

## Groupe symétrique et déterminants

### Corrigé de l'exercice 1 : Décomposition d'une permutation de $S_9$

1. On suit les images successives à partir du plus petit élément. D'abord,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Ensuite,  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 2$ . Enfin,  $6 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ . Tous les éléments ont été rencontrés,

$$\sigma = (1$$

$$,3)(2$$

$$,5$$

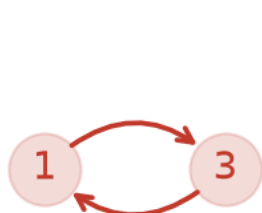
$$,9$$

$$,4$$

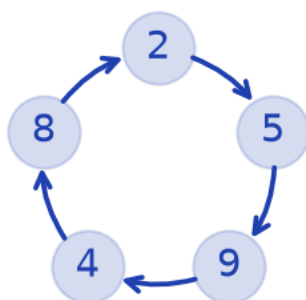
$$,8)(6$$

$$,7)$$

donc  $\sigma$  n'a aucun point fixe. **On obtient** . La figure ci-dessous montre les trois orbites.



(1 3), ordre 2



(2 5 9 4 8), ordre 5



(6 7), ordre 2

$$c = (2$$

$$,5$$

2. Notons ,9 . Les trois cycles ont des supports disjoints, donc ils commutent. Ainsi, pour tout

$$,4$$

$$,8)$$

$\sigma^m = (1$   
entier  $m, 3)^m c^m (6$ . Comme les supports sont disjoints,  $\sigma^m = \text{id}$  si et seulement si  
 $, 7)^m$   
chacun des trois facteurs vaut l'identité. Autrement dit, 2 et 5 doivent diviser  $m$ . **L'ordre de**  
 $\sigma$  **vaut**  $\text{ppcm}(2, 5, 2) = 10$ .

3. Un cycle de longueur  $p$  a pour signature  $(-1)^{p-1}$ . Par conséquent,  
 $\epsilon(\sigma) = (-1)^1 \times (-1)^4 \times (-1)^1$ . **Donc**  $\epsilon(\sigma) = 1$  : **la permutation est paire.**

4. On a  $2026 = 10 \times 202 + 6$ , donc  $\sigma^{2026} = \sigma^6$ . Or  $(1$   
 $, 3)^6 = (6$ , et  $c^6 = c^5 c = c$ .  
 $, 7)^6 = \text{id}$

$\sigma^{2026} = (2$   
 $, 5$   
**Ainsi**  $, 9$   
 $, 4$   
 $, 8)$

5. D'après le cours,  $(a_1$   
 $, \dots$   
 $, a_p) = (a_1$   
 $, a_2)(a_2$   
 $, a_3) \dots (a_{p-1}$   
 $, a_p)$

$$\sigma = (1$$

$$, 3)(2$$

$$, 5)(5$$

$$, 9)(9$$

$$, 4)(4$$

$$, 8)(6$$

$$, 7).$$

**On obtient six transpositions, ce qui confirme que**  $\epsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$ .

## Corrigé de l'exercice 2 : Composée, inverse et signature dans $S_5$

---

- On calcule  $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$  en appliquant d'abord  $\tau$ . Ainsi  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ , puis  $5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .  

$$\sigma\tau = (1 \ 5 \ 3) (2 \ 4)$$
Ensuite  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ , puis  $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ . Enfin  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ . Donc  $(1 \ 5 \ 3) (2 \ 4)$ . De même, pour  $\tau\sigma$ , on applique d'abord  $\sigma$  :  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ ,  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ ,  

$$\tau\sigma = (1 \ 5 \ 4) (2 \ 3)$$
 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  et  $4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ . Donc  $(1 \ 5 \ 4) (2 \ 3)$ . Comme  $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ , le groupe  $S_5$  n'est pas commutatif.
- L'inverse d'un cycle s'obtient en parcourant le cycle à l'envers. De plus, les deux cycles de  $\sigma$   

$$\sigma^{-1} = (1 \ 5 \ 3) (2 \ 4)$$
commutent. Donc  $(1 \ 5 \ 3) (2 \ 4)$ .
- Un 3-cycle est pair et une transposition est impaire. Ainsi  $\varepsilon(\sigma) = 1 \times (-1) = -1$ , et de même  $\varepsilon(\tau) = (-1) \times 1 = -1$ . Par ailleurs,  $\sigma\tau$  est produit de deux transpositions. Donc  $\varepsilon(\sigma\tau) = 1 = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ .
- On a  $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 2 \ 3 \ 1 \ 5 \ 4)$ . Les inversions sont les couples  $(i, j)$  avec  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . On trouve  $(1, 3)$ , car  $2 > 1$ , puis  $(2, 3)$ , car  $3 > 1$ , et enfin  $(4, 5)$ , car  $5 > 4$ . Aucun autre couple ne convient. Il y a donc 3 inversions et  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$ .

## Corrigé de l'exercice 3 : Conjugaison d'un cycle

---

- Posons  $\gamma' = \sigma \gamma \sigma^{-1}$  et comparons les images de tout  $y \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . D'abord, si  $y = \sigma(a_i)$ , alors  $\gamma'(y) = \sigma(\gamma(a_i)) = \sigma(a_{i+1})$ , avec la convention  $a_{p+1} = a_1$ . Ensuite, si  $y$  n'est pas l'un des  $\sigma(a_i)$ , alors  $\sigma^{-1}(y)$  n'est pas l'un des  $a_i$ . Il est donc fixé par  $\gamma$ , et  $\gamma'(y) = \sigma(\sigma^{-1}(y)) = y$ . Ainsi  $\gamma' = ( \sigma(a_1) \ \sigma(a_2) \ \dots \ \sigma(a_p) )$ .

2. Soient  $\gamma = (a_1 \dots a_p)$  et  $\gamma' = (b_1 \dots b_p)$ . Les ensembles  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$  et  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{b_1, \dots, b_p\}$  ont le même cardinal  $n - p$ . On choisit une bijection entre eux, et on la complète en posant  $\sigma(a_i) = b_i$ . On obtient ainsi  $\sigma \in S_n$ . **D'après la question 1,**  $\sigma \gamma \sigma^{-1} = \gamma'$ .

3. La conjugaison par  $\sigma$  est un morphisme, donc  $(\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \sigma(4)) \sigma^{-1} = \sigma(1, 2, 3, 4) \sigma^{-1}$ . Or  $\sigma(1) = 2$ ,  $\sigma(3) = 4$ ,  $\sigma(2) = 3$  et  $\sigma(4) = 5$ . On obtient  $(2, 3, 4, 5) \sigma^{-1} = (2, 3, 4, 5)$ .

4. On veut  $(\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3)) = (1, 2, 3)$ . Il suffit donc que  $\sigma(1) = 1$ ,  $\sigma(2) = 3$  et  $\sigma(3) = 2$ . La transposition  $\sigma = (2, 3)$  convient.

## Corrigé de l'exercice 4 : Parties génératrices du groupe symétrique

---

1. On calcule  $(1 \ i \ j)(1 \ i \ j)$  en appliquant les facteurs de droite à gauche. D'abord,  $i \rightarrow 1 \rightarrow j \rightarrow j$ . Ensuite,  $j \rightarrow j \rightarrow 1 \rightarrow i$ . De plus,  $1 \rightarrow i \rightarrow i \rightarrow 1$ . Les autres éléments sont fixes. Donc

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$ . Or toute permutation est un produit de transpositions. Chaque transposition est soit de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ , soit un produit de trois telles transpositions. **Par conséquent, les  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$  engendrent  $S_n$ .**

2. Posons  $t = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ , qui vérifie  $t^{-1} = t$ . D'après l'exercice 3,  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ t(k) \end{pmatrix}$ . Comme  $k \geq 2$ , on a  $t(1) = 1$  et  $t(k) = k+1$ , d'où la formule. Soit  $H$  le sous-groupe engendré par les transpositions  $\begin{pmatrix} k \\ k+1 \end{pmatrix}$ . Il contient  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . De plus, s'il contient  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ , la formule montre qu'il contient  $\begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ . Par récurrence,  $H$  contient toutes les  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ . **D'après la question 1,  $H = S_n$ .**
3. Pour  $k \leq n-1$ , on a  $c^{k-1}(1) = k$  et  $c^{k-1}(2) = k+1$ , car  $k+1 \leq n$ . L'exercice 3 appliqué à  $\sigma = c^{k-1}$  donne alors  $\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} c^{-(k-1)} = \begin{pmatrix} k \\ c^{k-1}(1) \end{pmatrix}$ . **On obtient bien  $\begin{pmatrix} k \\ k+1 \end{pmatrix}$ .**
4. Le sous-groupe engendré par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $c$  contient tous les produits de ces deux permutations et de leurs inverses. D'après la question 3, il contient donc toutes les transpositions  $\begin{pmatrix} k \\ k+1 \end{pmatrix}$ . **D'après la question 2, ce sous-groupe est  $S_n$  tout entier.**

**Point de méthode :** pour montrer qu'une partie engendre  $S_n$ , on montre qu'elle permet de fabriquer une famille génératrice déjà connue, le plus souvent les transpositions.

## Corrigé de l'exercice 5 : Morphismes du groupe symétrique vers $C^*$

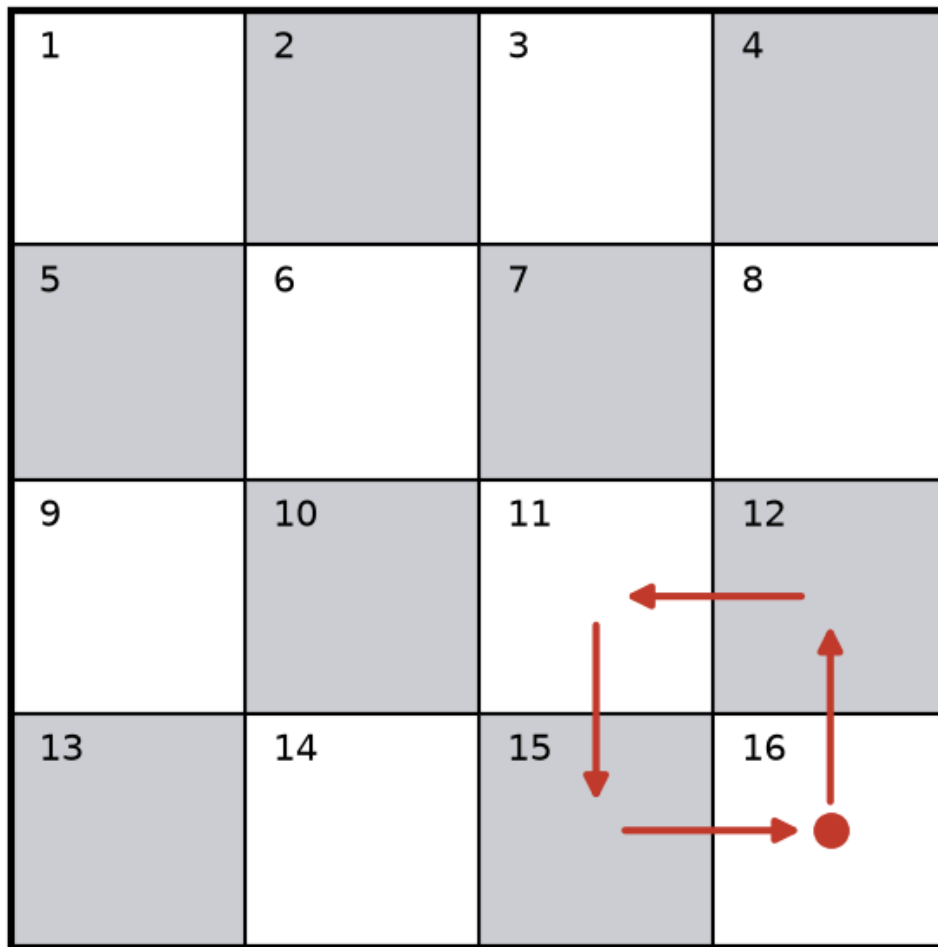
---

- Soit  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  une transposition. Il existe  $\gamma \in S_n$  tel que  $\gamma(1) = i$  et  $\gamma(2) = j$ . D'après l'exercice 3,  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \gamma^{-1}$ . Comme  $\varphi$  est un morphisme,  $\begin{pmatrix} \varphi(i) \\ \varphi(j) \end{pmatrix} = \varphi(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \varphi(\gamma)^{-1}$ . Or  $\mathbb{C}^*$  est commutatif. **Donc**  $\begin{pmatrix} \varphi(i) \\ \varphi(j) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  **pour toute transposition.**
- Notons  $\lambda = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^2 = \text{id}$ , on a  $\lambda^2 = \varphi(\text{id}) = 1$ . **Par conséquent**  $\lambda \in \{-1, 1\}$ .
- Soit  $\sigma \in S_n$ , produit de  $p$  transpositions. Alors  $\varphi(\sigma) = \lambda^p$ . Si  $\lambda = 1$ , on obtient  $\varphi(\sigma) = 1$  pour tout  $\sigma$ . Si  $\lambda = -1$ , on obtient  $\varphi(\sigma) = (-1)^p = \varepsilon(\sigma)$ . **Les seuls morphismes de  $S_n$  dans  $\mathbb{C}^*$  sont le morphisme trivial et la signature.**
- L'application  $s: \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sigma$  est une bijection de  $S_n$ , car  $s \circ s = \text{id}$ . De plus,  $\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sigma = -\varepsilon(\sigma)$ . Ainsi  $s$  envoie  $A_n$  dans son complémentaire, et inversement. Elle induit donc une bijection de  $A_n$  sur  $S_n \setminus A_n$ . Ces deux ensembles ont le même cardinal et forment une partition de  $S_n$ . **Donc**  $\text{card } A_n = \frac{n!}{2}$ .

## Corrigé de l'exercice 6 : Le jeu de taquin

---

- Avant le coup, la case vide occupe la case  $p$ , donc  $\sigma(p) = 16$ . Le carreau déplacé porte le numéro  $t = \sigma(q)$ . Après le coup, la case  $p$  contient  $t$  et la case  $q$  contient la case vide. Les autres cases ne changent pas. Or  $\sigma \circ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  envoie  $p$  sur  $\sigma(q) = t$  et  $q$  sur  $\sigma(p) = 16$ , et coïncide avec  $\sigma$  ailleurs. **La nouvelle configuration est donc**  $\sigma \circ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .
- La case de la ligne  $r$  et de la colonne  $c$  est grise si  $r + c$  est impair, blanche sinon. Deux cases voisines diffèrent d'une unité sur  $r$  ou sur  $c$ . Ainsi, chaque coup change la parité de  $r + c$ , donc la couleur de la case vide. Après  $m$  coups, la case vide a changé  $m$  fois de couleur. Si elle revient en case  $16$ , elle a retrouvé sa couleur de départ. **Par conséquent  $m$  est pair.** La figure ci-dessous montre un trajet de quatre coups qui ramène la case vide à son point de départ.



chaque déplacement change la couleur de la case vide

3. Supposons qu'une suite de  $m$  coups mène à la position visée. D'après la question 1, la configuration finale vaut  $\text{id} \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$ , où les  $\tau_k$  sont des transpositions. Sa signature vaut donc  $(-1)^m$ . De plus, la case vide est revenue en case 16, donc  $m$  est pair d'après la question 2. Ainsi la configuration finale est paire. Or la position visée correspond à la transposition  $\begin{pmatrix} 14 \\ 15 \end{pmatrix}$ , qui est impaire. **C'est une contradiction : la position visée est inaccessible.**

**Point de méthode :** la signature fournit un invariant. Pour prouver qu'une configuration est inaccessible, on cherche une quantité conservée par chaque coup, ou qui varie de façon contrôlée.

## Corrigé de l'exercice 7 : Formes bilinéaires alternées du plan

---

1. Chacune des trois expressions est une somme de termes  $x_i y_j$ . À  $v$  fixé, un tel terme est linéaire en  $u$ ; à  $u$  fixé, il est linéaire en  $v$ . Les trois applications sont donc bilinéaires. Ensuite, on calcule leur valeur en  $(u, u)$ . D'abord,  $\varphi_1(u, u) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$ . En revanche,  $\varphi_2(u, u) = 2 x_1 x_2$  vaut 2 pour  $u = (1, 1)$ . De même,  $\varphi_3(u, u) = x_1^2$  vaut 1 pour  $u = (1, 0)$ . **Seule  $\varphi_1$  est alternée.**

2. Soient  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Par bilinéarité,

$$0 = f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v).$$

Or  $f(u, u) = f(v, v) = 0$ , car  $f$  est alternée. **Donc  $f(v, u) = -f(u, v)$  :  $f$  est antisymétrique.**

3. On écrit  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$  et  $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$ . Par bilinéarité,

$$f(u, v) = x_1 y_1 f(e_1, e_1) + x_1 y_2 f(e_1, e_2) + x_2 y_1 f(e_2, e_1) + x_2 y_2 f(e_2, e_2).$$

Les termes extrêmes sont nuls, et  $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$  d'après la question 2. **Ainsi**

$f(u, v) = f(e_1, e_2)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = f(e_1, e_2) \varphi_1(u, v)$ . On retrouve en dimension 2 le fait que toute forme alternée est un multiple du déterminant.

## Corrigé de l'exercice 8 : Opérations sur les colonnes d'un déterminant

---

1. Le déterminant est antisymétrique, donc échanger deux vecteurs change le signe :

$\det_{\mathcal{B}}(v, u, w) = -3$ . Ensuite, on passe de  $(w, u, v)$  à  $(u, w, v)$  par un échange, puis à  $(u, v, w)$  par un second échange. **Donc  $\det_{\mathcal{B}}(v, u, w) = -3$  et  $\det_{\mathcal{B}}(w, u, v) = (-1)^2 \times 3 = 3$ .**

2. Par linéarité par rapport à chaque variable, on sort les trois coefficients. **On obtient**

$$2 \times 3 \times (-1) \times 3 = -18.$$

3. D'abord, on remplace  $w$  par  $w - 5u$  : on ajoute au troisième vecteur un multiple du premier, ce qui ne change pas le déterminant. Ensuite, on remplace  $u$  par  $u + 2v$  : on ajoute au premier vecteur un multiple du deuxième. **Donc  $\det_{\mathcal{B}}(u + 2v, v, w - 5u) = 3$ .**

4. On développe par multilinéarité. On obtient huit termes, dans lesquels on choisit  $u$  ou  $v$  en première place,  $v$  ou  $w$  en deuxième,  $w$  ou  $u$  en troisième. Tous les termes contenant deux fois le même vecteur sont nuls. Il reste  $\det(u, v, w) + \det(v, w, u)$ . Or  $(v, w, u)$  se déduit de  $(u, v, w)$  par un 3-cycle, qui est pair. **Donc le déterminant vaut  $3 + 3 = 6$ .**
5. La somme des trois vecteurs  $(u - v) + (v - w) + (w - u)$  est nulle. La famille est donc liée. **Par conséquent,  $\det(u - v, v - w, w - u) = 0$ .**

## Corrigé de l'exercice 9 : Un déterminant d'ordre 3

---

1. La règle de Sarrus donne trois produits positifs et trois négatifs :

$$\det A = (2 \times 0 \times 5 + 1 \times 2 \times 4 + 3 \times 1 \times 1) - (3 \times 0 \times 4 + 2 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 5).$$

Ainsi  $\det A = (0 + 8 + 3) - (0 + 4 + 5)$ . **Donc  $\det A = 2$ .**

2. La deuxième ligne vaut  $(1, 0, 2)$ , et les signes de cette ligne sont  $-, +, -$ . Le terme central est nul. Par conséquent,

$$\det A = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 3) - 2(2 - 4).$$

**On retrouve  $\det A = -2 + 4 = 2$ .**

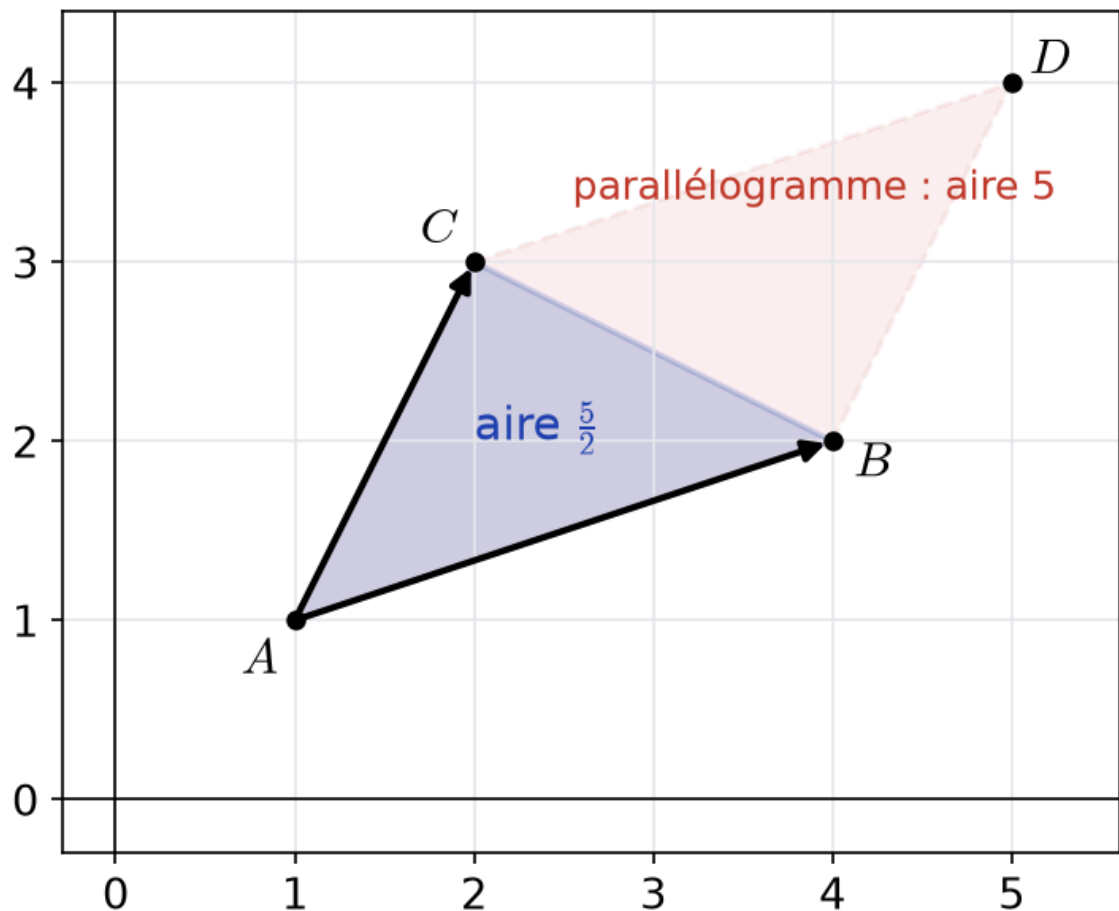
3. On utilise les propriétés du cours, avec  $n = 3$ . D'abord,  $\det(A^T) = \det A = 2$ . Ensuite,  $\det(2A) = 2^3 \det A = 16$  et  $\det(-A) = (-1)^3 \det A = -2$ . Par ailleurs,  $\det(A^3) = (\det A)^3 = 8$ . Enfin,  $\det A \neq 0$ , donc  $A$  est inversible. **On obtient  $2, 16, -2, 8$  et  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$ .**

## Corrigé de l'exercice 10 : Aires et volumes orientés

---

1. On a  $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$  et  $\overrightarrow{AC} = (1, 2)$ . Donc  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 2 - 1 \times 1$ . **Ce déterminant vaut  $5 > 0$ , donc la base est directe.**
2. L'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs est la valeur absolue de leur déterminant. Elle vaut donc  $5$ . Le triangle  $ABC$  en est la moitié, puisque la diagonale  $[BC]$  coupe le

parallélogramme  $ABDC$  en deux triangles isométriques. **L'aire du parallélogramme vaut 5 et celle du triangle  $ABC$  vaut  $\frac{5}{2}$ .** La figure suivante représente cette situation.



3. On a  $\det f = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$ . L'image du carré unité est le parallélogramme construit sur  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ . Son aire vaut  $|\det(f(e_1), f(e_2))| = |\det f| = 5$ . Par ailleurs, les sommets du triangle image vérifient  $\overrightarrow{f(A)f(B)} = f(\overrightarrow{AB})$ , et de même pour  $C$ . L'aire du triangle image vaut donc  $\frac{1}{2} |\det(f(\overrightarrow{AB}), f(\overrightarrow{AC}))| = \frac{1}{2} |\det f| \times 5$ . **On obtient une aire de 5 pour le carré image et de  $\frac{25}{2}$  pour le triangle image.**

4. Le volume cherché est la valeur absolue du déterminant des trois vecteurs. Par la règle de Sarrus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 2 + 0) - (0 + 0 + 0) = 5.$$

**Le volume du parallélépipède vaut 5.**

## Corrigé de l'exercice 11 : Un déterminant d'ordre 4 par opérations élémentaires

---

1. On prend la première ligne comme pivot. On effectue  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ , ce qui ne change pas le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & , & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ensuite,  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$  donne la ligne  $(0, 0, 1, 1)$ . Enfin,  $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$  donne la ligne  $(0, 0, 0, 2)$ . La matrice obtenue est triangulaire supérieure, de diagonale  $1, 1, 1, 2$ . **Donc**  $D = 2$ , et la matrice est inversible car  $D \neq 0$ .

## Corrigé de l'exercice 12 : Une base de l'espace dépendant d'un paramètre

---

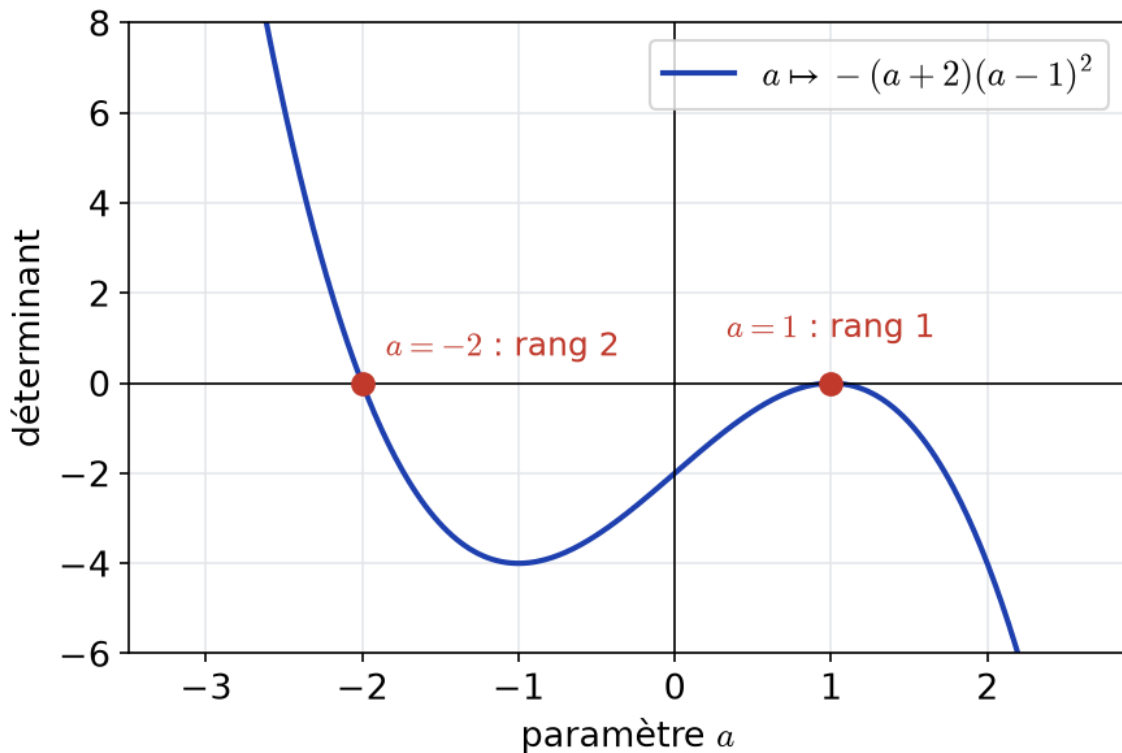
1. On écrit les trois vecteurs en colonnes. La somme des colonnes vaut  $(a+2)(1, 1, 1)$ . On effectue donc  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ , puis on factorise  $a+2$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour la dernière égalité, on a retranché la troisième ligne aux deux autres. Ensuite, on développe selon la première colonne. Le seul terme non nul est en place  $(3, 1)$ , de signe  $+$ . Il vaut

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2. \text{ Donc } \det(u_a, v_a, w_a) = -(a+2)(a-1)^2.$$

2. Trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul. **La famille est une base si et seulement si  $a \notin \{-2, 1\}$ .** La courbe ci-dessous montre le déterminant en fonction de  $a$  : il s'annule en  $-2$  en changeant de signe, et en  $1$  sans en changer, car la racine est double.



3. Si  $a = 1$ , les trois vecteurs valent  $(1, 1, 1)$ , donc le rang vaut 1. Si  $a = -2$ , on a  $u_a + v_a + w_a = 0$ , donc la famille est liée. En revanche,  $u_a = (1, 1, -2)$  et  $v_a = (1, -2, 1)$  ne sont pas colinéaires. **Le rang vaut 1 pour  $a = 1$  et 2 pour  $a = -2$ .**

## Corrigé de l'exercice 13 : Matrices antisymétriques de taille impaire

1. D'une part,  $\det(A^T) = \det A$ . D'autre part,  $\det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$ , car  $n$  est impair. Comme  $A^T = -A$ , on obtient  $\det A = -\det A$ . **Donc  $\det A = 0$ .**
2. Non. Par exemple,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est antisymétrique. **Pourtant  $\det A = 1 \neq 0$ .**
3. Supposons  $M^2 = -I_n$ . En passant au déterminant,  $(\det M)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n = -1$ . Or le carré d'un réel est positif. **C'est impossible : aucune matrice réelle de taille impaire ne vérifie  $M^2 = -I_n$ .**

4. Supposons  $MN = -NM$  avec  $M$  et  $N$  inversibles. Alors  $\det M \det N = (-1)^n \det N \det M = -\det M \det N$ . Donc  $\det M \det N = 0$ , ce qui contredit l'inversibilité. Pour  $n = 2$ , en revanche, on peut prendre  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . En effet,  $MN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $NM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . **En taille impaire, il n'existe pas de telles matrices ; en taille 2, cet exemple convient.**

## Corrigé de l'exercice 14 : Déterminant de quelques endomorphismes

---

On travaille dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- La formule du binôme donne  $\varphi(X^k) = (X+1)^k = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$ . La matrice de  $\varphi$  est donc triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. **Ainsi  $\det \varphi = 1$ , et  $\varphi$  est un automorphisme.**
- On a  $\psi(X^k) = X^k + k X^{k-1} = (k+1) X^k$ . La matrice de  $\psi$  est diagonale, de coefficients  $1, 2, \dots, n+1$ . **Donc  $\det \psi = (n+1)!$ , et  $\psi$  est un automorphisme.**
- On a  $D(1) = 0$ , donc  $D$  n'est pas injectif. D'ailleurs, sa matrice est triangulaire supérieure stricte. **Ainsi  $\det D = 0$ , et  $D$  n'est pas un automorphisme.**
- On concatène une base de l'espace des matrices symétriques et une base de celui des matrices antisymétriques. On obtient une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , puisque ces sous-espaces sont supplémentaires. Dans cette base,  $T$  vaut l'identité sur le premier sous-espace et moins l'identité sur le second. Sa matrice est donc diagonale, avec  $\frac{n(n-1)}{2}$  coefficients égaux à  $-1$ . **Par conséquent,  $\det T = (-1)^{n(n-1)/2}$ , et  $T$  est un automorphisme.** Par exemple,  $\det T = -1$  pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , mais  $\det T = 1$  pour  $n = 4$ .

**Point de méthode :** pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on choisit une base où sa matrice est triangulaire ou diagonale, puisque le résultat ne dépend pas de la base.

## Corrigé de l'exercice 15 : Déterminant à diagonale constante

---

1. Dans chaque ligne, la somme des coefficients vaut  $a + (n-1)b$ . L'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ , qui conserve le déterminant, remplace donc la première colonne par une colonne constante égale à  $a + (n-1)b$ . On factorise ce nombre. La nouvelle matrice a pour première ligne  $(1, b, \dots, b)$ . Sa ligne  $i \geq 2$  contient 1 en première place,  $a$  en place  $i$  et  $b$  ailleurs. Ensuite, on effectue  $L_i \leftarrow L_i - L_1$  pour  $i \geq 2$ . La ligne  $i$  devient nulle, sauf son coefficient  $a - b$  en place  $i$ . La matrice obtenue est triangulaire supérieure, de diagonale  $1, a - b, \dots, a - b$ . **Donc**  $\Delta_n = (a + (n-1)b)(a - b)^{n-1}$ .
2. La matrice est inversible si et seulement si  $\Delta_n \neq 0$ . **C'est le cas si et seulement si**  $a \neq b$  **et**  $a \neq -(n-1)b$ .
3. On prend  $n = 5$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$ . **On obtient**  $(0 + 4)(0 - 1)^4 = 4$ .

## Corrigé de l'exercice 16 : Déterminant de la matrice des minimums

---

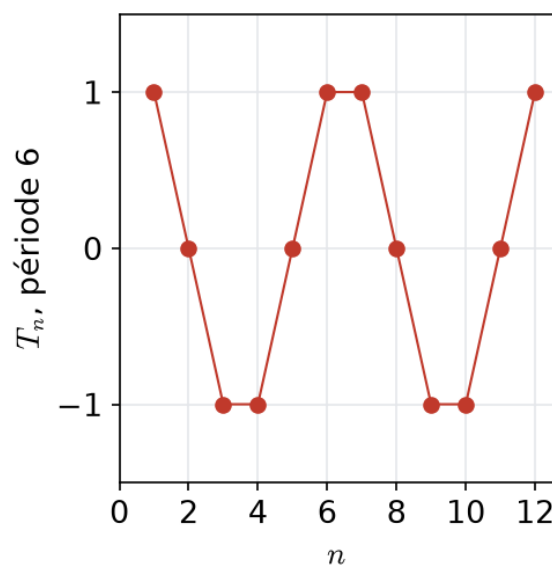
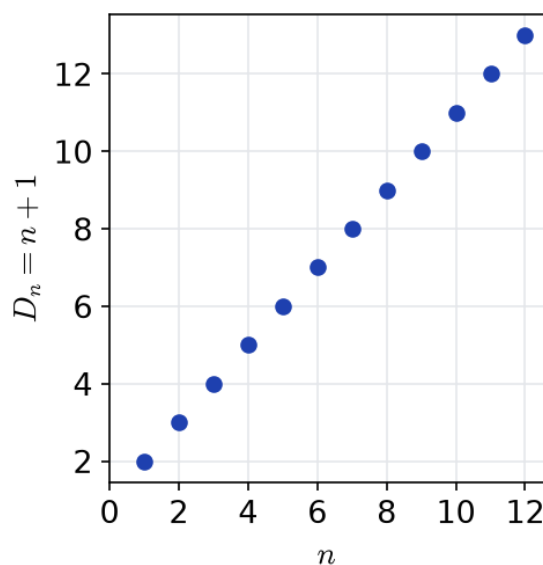
1. La ligne  $i$  de  $M_n$  vaut  $(1, 2, \dots, i-1, i, i, \dots, i)$ . On effectue les opérations de  $i = n$  jusqu'à  $i = 2$ . Ainsi, au moment où l'on modifie  $L_i$ , la ligne  $L_{i-1}$  n'a pas encore changé. Pour  $j \leq i-1$ , le coefficient  $j$  de  $L_i - L_{i-1}$  vaut  $j - j = 0$ . Pour  $j \geq i$ , il vaut  $i - (i-1) = 1$ . La ligne  $i$  devient donc  $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ , avec le premier 1 en place  $i$ . Ces opérations conservent le déterminant, et la matrice obtenue est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. **Donc**  $\det M_n = 1$ .
2. Comme  $\det M_n \neq 0$ , la matrice  $M_n$  est inversible. De plus,  
$$M_n^{-1} = \frac{1}{\det M_n} \text{com}(M_n)^T = \text{com}(M_n)^T$$
. Or les cofacteurs sont des déterminants de matrices à coefficients entiers, donc des entiers. **Ainsi**  $M_n^{-1}$  **est à coefficients entiers**.

## Corrigé de l'exercice 17 : Déterminants tridiagonaux

- Soit  $n \geq 2$ . On développe selon la première ligne, qui vaut  $(a, b, 0, \dots, 0)$ . Le premier terme vaut  $a D_{n-1}(a, b)$ . Le second vaut  $-b$  fois le mineur  $\Delta_{12}$ , obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne 2. La première colonne de ce mineur vaut  $(b, 0, \dots, 0)$ . On le développe selon cette colonne : il vaut  $b D_{n-2}(a, b)$ . Pour  $n = 2$ , la convention  $D_0 = 1$  donne bien  $D_2 = a^2 - b^2$ . **Donc**  $D_n(a, b) = a D_{n-1}(a, b) - b^2 D_{n-2}(a, b)$ .
- Ici,  $D_n = 2 D_{n-1} - D_{n-2}$ . L'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 1 = 0$  a pour racine double 1. Il existe donc  $\alpha, \beta$  tels que  $D_n = \alpha + \beta n$ . Les conditions  $D_0 = 1$  et  $D_1 = 2$  donnent  $\alpha = \beta = 1$ . **Ainsi**  $D_n(2, -1) = n + 1$ .
- Ici,  $D_n = 5 D_{n-1} - 4 D_{n-2}$ . L'équation  $r^2 - 5r + 4 = 0$  a pour racines 1 et 4. Donc  $D_n = \alpha + \beta 4^n$ . Ensuite,  $D_0 = 1$  et  $D_1 = 5$  donnent  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha + 4\beta = 5$ . Par conséquent,  $\beta = \frac{4}{3}$  et  $\alpha = -\frac{1}{3}$ . **On obtient**  
 $D_n(5, 2) = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$ . Par exemple,  $D_2 = 25 - 4 = 21 = \frac{64 - 1}{3}$ .
- La relation devient  $T_n = T_{n-1} - T_{n-2}$ , avec  $T_0 = T_1 = 1$ . On calcule successivement  $T_2 = 0$ ,  $T_3 = -1$ ,  $T_4 = -1$ ,  $T_5 = 0$ ,  $T_6 = 1$  et  $T_7 = 1$ . De plus, pour tout  $n$ ,

$$T_{n+3} = T_{n+2} - T_{n+1} = (T_{n+1} - T_n) - T_{n+1} = -T_n.$$

Donc  $T_{n+6} = T_n$  : la suite est 6-périodique. Elle s'annule exactement lorsque  $n \equiv 2$  ou  $n \equiv 5$  modulo 6. **La matrice est inversible si et seulement si  $n$  n'est pas congru à 2 modulo 3**. La figure ci-dessous compare les suites des questions 2 et 4.



**Point de méthode :** on vérifie toujours la formule finale sur les premiers termes, calculés directement, avant de conclure.

## Corrigé de l'exercice 18 : Variantes du déterminant de Vandermonde

---

1. D'après la formule du cours,  $V(1, 2, 3, 4) = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)$ .  
**Donc**  $V(1, 2, 3, 4) = 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$ .

2. La formule de Vandermonde, valable pour toutes valeurs, donne

$$P(X) = V(a, b, c)(X - a)(X - b)(X - c), \text{ avec } V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b).$$

Le coefficient de  $X^2$  dans ce produit vaut  $-(a + b + c)V(a, b, c)$ . D'autre part, on développe  $P$  selon sa dernière colonne  $(1, X, X^2, X^3)$ . Le coefficient de  $X^2$  est le cofacteur en place  $(3, 4)$ . Il vaut  $(-1)^{3+4}\Delta_{34}$ , où  $\Delta_{34}$  est obtenu en supprimant la ligne des carrés et la dernière colonne. Ce mineur est exactement le déterminant cherché. Par identification,  $-\Delta_{34} = -(a + b + c)V(a, b, c)$ . **Donc le déterminant vaut**  
 $(a + b + c)(b - a)(c - a)(c - b)$ .

3. L'application  $L: P \rightarrow (P(x_0), \dots, P(x_n))$  est linéaire. De plus,  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathbb{R}^{n+1}$  ont la même dimension  $n + 1$ . Dans les bases canoniques, la colonne associée à  $X^k$  est  $(x_0^k, \dots, x_n^k)$ . La matrice de  $L$  est donc la transposée de la matrice de Vandermonde de  $x_0, \dots, x_n$ . Son déterminant vaut  $V(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ , car les  $x_i$  sont distincts. **Par conséquent,  $L$  est un isomorphisme.**

4. On cherche  $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ . Les conditions donnent  $\alpha = 1$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 2$  et  $\alpha + 2\beta + 4\gamma = 5$ . Ainsi  $\beta + \gamma = 1$  et  $\beta + 2\gamma = 2$ , d'où  $\gamma = 1$  et  $\beta = 0$ . La question 3 assure l'unicité. **L'unique solution est**  $P = X^2 + 1$ .

## Corrigé de l'exercice 19 : Comatrice et inverse d'une matrice

## d'ordre 3

---

1. On calcule chaque cofacteur  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ . Pour la première ligne,  
 $C_{11} = 0 \times 5 - 2 \times 1 = -2$ ,  $C_{12} = -(1 \times 5 - 2 \times 4) = 3$  et  
 $C_{13} = 1 \times 1 - 0 \times 4 = 1$ . Pour la deuxième,  $C_{21} = -(1 \times 5 - 3 \times 1) = -2$ ,  
 $C_{22} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$  et  $C_{23} = -(2 \times 1 - 1 \times 4) = 2$ . Pour la troisième,  
 $C_{31} = 1 \times 2 - 3 \times 0 = 2$ ,  $C_{32} = -(2 \times 2 - 3 \times 1) = -1$  et  
 $C_{33} = 2 \times 0 - 1 \times 1 = -1$ . **Donc**  $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .
2. On a  $\text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . La première ligne de  $A$  fournit  $-4 + 3 + 3 = 2$ ,  
 $-4 - 2 + 6 = 0$  et  $4 - 1 - 3 = 0$ . La deuxième donne  $-2 + 0 + 2 = 0$ ,  
 $-2 + 0 + 4 = 2$  et  $2 + 0 - 2 = 0$ . La troisième donne  $-8 + 3 + 5 = 0$ ,  
 $-8 - 2 + 10 = 0$  et  $8 - 1 - 5 = 2$ . **On retrouve**  
 $A \text{com}(A)^T = 2 I_3 = \det(A) I_3$ .
3. Comme  $\det A = 2 \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{2} \text{com}(A)^T$ . **Donc**  
 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

## Corrigé de l'exercice 20 : Matrices inversibles à coefficients entiers

---

1. D'après la formule  $\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_j a_{\sigma(j)j}$ , le déterminant est une somme de produits d'entiers. De même, chaque cofacteur est, au signe près, le déterminant d'une matrice extraite à coefficients entiers. **Donc  $\det A$  et les cofacteurs de  $A$  sont des entiers.**
2. Supposons d'abord  $A$  inversible avec  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Alors  
 $\det A \times \det(A^{-1}) = \det I_n = 1$ , et ces deux déterminants sont entiers d'après la question 1. Or les seuls entiers inversibles sont 1 et -1. Réciproquement, si  $\det A = \pm 1$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \pm \text{com}(A)^T$ , à coefficients entiers. **L'équivalence est démontrée.**

3. Pour la première matrice,  $\det = 4 - 3 = 1$ . Son inverse est  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , à coefficients entiers. En revanche, la seconde a pour déterminant  $6 - 4 = 2$ . Son inverse  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  contient  $\frac{3}{2}$ . **Seule la première a un inverse à coefficients entiers, comme le prévoit le critère.**
4. On effectue  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ , puis on développe selon la première colonne :  $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$ . Ensuite, on calcule les cofacteurs. On trouve  $C_{11} = 3$ ,  $C_{12} = -3$ ,  $C_{13} = 1$ ,  $C_{22} = 5$ ,  $C_{23} = -2$  et  $C_{33} = 1$ . Par symétrie de  $B$ , la comatrice est symétrique. **Donc**  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ . On vérifie par exemple que la deuxième ligne de  $B$  fois la première colonne donne  $3 - 6 + 3 = 0$ .

## **Corrigé de l'exercice 21 : Déterminant triangulaire par blocs**

1. Si  $A$  n'est pas inversible, ses colonnes sont liées dans  $\mathbb{K}^p$ . Or les  $p$  premières colonnes de  $M$  sont formées des colonnes de  $A$  complétées par  $q$  zéros. Elles sont donc liées elles aussi. **Par conséquent**,  $\det M = 0 = \det A \det C$ .
2. On développe  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$  selon sa dernière colonne. Celle-ci contient un seul coefficient non nul, égal à 1, en place  $(p+q, p+q)$ . Le signe vaut  $+$  et le mineur a la même forme, avec  $I_{q-1}$ . Après  $q$  développements, il reste  $\det A$ . De même, on développe  $\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & C \end{pmatrix}$  selon sa première colonne, qui vaut  $(1, 0, \dots, 0)$ . Le mineur obtenu a la même forme, avec  $I_{p-1}$ . Après  $p$  développements, il reste  $\det C$ . **Les deux égalités sont établies.**
3. Par produit par blocs,
- $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A A^{-1}B \\ 0 & C \end{pmatrix} = M.$$
- Le déterminant d'un produit est le produit des déterminants. **D'après la question 2**,  $\det M = \det A \det C$ .
4. On applique le résultat avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $\det A = 4 - 6 = -2$  et  $\det C = 8 - 3 = 5$ . **Le déterminant vaut  $-10$ .**

## Corrigé de l'exercice 22 : Signature et produit de Vandermonde

- Notons  $W(\sigma) = V(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . Soient  $\sigma$  et une transposition  $t = (k, l)$ . On pose  $y_i = x_{\sigma(i)}$ . Alors  $W(\sigma t)$  est le déterminant des colonnes associées à  $y_{t(1)}, \dots, y_{t(n)}$ . On passe donc de  $W(\sigma)$  à  $W(\sigma t)$  en échangeant les colonnes  $k$  et  $l$ . Par conséquent,  $W(\sigma t) = -W(\sigma)$ . Écrivons maintenant  $\sigma = t_1 \dots t_p$  avec des transpositions. Par récurrence sur  $p$ , on obtient  $W(\sigma) = (-1)^p W(\text{id})$ . **Donc**  
 $V(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) V(x_1, \dots, x_n)$ .
- On choisit  $x_i = i$ . D'une part,  $V(1, \dots, n) = \prod_{i < j} (j - i)$ , qui est non nul. D'autre part,  $V(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = \prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))$ . On divise la seconde égalité par la première. **On obtient**  $\varepsilon(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ .
- L'application  $\{i, j\} \rightarrow \{\sigma(i), \sigma(j)\}$  est une bijection de l'ensemble des paires de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus,  $|\sigma(j) - \sigma(i)|$  ne dépend que de la paire image. Ainsi,  
 $\prod_{i < j} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{i < j} (j - i)$ . Il reste le signe du produit. Or le facteur associé à  $(i, j)$  est négatif si et seulement si  $(i, j)$  est une inversion. **Donc**  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$ .
- Les inversions de  $\sigma$  sont  $(1, 2)$ , car  $3 > 1$ , puis  $(1, 4)$ , car  $3 > 2$ , et enfin  $(3, 4)$ , car  $4 > 2$ . Les couples  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$  et  $(2, 4)$  ne sont pas des inversions. Ainsi  $N(\sigma) = 3$   
 $\sigma = (1, 3, 4, 2)$   
et  $\varepsilon(\sigma) = -1$ . Par ailleurs,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , donc  $\sigma = (1, 3, 4, 2)$ . **Ce cycle de longueur 4 a bien pour signature**  $(-1)^3 = -1$ .

## Corrigé de l'exercice 23 : Problème : comatrice d'un produit et densité des matrices inversibles

### Partie A.

1. Le coefficient  $(i, j)$  de  $A + x I_n$  vaut  $a_{ij} + x \delta_{ij}$ , où  $\delta_{ij}$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon. Ainsi,

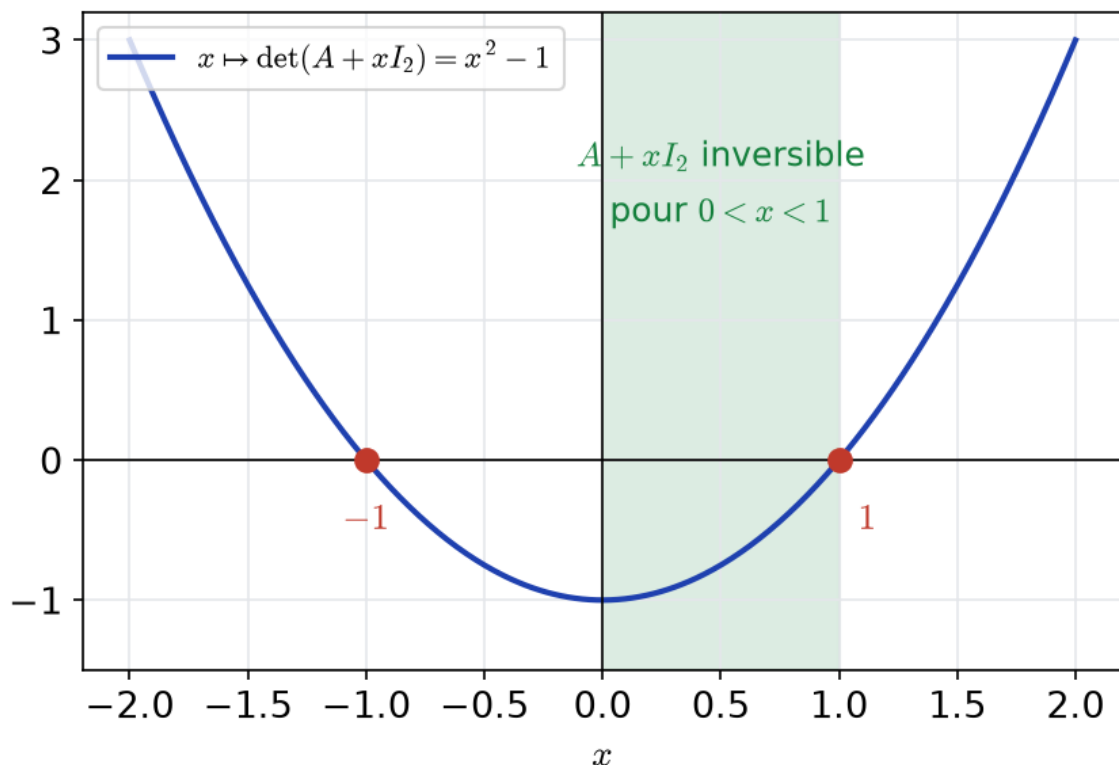
$$\det(A + x I_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (a_{\sigma(j)j} + x \delta_{\sigma(j)j}).$$

Chaque terme est un polynôme en  $x$ . Pour  $\sigma = \text{id}$ , on obtient  $\prod_j (a_{jj} + x)$ , de degré

$n$  et de coefficient dominant 1. Soit maintenant  $\sigma \neq \text{id}$ . Il existe  $j$  tel que  $k = \sigma(j) \neq j$ . Alors  $\sigma(k) \neq k$ , sinon  $\sigma(k) = k = \sigma(j)$  contredirait l'injectivité. Au moins deux facteurs sont donc constants, et le terme est de degré au plus  $n - 2$ . Enfin, la valeur en  $x = 0$  vaut  $\det A$ . **La fonction est polynomiale de degré  $n$ , de coefficient dominant 1 et de terme constant  $\det A$ .**

2. Le polynôme  $P: x \rightarrow \det(A + x I_n)$  est non nul, car de degré  $n$ . Il a donc un nombre fini de racines. S'il n'a aucune racine strictement positive, on prend  $r = 1$ . Sinon, on prend pour  $r$  la plus petite racine strictement positive. Dans les deux cas,  $P$  ne s'annule pas sur  $]0, r[$ . **Ainsi  $A + x I_n$  est inversible pour tout  $x \in ]0, r[$ .**

3. Ici,  $\det(A + x I_2) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1$ . C'est bien un polynôme unitaire de degré 2, de terme constant  $\det A = -1$ . Ses racines sont  $-1$  et  $1$ . **On peut donc prendre  $r = 1$  :  $A$  n'est pas inversible, mais  $A + x I_2$  l'est pour  $0 < x < 1$ .** La figure ci-dessous illustre ce phénomène.



## Partie B.

1. D'après le cours,  $\text{com}(M)^T M = \det(M) I_n$ . Si  $M$  est inversible, on multiplie à droite par  $M^{-1}$  :  $\text{com}(M)^T = \det(M) M^{-1}$ . On transpose ensuite. **Donc**  
 $\text{com}(M) = \det(M) (M^{-1})^T$ .

2. Soient  $A$  et  $B$  inversibles. Alors  $AB$  est inversible, d'inverse  $B^{-1} A^{-1}$ . D'après la question 1,

$$\text{com}(AB) = \det(A) \det(B) (B^{-1} A^{-1})^T = \det(A) (A^{-1})^T \det(B) (B^{-1})^T.$$

**On reconnaît**  $\text{com}(A) \text{com}(B)$ .

3. D'après la formule de la question A.1 écrite pour  $M(x)$ ,  $\det M(x)$  est une somme de produits de fonctions polynomiales. C'est donc une fonction polynomiale. Ensuite, chaque cofacteur est, au signe près, le déterminant d'une matrice extraite de  $M(x)$ . Ses coefficients sont encore polynomiaux en  $x$ . **Par le même argument, les coefficients de  $\text{com}(M(x))$  sont des fonctions polynomiales de  $x$ .**

4. Soient  $A, B$  quelconques. D'après A.2, il existe  $r > 0$  tel que  $A_x = A + x I_n$  et  $B_x = B + x I_n$  soient inversibles pour  $x \in ]0, r[$ . On prend le plus petit des deux rayons. D'après B.2,  $\text{com}(A_x B_x) = \text{com}(A_x) \text{com}(B_x)$  sur cet intervalle. Or  $A_x B_x = AB + x(A + B) + x^2 I_n$  a des coefficients polynomiaux. D'après B.3, chaque coefficient de  $\text{com}(A_x B_x) - \text{com}(A_x) \text{com}(B_x)$  est une fonction polynomiale de  $x$ . Elle s'annule sur un intervalle infini, donc c'est le polynôme nul. En particulier, elle s'annule en  $x = 0$ . **Ainsi  $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$  pour toutes matrices  $A$  et  $B$ .**

## Partie C.

1. On part de  $A \text{com}(A)^T = \det(A) I_n$  et l'on passe au déterminant. Comme  $\det(\text{com}(A)^T) = \det(\text{com } A)$ , on obtient  $\det A \times \det(\text{com } A) = (\det A)^n$ . On divise par  $\det A \neq 0$ . **Donc**  $\det(\text{com } A) = (\det A)^{n-1}$ .

2. Soit  $A$  quelconque et  $A_x = A + x I_n$ . D'après B.3, la fonction  $x \rightarrow \det(\text{com } A_x) - (\det A_x)^{n-1}$  est polynomiale. D'après C.1 et A.2, elle s'annule sur  $]0, r[$ . C'est donc le polynôme nul, et sa valeur en  $0$  est nulle. **L'égalité**

$\det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}$  **vaut pour toute matrice.**

3. Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a  $\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Son déterminant vaut  $da - (-c)(-b) = ad - bc$ . **On retrouve**  $(\det A)^{2-1} = \det A$ .

**Point de méthode :** pour étendre une identité polynomiale des matrices inversibles à toutes les matrices, on remplace  $A$  par  $A + x I_n$ , puis on fait tendre  $x$  vers 0 par un argument de polynômes.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

## Pour aller plus loin en maths sup

---

- Le cours : [groupe symétrique et déterminants, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur groupe symétrique et déterminants](#)
- À maîtriser avant : [Matrices, changements de base, rang et trace](#), [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre précédent : [Matrices, changements de base, rang et trace](#)
- Chapitre suivant : [Intégration sur un segment](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)