

Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1 : Changement de repère dans le plan

Le plan est muni du repère orthonormé canonique $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point $O(1,2)$ et les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = (-1,1)$.

1. Montrez que $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan. Est-il orthogonal ? Est-il orthonormé ?
2. Déterminez les coordonnées canoniques du point M de coordonnées $(X, Y) = (2, 1)$ dans $\mathcal{R}'$.
3. Exprimez X et Y en fonction des coordonnées canoniques x et y d'un point quelconque.
4. Donnez une équation dans $\mathcal{R}'$ des droites $\mathcal{D}_1: y = x + 1$ et $\mathcal{D}_2: x + y = 5$.
5. Donnez une équation dans $\mathcal{R}'$ du cercle $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Commentez.

Exercice 2 : Droites du plan, équations et paramétrages

Dans un repère orthonormé du plan, on considère $A(1,3)$, $B(5,1)$, $C(2,-1)$ et la droite $\mathcal{D}: 3x - y + 1 = 0$.

1. Donnez un paramétrage de la droite (AB) .
2. Déduisez-en une équation cartésienne de (AB) et un vecteur normal.
3. Donnez un vecteur directeur et un paramétrage de $\mathcal{D}$.

- Déterminez le point d'intersection de (AB) et de $\mathcal{D}$.
- Donnez une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C .

Exercice 3 : Plans et droites de l'espace, d'une représentation à l'autre

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Soit $\mathcal{P}: x+2y-z=3$. Donnez un vecteur normal, vérifiez que $A(1,1,0) \in \mathcal{P}$, puis donnez un paramétrage de $\mathcal{P}$.
- Soit $\mathcal{Q}$ le plan paramétré par $x=1+s+t$, $y=2-s+2t$, $z=3s+t$, avec $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminez une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$ en éliminant les paramètres.
- Retrouvez ce résultat à l'aide d'un produit vectoriel.
- Soit Δ la droite passant par $B(2,-1,0)$ et dirigée par $\vec{w}=(1,3,-2)$. Écrivez Δ comme intersection de deux plans.

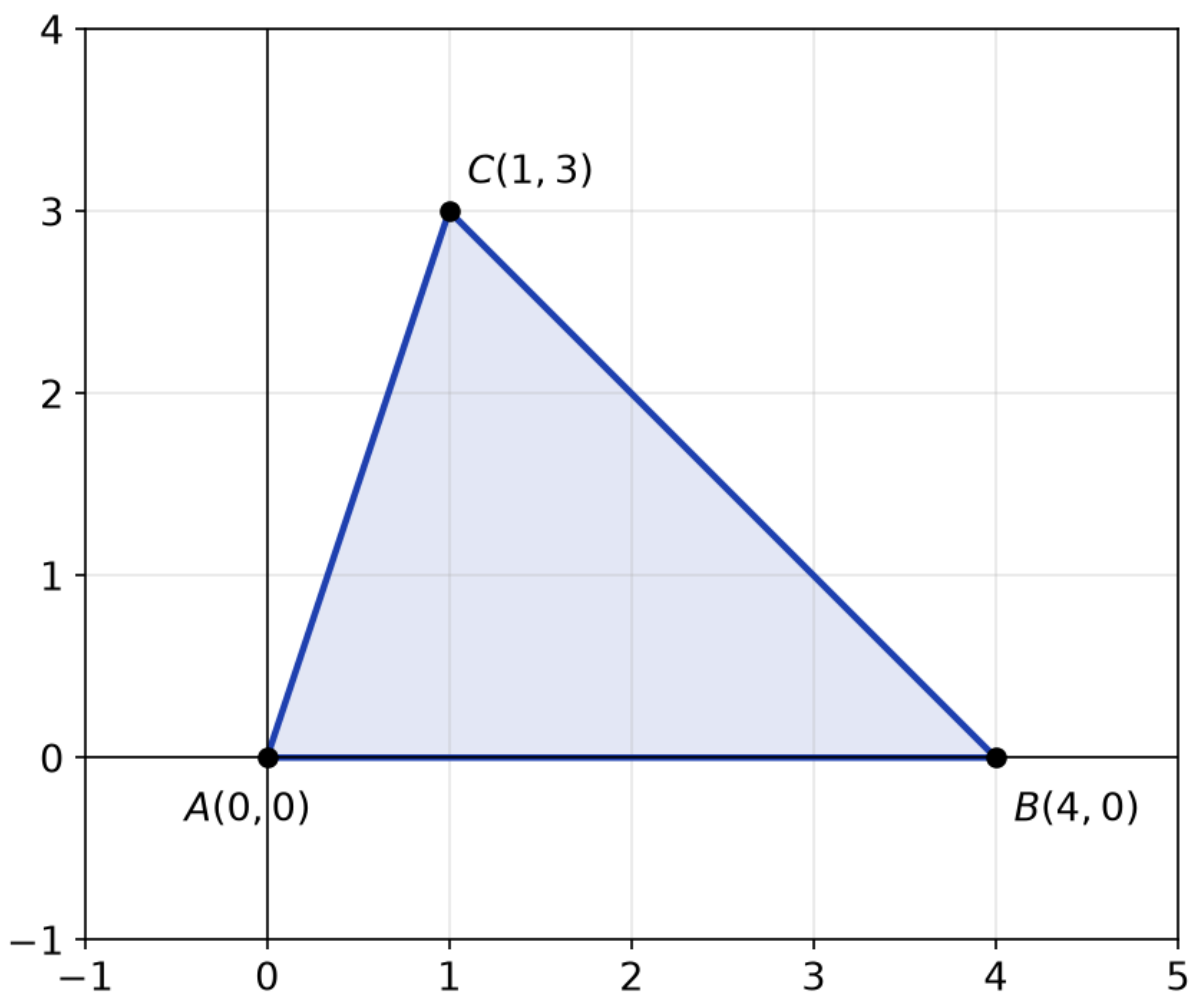
Exercice 4 : Plan passant par trois points

On considère les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,0)$ et $C(0,1,1)$ de l'espace.

- Calculez $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. Déduisez-en que A , B et C ne sont pas alignés.
- Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Calculez l'aire du triangle ABC .
- Les points $D(3,0,1)$ et $E(1,1,1)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

Exercice 5 : Produit scalaire et angles d'un triangle

Dans un repère orthonormé du plan, on considère le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(4,0)$ et $C(1,3)$, représenté ci-dessous.



1. Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis $\cos \widehat{BAC}$.
2. Calculez $\cos \widehat{ABC}$ et donnez la mesure exacte de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Calculez $\cos \widehat{ACB}$.
4. Déterminez le projeté orthogonal de C sur (AB) , puis l'aire du triangle. Contrôlez l'aire à l'aide d'un déterminant.
5. Déterminez les coordonnées de l'orthocentre du triangle.

Exercice 6 : Distance d'un point à une droite du plan

Dans un repère orthonormé du plan, on considère $\mathcal{D}:3x-4y+2=0$ et $M(2,-1)$.

1. Calculez la distance de M à $\mathcal{D}$.
2. Déterminez le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ et vérifiez que MH est bien la distance trouvée.
3. Calculez la distance entre $\mathcal{D}$ et la droite parallèle $\mathcal{D}':3x-4y-8=0$.
4. Soit Δ la droite paramétrée par $x=1+2t$, $y=t$. Calculez la distance de l'origine à Δ .

Exercice 7 : Cercles du plan

Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

1. Montrez que $\mathcal{C}$ est un cercle dont vous préciserez le centre O et le rayon R .
2. Vérifiez que $A(5,1) \in \mathcal{C}$ et déterminez la tangente à $\mathcal{C}$ en A .
3. Déterminez l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}:x+2y-6=0$.
4. Pour quelles valeurs du réel c la droite d'équation $x+2y+c=0$ est-elle tangente à $\mathcal{C}$?
5. Quel est l'ensemble d'équation $x^2+y^2+2x-4y+10=0$?

Exercice 8 : Distance d'un point à un plan et projeté orthogonal

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}:2x-y+2z-1=0$ et le point $M(3,1,4)$.

1. Calculez la distance de M à $\mathcal{P}$.
2. Déterminez le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$.
3. Déterminez le symétrique M' de M par rapport à $\mathcal{P}$.
4. Déterminez l'ensemble des points situés à la distance 2 du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 9 : Intersection de deux plans

On considère les plans $\mathcal{P}_1:x+y-z=1$ et $\mathcal{P}_2:2x-y+z=5$.

1. Montrez que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Résolvez le système formé par leurs équations et donnez un paramétrage de la droite $\mathcal{D}=\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.
3. Calculez $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ et comparez avec le résultat précédent.
4. Calculez l'angle entre les deux plans, défini comme l'angle entre leurs vecteurs normaux.
5. Déterminez le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}_3:x+2y+z=4$.

Exercice 10 : Positions relatives d'une droite et d'un plan

On considère le plan $\mathcal{P}:x-2y+z=3$ et les droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$ passant par $(1,0,2)$ et dirigée par $(1,1,1)$;

- $\mathcal{D}_2$ passant par $(0,0,0)$ et dirigée par $(1,1,1)$;
- $\mathcal{D}_3$ passant par $(1,1,1)$ et dirigée par $(2,0,1)$;
- $\mathcal{D}_4$ définie par le système $x+y=1$ et $z=0$.

1. Pour chaque droite, déterminez sa position relative par rapport à $\mathcal{P}$ et, le cas échéant, le point d'intersection.
2. Calculez la distance entre $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{P}$.
3. Déterminez la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par $A(1,1,1)$, puis son point d'intersection avec $\mathcal{P}$. Retrouvez ainsi la distance de A à $\mathcal{P}$.

Exercice 11 : Positions relatives de deux droites de l'espace

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,2,0)$ et dirigée par $\vec{u} = (1,-1,2)$, ainsi que :

- $\mathcal{D}'$ passant par $A'(0,1,1)$ et dirigée par $\vec{v} = (2,1,0)$;
- $\mathcal{D}''$ passant par $A''(1,-1,3)$ et dirigée par $\vec{w} = (1,2,-1)$;
- Δ passant par O et dirigée par $(-2,2,-4)$.

1. Montrez que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. Montrez que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont sécantes. Déterminez leur point commun et une équation du plan qui les contient.
3. Quelle est la position relative de $\mathcal{D}$ et de Δ ?

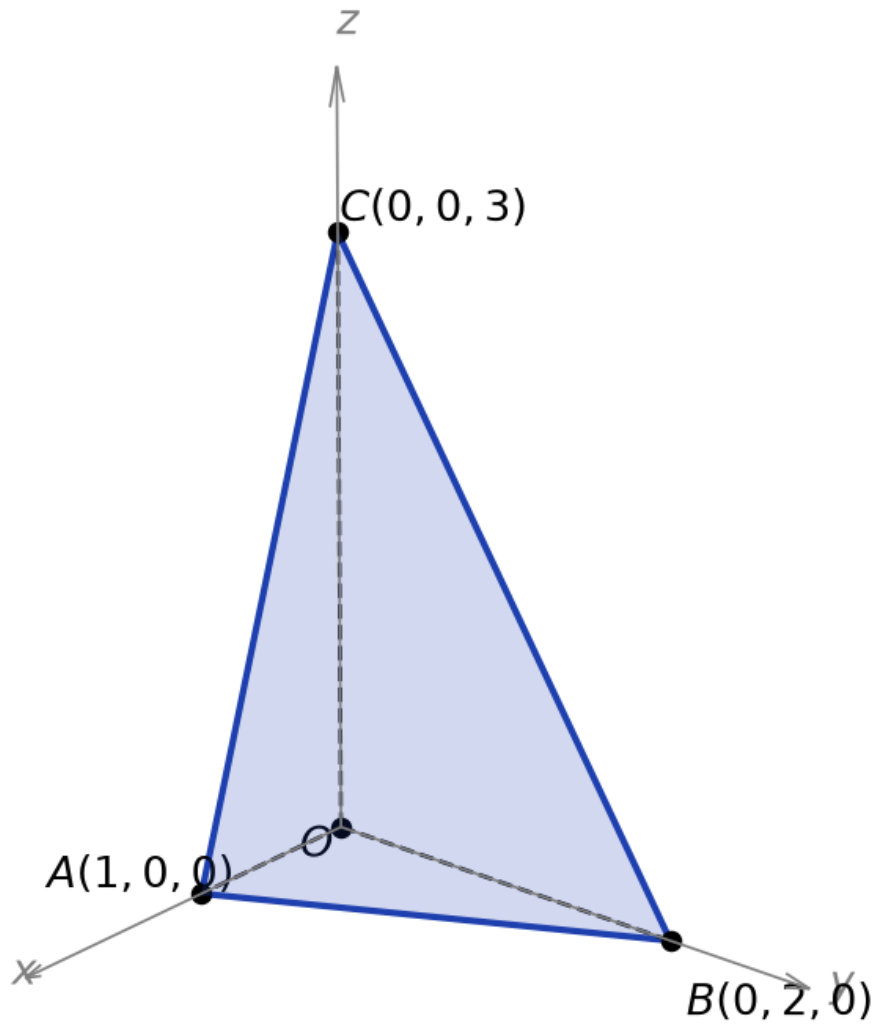
Exercice 12 : Distance d'un point à une droite de l'espace

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,0,-1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1,2,2)$, ainsi que le point $M(4,3,-1)$.

1. Déterminez le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$.
2. Déduisez-en la distance de M à $\mathcal{D}$.
3. Retrouvez cette distance avec la formule du produit vectoriel.
4. On pose $f(t) = |\overrightarrow{AM} - t\vec{u}|^2$. Développez $f(t)$, étudiez son minimum et retrouvez le résultat.

Exercice 13 : Produit mixte et volume d'un tétraèdre

On considère les points $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$, représentés ci-dessous, ainsi que $D(1,1,1)$.



1. Calculez le volume du tétraèdre $OABC$ à l'aide d'un produit mixte.
2. Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Calculez la distance de O au plan (ABC) . Déduisez-en l'aire du triangle ABC , puis contrôlez-la par un produit vectoriel.
4. Calculez le volume du tétraèdre $ABCD$ de deux façons.

Exercice 14 : Identités sur le produit vectoriel

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Démontrez l'identité de Lagrange : $|\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$.
2. Démontrez la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$.
3. Déduisez-en l'identité de Jacobi : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$.
4. Calculez $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j})$ et $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 15 : Cercle circonscrit à un triangle

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(0,0)$, $B(6,0)$ et $C(2,4)$.

1. Déterminez les équations des médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$, puis le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC et son rayon.
2. On cherche le cercle sous la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Écrivez le système linéaire vérifié par (a, b, c) et résolvez-le. Comparez.
3. Déterminez la tangente au cercle en A .
4. Le point $D(5,3)$ est-il à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle ?

Exercice 16 : Sphère, plan sécant et plans tangents

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère l'ensemble S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ et le plan $P: 2x + y + 2z - 15 = 0$.

1. Montrez que $\mathcal{S}$ est une sphère dont vous donnerez le centre Ω et le rayon R .
2. Montrez que $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{S}$ selon un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.
3. Déterminez les plans parallèles à $\mathcal{P}$ et tangents à $\mathcal{S}$, ainsi que les points de contact.
4. Vérifiez que $A(4,2,3) \in \mathcal{S}$ et déterminez le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A .

Exercice 17 : Ensembles de points définis par des distances

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère $A(2,0,1)$ et $B(0,4,-1)$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Montrez que pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.
2. Déduisez-en la nature de l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, avec son centre et son rayon.
3. Déterminez une équation de l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points équidistants de A et de B . Reconnaissez-le.
4. Déterminez la nature de l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M tels que $MA = 2MB$, avec ses éléments caractéristiques.

Exercice 18 : Système linéaire et positions de trois plans

Soit m et a deux réels. On considère le système

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + mz = a \end{cases}$$

et l'on note $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ les plans définis par chacune des équations.

1. Calculez le déterminant de la matrice du système.
2. On suppose $m \neq 4$. Résolvez (S) et interprétez géométriquement.
3. On suppose $m = 4$ et $a = 3$. Résolvez (S) et interprétez géométriquement.
4. On suppose $m = 4$ et $a \neq 3$. Montrez que (S) n'a pas de solution. Les plans sont-ils parallèles deux à deux ? Décrivez la configuration.

Exercice 19 : Perpendiculaire commune à deux droites

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,2,0)$ et dirigée par $\vec{u} = (1,1,0)$, et la droite $\mathcal{D}'$ passant par $B(2,0,0)$ et dirigée par $\vec{v} = (0,1,1)$.

1. Montrez que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. Soit $P = A + t\vec{u}$ et $Q = B + s\vec{v}$. Déterminez t et s pour que $\overrightarrow{PQ}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Donnez P , Q et la longueur PQ .
3. Montrez que PQ est la plus petite distance entre un point de $\mathcal{D}$ et un point de $\mathcal{D}'$.
4. Déterminez une équation du plan Π contenant $\mathcal{D}$ et parallèle à $\mathcal{D}'$. Retrouvez PQ comme distance de B à Π , puis avec la formule $\frac{|\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$.

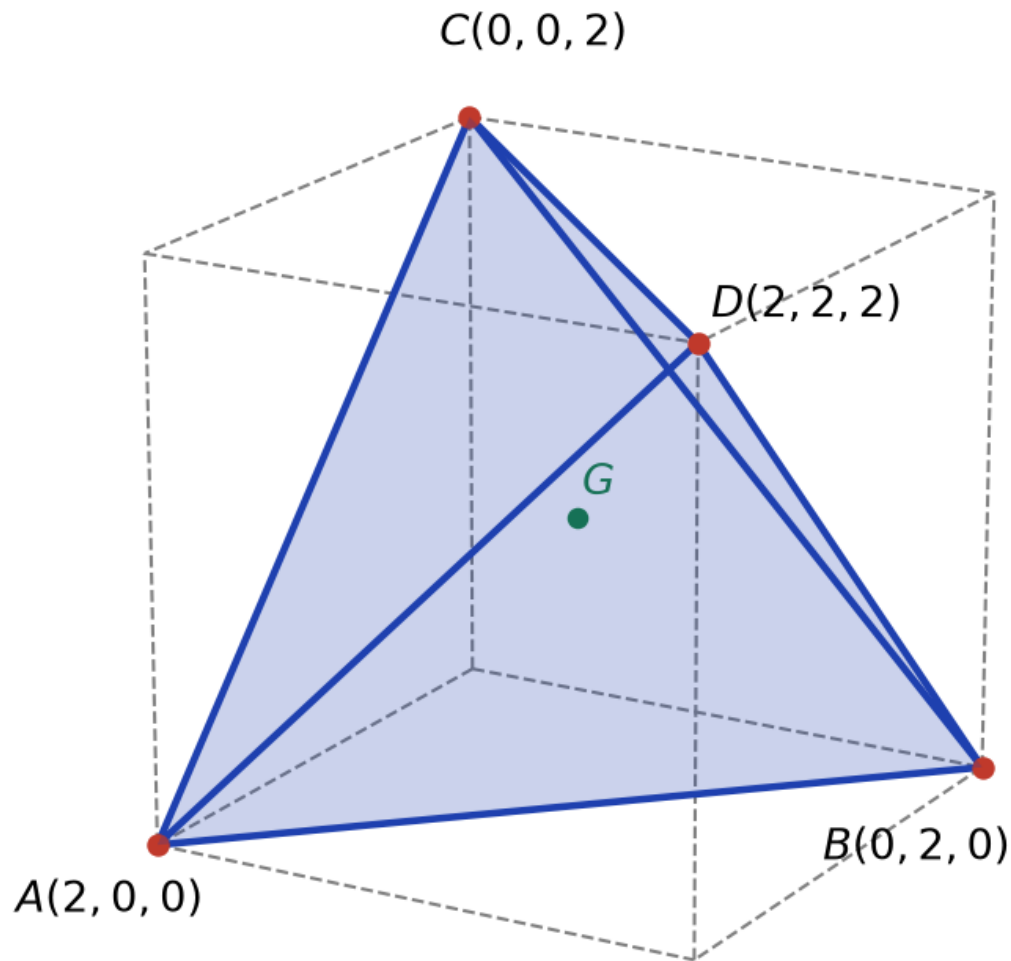
Exercice 20 : Faisceau de plans contenant une droite

On reprend les plans $\mathcal{P}_1: x+y-z-1=0$ et $\mathcal{P}_2: 2x-y+z-5=0$, dont l'intersection est une droite $\mathcal{D}$. Pour $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, on note $\mathcal{Q}_{\lambda, \mu}$ l'ensemble d'équation $\lambda(x+y-z-1) + \mu(2x-y+z-5) = 0$.

1. Montrez que $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$ est un plan qui contient $\mathcal{D}$.
2. Réciproquement, montrez que tout plan contenant $\mathcal{D}$ est l'un des plans $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$.
3. Déterminez le plan contenant $\mathcal{D}$ et passant par l'origine.
4. Déterminez le plan contenant $\mathcal{D}$ et parallèle à l'axe (Ox) .
5. Déterminez le plan contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $x-y+2z=0$.

Exercice 21 : Problème, étude d'un tétraèdre régulier

On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$ et $D(2,2,2)$. Comme le montre la figure ci-dessous, ce sont quatre sommets du cube $[0,2]^3$, deux à deux non reliés par une arête du cube.



1. Montrez que les six arêtes du tétraèdre $ABCD$ ont la même longueur.
2. Déterminez une équation du plan (ABC) et la distance de D à ce plan.
3. Calculez l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre. Contrôlez ce volume par un produit mixte.
4. Déterminez une équation du plan (ABD) . Résolvez le système formé par les équations de (ABC) et (ABD) , puis interprétez.
5. Calculez le cosinus de l'angle entre les plans (ABC) et (ABD) .
6. En cherchant son équation sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, déterminez la

sphère circonscrite au tétraèdre.

7. Soit G l'isobarycentre des quatre sommets. Montrez que G est à la même distance des quatre faces et calculez cette distance.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [géométrie du plan et de l'espace, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#), [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre précédent : [Déterminants](#)
- Chapitre suivant : [Probabilités sur un univers fini](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)