 1\}.$$

3. Appliquer ce critère aux matrices $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Calculer l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 : Déterminant triangulaire par blocs

Soient $p, q \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

1. On suppose A non inversible. Montrer que $\det M = 0$.

2. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det A$ et $\det \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$ pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

3. On suppose A inversible. Factoriser M à l'aide des deux matrices de la question 2 et en déduire que $\det M = \det A \det C$.

4. Application : calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 22 : Signature et produit de Vandermonde

Soient $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n$ des réels et $\sigma \in S_n$. On note $V(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde, dont on connaît la valeur $\prod_{i < j} (x_j - x_i)$. Dans cet exercice, on utilise seulement la

propriété suivante de la signature : si σ est un produit de p transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

1. Montrer que $V(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) V(x_1, \dots, x_n)$, en utilisant seulement l'effet d'un échange de deux colonnes sur un déterminant.

2. En choisissant $x_i = i$, en déduire que

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

3. En déduire que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$, où $N(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ .

4. Application : pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, calculer $N(\sigma)$, puis vérifier le résultat à l'aide de la décomposition en cycles.

Exercice 23 : Problème : comatrice d'un produit et densité des matrices inversibles

Dans tout le problème, $n \geq 2$ et les matrices sont réelles.

Partie A. Un polynôme associé à une matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À l'aide de l'expression du déterminant comme somme sur S_n , montrer que $x \rightarrow \det(A + xI_n)$ est une fonction polynomiale de degré n , de coefficient dominant 1, dont le terme constant vaut $\det A$.

2. En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $A + xI_n$ soit inversible pour tout $x \in]0, r[$.

3. Illustrer ces résultats avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B. Comatrice d'un produit.

1. Montrer que si M est inversible, alors $\text{com}(M) = \det(M) (M^{-1})^T$.
2. En déduire que $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$ lorsque A et B sont inversibles.
3. Soit $x \rightarrow M(x)$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des fonctions polynomiales de x . Montrer que $\det M(x)$ et les coefficients de $\text{com}(M(x))$ sont aussi des fonctions polynomiales de x .
4. En déduire que $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie C. Déterminant de la comatrice.

1. Montrer que $\det(\text{com } A) = (\det A)^{n-1}$ lorsque A est inversible.
2. Étendre cette égalité à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Vérifier le résultat directement pour $n = 2$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [groupe symétrique et déterminants, cours de maths sup](#)

- À maîtriser avant : [Matrices, changements de base, rang et trace](#), [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre précédent : [Matrices, changements de base, rang et trace](#)
- Chapitre suivant : [Intégration sur un segment](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)