

Géométrie du plan et de l'espace

Corrigé de l'exercice 1 : Changement de repère dans le plan

1. Le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ vaut $1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$. La famille est donc une base du plan, et $\mathcal{R}'$ est un repère. De plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 1 = 0$: le repère est orthogonal. En revanche, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{2} \neq 1$. **Le repère est orthogonal mais pas orthonormé.**
2. Par définition, $\overrightarrow{OM} = 2\vec{u} + \vec{v} = (2-1, 2+1) = (1, 3)$. On ajoute les coordonnées de O .
Donc $M(2, 5)$ dans le repère canonique.
3. La relation $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ s'écrit $x-1 = X-Y$ et $y-2 = X+Y$. En ajoutant ces deux égalités, on obtient $2X = x+y-3$. En les soustrayant, on obtient $2Y = y-x-1$. **Ainsi**
 $X = \frac{x+y-3}{2}$ **et** $Y = \frac{y-x-1}{2}$. On contrôle avec $M(2, 5)$: $X = \frac{4}{2} = 2$ et $Y = \frac{2}{2} = 1$.
4. L'équation $y = x+1$ équivaut à $y-x-1 = 0$, c'est-à-dire à $Y = 0$. De même, $x+y = 5$ équivaut à $x+y-3 = 2$, donc à $X = 1$. **Dans $\mathcal{R}'$, on a $\mathcal{D}_1: Y = 0$ et $\mathcal{D}_2: X = 1$.** En effet, $\mathcal{D}_1$ passe par O et elle est dirigée par $\vec{u}$: c'est le premier axe du nouveau repère.
5. On complète les carrés : $\mathcal{C}: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Or $x-1 = X-Y$ et $y-2 = X+Y$. Par conséquent, $(X-Y)^2 + (X+Y)^2 = 2X^2 + 2Y^2 = 5$. **L'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ est**
 $X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}$. L'équation garde la forme d'un cercle, car les vecteurs de base sont orthogonaux et de même norme. Cependant, le « rayon » lu dans ces coordonnées vaut $\sqrt{5/2}$, alors que le vrai rayon vaut $\sqrt{2} \times \sqrt{5/2} = \sqrt{5}$.

Point de méthode : dans un repère non orthonormé, les coordonnées restent utiles pour les équations, mais les longueurs ne se lisent plus directement.

Corrigé de l'exercice 2 : Droites du plan, équations et paramétrages

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$ dirige (AB) . Un paramétrage est $x = 1 + 4t$, $y = 3 - 2t$, avec $t \in \mathbb{R}$.
2. On élimine t : $t = \frac{x-1}{4}$, donc $y = 3 - \frac{x-1}{2}$. En multipliant par 2, on obtient $2y = 7 - x$. Une équation de (AB) est $x + 2y - 7 = 0$, de vecteur normal $(1, 2)$. On vérifie : $1 + 6 - 7 = 0$ pour A et $5 + 2 - 7 = 0$ pour B .
3. Pour $ax + by + c = 0$, le vecteur $(-b, a)$ dirige la droite. Ici, il vaut $(1, 3)$. On pose $x = t$, et l'équation donne $y = 3t + 1$. Donc $\mathcal{D}$ est dirigée par $(1, 3)$ et paramétrée par $x = t$, $y = 1 + 3t$.
4. Les vecteurs normaux $(1, 2)$ et $(3, -1)$ ne sont pas colinéaires, car $1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0$. Les droites sont donc sécantes. On remplace $y = 3x + 1$ dans $x + 2y = 7$: $7x + 2 = 7$, d'où $x = \frac{5}{7}$ et $y = \frac{15}{7} + 1 = \frac{22}{7}$. Le point d'intersection est $(\frac{5}{7}, \frac{22}{7})$. Contrôle : $\frac{5}{7} + \frac{44}{7} = 7$.
5. La droite cherchée admet $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$, ou $(2, -1)$, comme vecteur normal. Elle a donc une équation $2x - y + c = 0$. Comme $C(2, -1)$ lui appartient, $4 + 1 + c = 0$, soit $c = -5$. La droite perpendiculaire à (AB) passant par C a pour équation $2x - y - 5 = 0$.

Corrigé de l'exercice 3 : Plans et droites de l'espace, d'une représentation à l'autre

1. Un vecteur normal est $\vec{n} = (1, 2, -1)$. Ensuite, $1 + 2 - 0 = 3$, donc $A \in \mathcal{P}$. Pour paramétrer, on écrit $x = 3 - 2y + z$ et on pose $y = s$, $z = t$. Un paramétrage de $\mathcal{P}$ est $(x, y, z) = (3 - 2s + t, s, t)$. Le plan passe donc par $(3, 0, 0)$ et il est dirigé par $(-2, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$, tous deux orthogonaux à $\vec{n}$.
2. La troisième équation donne $t = z - 3s$. On reporte dans la première : $x = 1 + s + z - 3s = 1 - 2s + z$, donc $s = \frac{1 + z - x}{2}$. Ensuite, la deuxième équation donne :

$$y = 2 - s + 2(z - 3s) = 2 - 7s + 2z = 2 - \frac{7(1+z-x)}{2} + 2z.$$

En multipliant par 2, on obtient $2y = -3 + 7x - 3z$. Une équation de $\mathcal{Q}$ est $7x - 2y - 3z - 3 = 0$.

3. Le plan est dirigé par $\vec{a} = (1, -1, 3)$ et $\vec{b} = (1, 2, 1)$. On calcule $\vec{a} \wedge \vec{b} = ((-1)(1) - 3 \times 2, 3 \times 1 - 1 \times 1, 1 \times 2 - (-1) \times 1) = (-7, 2, 3)$. Le point $(1, 2, 0)$ appartient à $\mathcal{Q}$. Donc $-7(x-1) + 2(y-2) + 3z = 0$, soit $-7x + 2y + 3z + 3 = 0$. On retrouve bien $7x - 2y - 3z - 3 = 0$.
4. Un point de Δ s'écrit $(2+t, -1+3t, -2t)$. On élimine $t = x-2$. Alors $y = -1 + 3(x-2) = 3x-7$ et $z = -2(x-2) = -2x+4$. Donc Δ est l'intersection des plans $3x - y - 7 = 0$ et $2x + z - 4 = 0$. Leurs vecteurs normaux $(3, -1, 0)$ et $(2, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, ce qui confirme qu'ils se coupent selon une droite.

Corrigé de l'exercice 4 : Plan passant par trois points

1. On a $\vec{AB} = (1, 1, -2)$ et $\vec{AC} = (-1, 1, -1)$. Par la formule du produit vectoriel : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1 \times (-1) - (-2) \times 1, (-2) \times (-1) - 1 \times (-1), 1 \times 1 - 1 \times (-1)) = (1, 3, 2)$.

Ce vecteur est non nul, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Le vecteur $(1, 3, 2)$ est normal au plan (ABC) . L'équation est donc $x + 3y + 2z = d$, et A donne $d = 1 + 0 + 4 = 5$. Le plan (ABC) a pour équation $x + 3y + 2z - 5 = 0$.
Contrôle : $2 + 3 + 0 = 5$ pour B et $0 + 3 + 2 = 5$ pour C .
3. L'aire du triangle vaut la moitié de celle du parallélogramme. Donc l'aire de ABC vaut $\frac{1}{2}\sqrt{1+9+4} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.
4. Pour D , on trouve $3 + 0 + 2 = 5$: D appartient au plan, donc A, B, C, D sont coplanaires. Pour E , on trouve $1 + 3 + 2 = 6 \neq 5$: E n'appartient pas au plan.

Corrigé de l'exercice 5 : Produit scalaire et angles d'un triangle

1. On a $\overrightarrow{AB} = (4,0)$ et $\overrightarrow{AC} = (1,3)$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$. Par ailleurs, $AB = 4$ et $AC = \sqrt{10}$. Ainsi $\cos \widehat{BAC} = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.
2. On a $\overrightarrow{BA} = (-4,0)$ et $\overrightarrow{BC} = (-3,3)$, d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$. De plus, $BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
Donc $\cos \widehat{ABC} = \frac{12}{4 \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'angle $\widehat{ABC}$ mesure $\frac{\pi}{4}$.
3. On a $\overrightarrow{CA} = (-1,-3)$ et $\overrightarrow{CB} = (3,-3)$, d'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 + 9 = 6$. Donc
 $\cos \widehat{ACB} = \frac{6}{\sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
4. Le projeté H de C sur (AB) vérifie $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Donc
 $H(1,0)$ et $CH = 3$. L'aire vaut alors $\frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$. Par ailleurs,
 $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times 3 - 0 \times 1 = 12$, dont la moitié vaut aussi 6. **L'aire du triangle est 6.**
5. La hauteur issue de C est la droite $x = 1$. La hauteur issue de A a pour vecteur normal
 $\overrightarrow{BC} = (-3,3)$, ou $(-1,1)$; elle passe par l'origine, donc elle a pour équation $y = x$. Ces deux hauteurs se coupent en $(1,1)$. On contrôle avec la hauteur issue de B , de vecteur normal
 $\overrightarrow{AC} = (1,3)$: son équation est $x + 3y = 4$, et $1 + 3 = 4$. **L'orthocentre est le point $(1,1)$.**

Point de méthode : une hauteur est une droite de vecteur normal connu, le côté opposé ; son équation s'écrit donc immédiatement.

Corrigé de l'exercice 6 : Distance d'un point à une droite du plan

1. On applique la formule du cours avec $\vec{n} = (3, -4)$, de norme 5. On calcule
 $3 \times 2 - 4 \times (-1) + 2 = 12$. Donc $d(M, \mathcal{D}) = \frac{12}{5}$.

2. On a $H = M - \lambda \vec{n}$ avec $\lambda = \frac{12}{25}$. Ainsi :

$$H = \left(2 - \frac{36}{25}, -1 + \frac{48}{25} \right) = \left(\frac{14}{25}, \frac{23}{25} \right).$$

On vérifie que $H \in \mathcal{D}$: $\frac{42-92+50}{25} = 0$. De plus, $MH = \lambda |\vec{n}| = \frac{12}{25} \times 5$. **On retrouve**
 $MH = \frac{12}{5}$, avec $H\left(\frac{14}{25}, \frac{23}{25}\right)$.

3. Les deux droites ont le même vecteur normal. Le point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ appartient à $\mathcal{D}$. Sa distance à $\mathcal{D}'$ vaut $\frac{|0-2-8|}{5} = 2$. Comme les droites sont parallèles, cette distance ne dépend pas du point choisi. **La distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ vaut 2.**

4. La droite Δ passe par $(1,0)$ et elle est dirigée par $(2,1)$. Un vecteur normal est donc $(1,-2)$, et l'équation s'écrit $x-2y-1=0$. **La distance de O à Δ vaut $\frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Cercles du plan

1. On complète les carrés : $x^2-4x = (x-2)^2-4$ et $y^2+6y = (y+3)^2-9$. L'équation devient $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4+9+12 = 25$. **C'est le cercle de centre $O(2,-3)$ et de rayon $R=5$.**

2. On a $(5-2)^2 + (1+3)^2 = 9+16 = 25$, donc $A \in \mathcal{C}$. La tangente en A admet $\vec{OA} = (3,4)$ pour vecteur normal. Son équation est donc $3(x-5) + 4(y-1) = 0$. **La tangente en A a pour équation $3x+4y-19=0$.**

3. La distance de O à $\mathcal{D}$ vaut $\frac{|2-6-6|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$, qui est inférieure à 5. On attend donc deux points. On remplace $x = 6-2y$: $(4-2y)^2 + (y+3)^2 = 25$. Cela donne $5y^2-10y=0$, soit $y=0$ ou $y=2$. **L'intersection est formée des points $(6,0)$ et $(2,2)$.**

4. La droite est tangente si et seulement si sa distance au centre vaut R . Cela s'écrit $\frac{|2-6+c|}{\sqrt{5}} = 5$, c'est-à-dire $|c-4| = 5\sqrt{5}$. **Les valeurs cherchées sont $c = 4+5\sqrt{5}$ et $c = 4-5\sqrt{5}$.**

5. On complète les carrés : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1+4-10 = -5$. Une somme de carrés ne peut pas être strictement négative. **L'ensemble est vide.**

Corrigé de l'exercice 8 : Distance d'un point à un plan et projeté orthogonal

1. On a $\vec{n} = (2, -1, 2)$, de norme 3. On calcule $6 - 1 + 8 - 1 = 12$. **Donc** $d(M, \mathcal{P}) = \frac{12}{3} = 4$.

2. D'après le cours, $H = M - \lambda \vec{n}$ avec $\lambda = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Ainsi :

$$H = \left(3 - \frac{8}{3}, 1 + \frac{4}{3}, 4 - \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

On vérifie : $\frac{2-7+8}{3} - 1 = 0$. **Le projeté orthogonal est** $H\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

3. Le point H est le milieu de $[MM']$, donc $M' = 2H - M$. **On obtient**
 $M'\left(-\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Contrôle : $-\frac{14}{3} - \frac{11}{3} - \frac{8}{3} - 1 = -12$, opposé de la valeur 12 obtenue en M .

4. Un point $N(x, y, z)$ est à la distance 2 de $\mathcal{P}$ si et seulement si $|2x - y + 2z - 1| = 6$.
L'ensemble cherché est la réunion des deux plans parallèles $2x - y + 2z - 7 = 0$ et $2x - y + 2z + 5 = 0$.

Corrigé de l'exercice 9 : Intersection de deux plans

1. Les vecteurs normaux sont $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$. Ils ne sont pas colinéaires, car leurs premières coordonnées imposeraient un rapport 2, incompatible avec les deuxièmes. **Les plans ne sont donc pas parallèles.**

2. En ajoutant les deux équations, on obtient $3x = 6$, donc $x = 2$. La première équation devient $y - z = -1$. On prend $z = t$ comme paramètre, d'où $y = t - 1$. **La droite $\mathcal{D}$ est paramétrée par $(2, -1 + t, t)$: elle passe par $(2, -1, 0)$ et elle est dirigée par $(0, 1, 1)$.**
Contrôle dans $\mathcal{P}_2$: $4 - (-1 + t) + t = 5$.

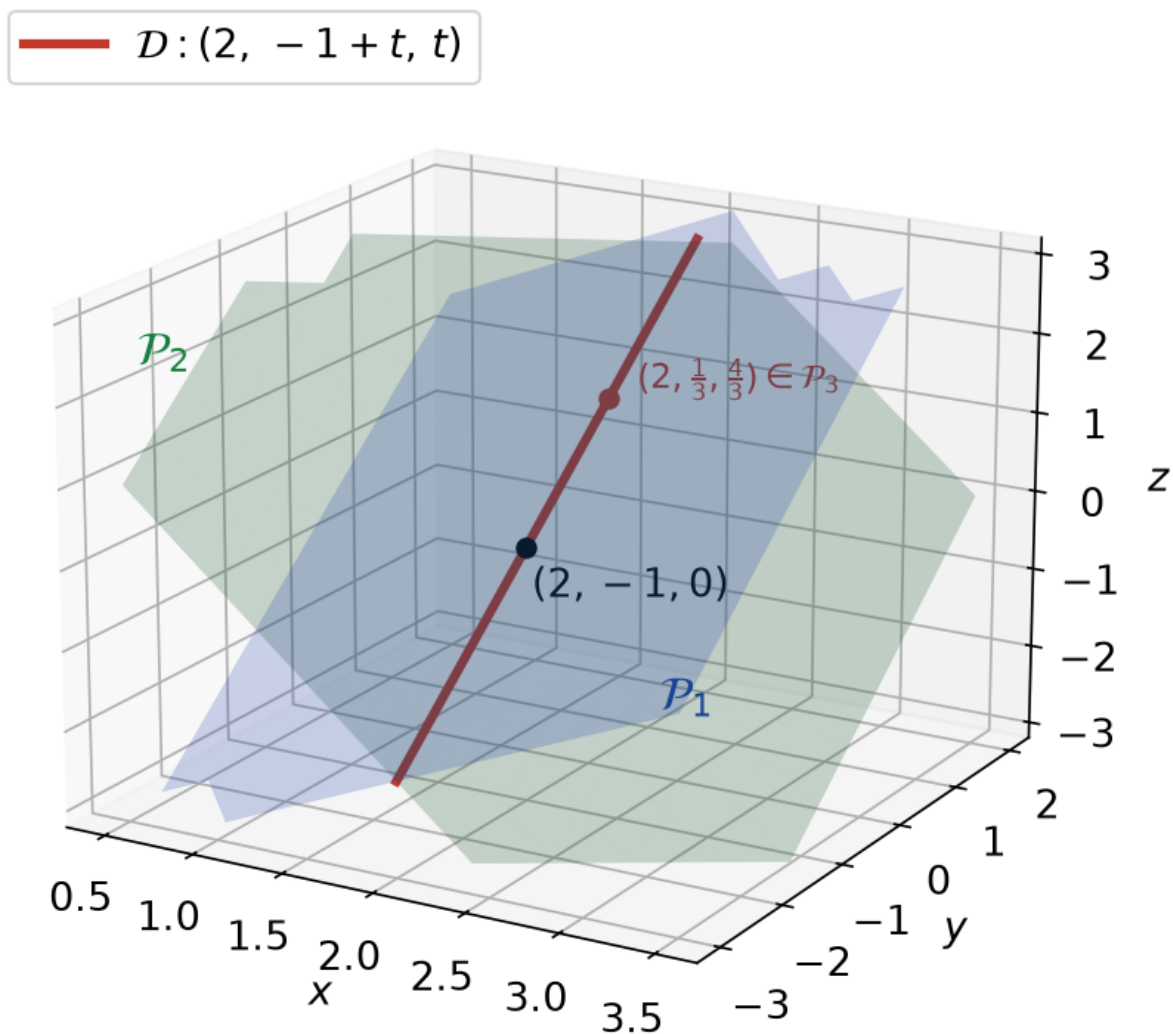
3. On calcule $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1 \times 1 - (-1)(-1), (-1) \times 2 - 1 \times 1, 1 \times (-1) - 1 \times 2) = (0, -3, -3)$. **Ce vecteur vaut $-3(0, 1, 1)$: il est bien colinéaire au vecteur directeur trouvé.**

4. On a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 - 1 = 0$. **Les plans sont perpendiculaires : l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$.**

5. On remplace le paramétrage dans $\mathcal{P}_3 : 2+2(-1+t)+t=4$, soit $3t=4$. Donc $t=\frac{4}{3}$.

Le point d'intersection est $\left(2, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Contrôle : $2+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=4$.

La figure ci-dessous montre les deux plans perpendiculaires et leur droite d'intersection $\mathcal{D}$, dirigée par $(0,1,1)$.



Point de méthode : résoudre le système donne un point et une direction ; le produit vectoriel des normales sert de contrôle rapide.

Corrigé de l'exercice 10 : Positions relatives d'une droite et d'un plan

1. Le plan a pour vecteur normal $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

- Pour $\mathcal{D}_1$: $(1, 1, 1) \cdot \vec{n} = 1 - 2 + 1 = 0$, donc la droite est parallèle au plan. De plus, $1 - 0 + 2 = 3$, donc le point $(1, 0, 2)$ est dans $\mathcal{P}$. **La droite $\mathcal{D}_1$ est contenue dans $\mathcal{P}$.**
- Pour $\mathcal{D}_2$: même direction, mais l'origine donne $0 \neq 3$. **La droite $\mathcal{D}_2$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.**
- Pour $\mathcal{D}_3$: $(2, 0, 1) \cdot \vec{n} = 3 \neq 0$, donc la droite est sécante. Le point $(1 + 2t, 1, 1 + t)$ est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $1 + 2t - 2 + 1 + t = 3$, soit $t = 1$. **Le point d'intersection est $(3, 1, 2)$.**
- Pour $\mathcal{D}_4$: la direction est $(1, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$. Or $(1, -1, 0) \cdot \vec{n} = 1 + 2 = 3 \neq 0$: la droite est sécante. Avec $z = 0$ et $y = 1 - x$, l'équation du plan donne $x - 2 + 2x = 3$, donc $x = \frac{5}{3}$. **Le point d'intersection est $(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$.**

2. Tous les points de $\mathcal{D}_2$ sont à la même distance de $\mathcal{P}$, puisque la droite est parallèle au plan.

On prend l'origine. **La distance vaut** $\frac{|0 - 3|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. La droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A est dirigée par $\vec{n}$. Elle est paramétrée par $(1 + t, 1 - 2t, 1 + t)$. On remplace dans l'équation du plan : $1 + t - 2 + 4t + 1 + t = 3$, soit

$6t = 3$. Donc $t = \frac{1}{2}$, et le pied est $(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$. La distance vaut alors $|t| |\vec{n}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **On retrouve**

la formule du cours : $\frac{|1 - 2 + 1 - 3|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Positions relatives de deux droites de l'espace

1. On a $\overrightarrow{AA'} = (-1, -1, 1)$. Ensuite,

$\vec{u} \wedge \vec{v} = ((-1) \times 0 - 2 \times 1, 2 \times 2 - 1 \times 0, 1 \times 1 - (-1) \times 2) = (-2, 4, 3)$. Le produit mixte vaut donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AA'} = 2 - 4 + 3 = 1$. **Ce produit mixte est non nul : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.**

2. On a $\overrightarrow{AA''} = (0, -3, 3)$ et $\vec{u} \wedge \vec{w} = ((-1)(-1) - 2 \times 2, 2 \times 1 - 1 \times (-1), 1 \times 2 - (-1) \times 1) = (-3, 3, 3)$. Le produit mixte vaut $0 - 9 + 9 = 0$: les droites sont coplanaires. Comme $\vec{u} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$, elles ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. On résout $1+t=1+s$, $2-t=-1+2s$, $2t=3-s$. La première équation donne $t=s$, puis la deuxième donne $t=1$. La troisième est vérifiée : $2=3-1$. **Le point commun est $(2, 1, 2)$.** Le plan qui les contient admet $(-3, 3, 3)$, ou $(-1, 1, 1)$, pour vecteur normal. **Son équation est $-x+y+z=1$.** Contrôle : $-2+1+2=1$ et $-1-1+3=1$.
3. On a $(-2, 2, -4) = -2\vec{u}$: les droites sont parallèles. Un point de $\mathcal{D}$ s'écrit $(1+t, 2-t, 2t)$. Il est nul seulement si $t=0$ par la troisième coordonnée, mais alors il vaut $(1, 2, 0) \neq O$. **Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont strictement parallèles.**

Corrigé de l'exercice 12 : Distance d'un point à une droite de l'espace

1. On a $\overrightarrow{AM} = (3, 3, 0)$, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 3 + 6 + 0 = 9$ et $|\vec{u}|^2 = 9$. Donc $\lambda = 1$. **Le projeté orthogonal est $H = A + \vec{u} = (2, 2, 1)$.**
2. On a $\overrightarrow{HM} = (2, 1, -2)$. On vérifie l'orthogonalité : $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 2 + 2 - 4 = 0$. **Donc $d(M, \mathcal{D}) = HM = \sqrt{4+1+4} = 3$.**
3. On calcule $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (3 \times 2 - 0 \times 2, 0 \times 1 - 3 \times 2, 3 \times 2 - 3 \times 1) = (6, -6, 3)$, de norme $\sqrt{81} = 9$. **La formule donne $\frac{9}{3} = 3$.**
4. Par bilinéarité, $f(t) = |\overrightarrow{AM}|^2 - 2t \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} + t^2 |\vec{u}|^2 = 18 - 18t + 9t^2$. On factorise : $f(t) = 9(t-1)^2 + 9$. Le minimum vaut 9, atteint en $t=1$ seulement. **La distance minimale vaut $\sqrt{9} = 3$, atteinte au point H .**

Corrigé de l'exercice 13 : Produit mixte et volume d'un tétraèdre

1. Le produit mixte $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]$ est le déterminant d'une matrice diagonale. Il vaut $1 \times 2 \times 3 = 6$. **Le volume de $OABC$ vaut $\frac{6}{6} = 1$.**
2. Le plan $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ contient A , B et C . Or ces points ne sont pas alignés, donc c'est bien le plan (ABC) . En multipliant par 6 : $(ABC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
3. La distance de O au plan vaut $\frac{|-6|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}$. Le volume vaut aussi $\frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times \frac{6}{7}$, donc $\mathcal{A} = \frac{3 \times 1 \times 7}{6} = \frac{7}{2}$. Pour contrôler, $\vec{AB} = (-1, 2, 0)$ et $\vec{AC} = (-1, 0, 3)$ donnent $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (6, 3, 2)$, de norme 7. **L'aire de ABC vaut $\frac{7}{2}$.**
4. Première méthode : $\vec{AD} = (0, 1, 1)$, donc $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = (6, 3, 2) \cdot (0, 1, 1) = 5$. Le volume vaut $\frac{5}{6}$. Seconde méthode : la distance de D au plan (ABC) vaut $\frac{|6+3+2-6|}{7} = \frac{5}{7}$. Le volume vaut donc $\frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{6}$. **Le volume de $ABCD$ vaut $\frac{5}{6}$.**

Corrigé de l'exercice 14 : Identités sur le produit vectoriel

1. Posons $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (p, q, r)$. D'une part,
 $|\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = (br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2$. En développant, on obtient les six carrés croisés $b^2r^2 + c^2q^2 + c^2p^2 + a^2r^2 + a^2q^2 + b^2p^2$, diminués de $2(bcqr + acpr + abpq)$. D'autre part, $(ap + bq + cr)^2 = a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 + 2(abpq + acpr + bcqr)$. En ajoutant, les doubles produits se compensent. Il reste la somme des neuf produits d'un carré de $\{a, b, c\}$ par un carré de $\{p, q, r\}$. **C'est exactement $(a^2 + b^2 + c^2)(p^2 + q^2 + r^2) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$.**
2. Posons $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (p, q, r)$, $\vec{w} = (x, y, z)$. On a
 $\vec{u} \wedge \vec{w} = (qz - ry, rx - pz, py - qx)$. La première coordonnée de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ vaut $b(py - qx) - c(rx - pz)$. On ajoute et on retranche apx :
 $b(py - qx) - c(rx - pz) = p(ax + by + cz) - x(ap + bq + cr) = (\vec{u} \cdot \vec{w})p - (\vec{u} \cdot \vec{v})x$.

C'est la première coordonnée de $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$. Les deux autres coordonnées s'obtiennent

par permutation circulaire des rôles. **La formule du double produit vectoriel est démontrée.**

3. On applique trois fois la formule :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \\ \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) &= (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}, \\ \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}.\end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire, les six termes s'annulent deux à deux. **La somme est nulle : c'est l'identité de Jacobi.**

4. On a $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, puis $\vec{i} \wedge \vec{k} = (0, -1, 0) = -\vec{j}$. La formule précédente le confirme : $(\vec{i} \cdot \vec{j})\vec{i} - (\vec{i} \cdot \vec{i})\vec{j} = -\vec{j}$. En revanche, $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$, donc $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0}$. **Les deux résultats diffèrent : le produit vectoriel n'est pas associatif.**

Corrigé de l'exercice 15 : Cercle circonscrit à un triangle

1. La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu $(3,0)$ et admet $\overrightarrow{AB} = (6,0)$ pour vecteur normal. Son équation est $x = 3$. La médiatrice de $[AC]$ passe par $(1,2)$ et admet $\overrightarrow{AC} = (2,4)$ pour vecteur normal. Son équation est $2(x-1) + 4(y-2) = 0$, soit $x + 2y - 5 = 0$. Avec $x = 3$, on obtient $y = 1$. **Le centre est $O(3,1)$ et le rayon vaut $OA = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.**
Contrôle : $OB^2 = 9+1$ et $OC^2 = 1+9$.

2. Les trois points donnent un système linéaire en (a,b,c) :

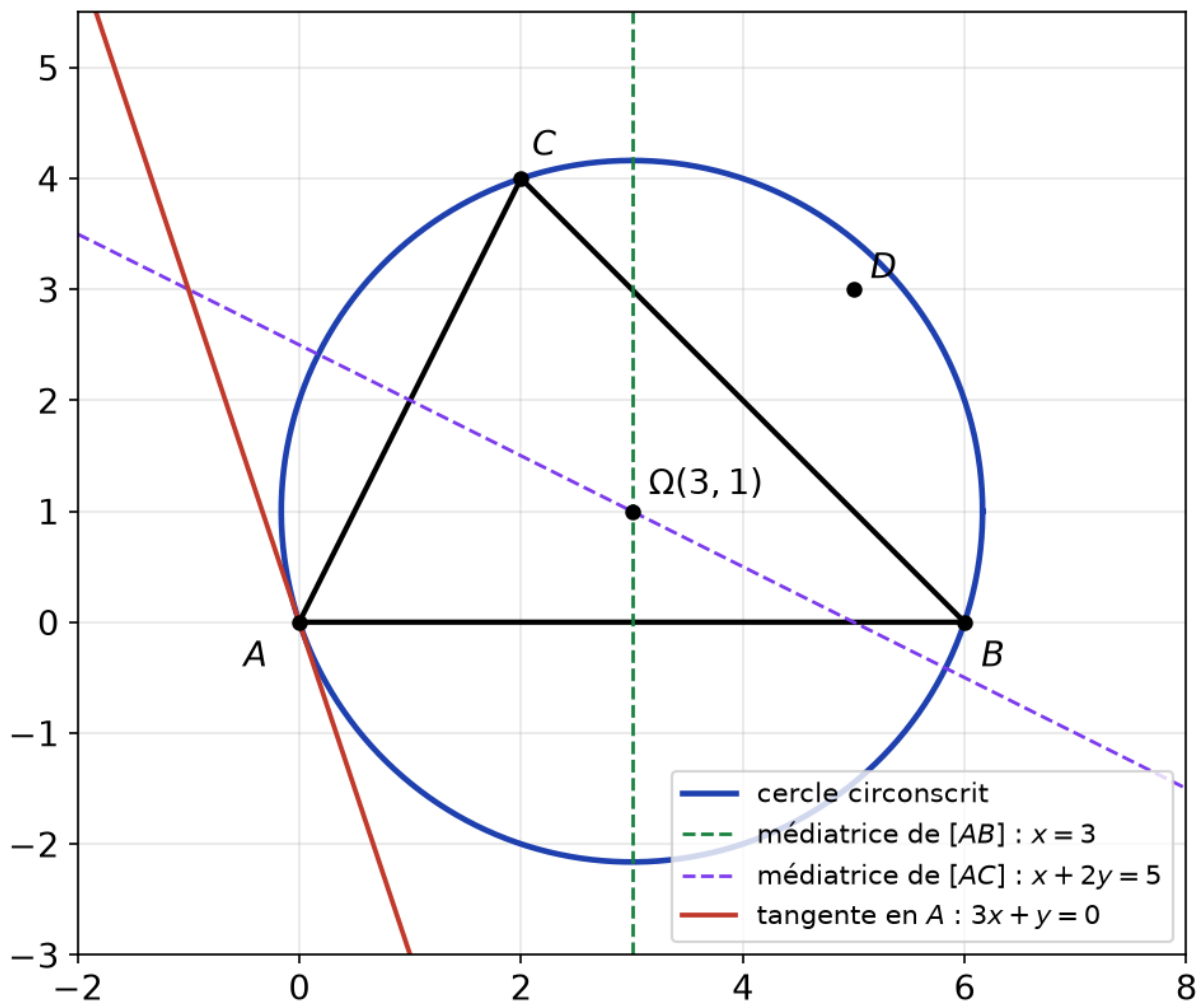
$$\begin{cases} c = 0 \\ 36 + 6a + c = 0 \\ 20 + 2a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

On trouve $c = 0$, puis $a = -6$, et enfin $4b = -20 + 12 = -8$, soit $b = -2$. **Le cercle a pour équation $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.** En complétant les carrés, on retrouve $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$.

3. La tangente en A admet $\overrightarrow{OA} = (-3,-1)$ pour vecteur normal et passe par l'origine. **Son équation est $3x + y = 0$.**

4. On a $\Omega D^2 = (5-3)^2 + (3-1)^2 = 8 < 10$. Le point D est à l'intérieur du cercle.

La figure ci-dessous représente le triangle, les deux médiatrices qui se coupent en Ω , le cercle circonscrit et sa tangente en A .



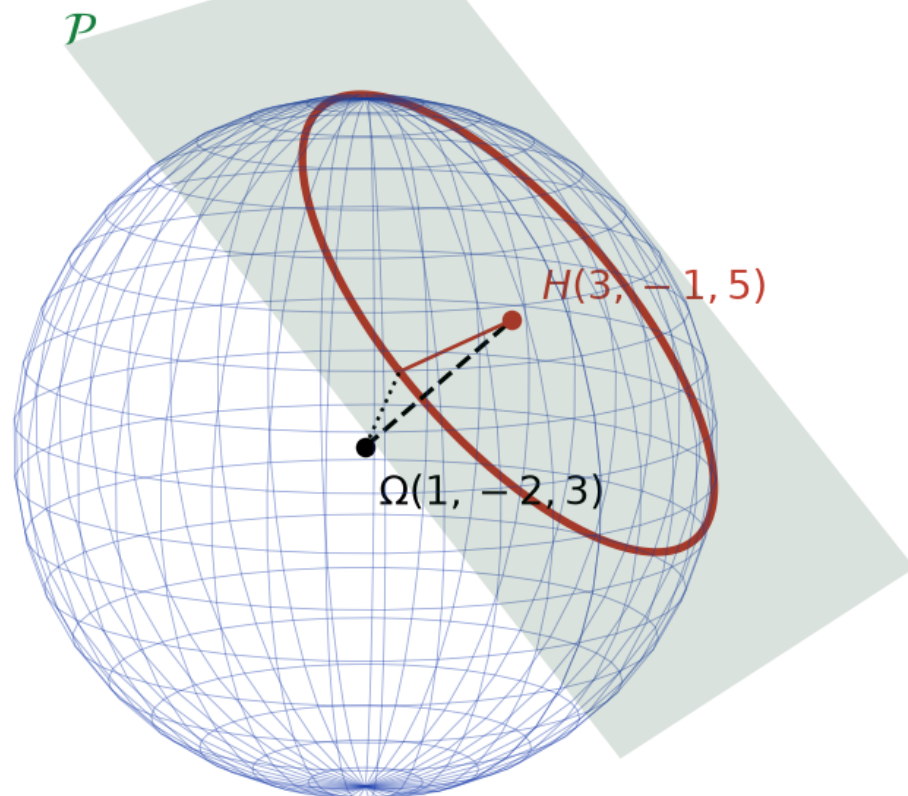
Corrigé de l'exercice 16 : Sphère, plan sécant et plans tangents

- On complète les carrés : $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 11 = 0$. L'équation devient $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. C'est la sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon $R = 5$.

2. On calcule $2-2+6-15 = -9$ et $|\vec{n}| = 3$. Donc $h = d(O, \mathcal{P}) = 3 < 5$: l'intersection est un cercle. Son centre est le projeté $H = O - \lambda \vec{n}$, avec $\lambda = \frac{-9}{9} = -1$. Ainsi $H = O + (2, 1, 2) = (3, -1, 5)$. Contrôle : $6-1+10-15 = 0$. **Le cercle a pour centre $(3, -1, 5)$ et pour rayon $\sqrt{25-9} = 4$.**
3. Un plan parallèle à $\mathcal{P}$ s'écrit $2x+y+2z+d=0$. Il est tangent si et seulement si $\frac{|2-2+6+d|}{3} = 5$, soit $|6+d| = 15$. Donc $d = 9$ ou $d = -21$. Le point de contact est le projeté de O , c'est-à-dire $O \pm \frac{5}{3}(2, 1, 2)$. **Le plan $2x+y+2z-21=0$ touche la sphère en $(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{19}{3})$; le plan $2x+y+2z+9=0$ la touche en $(-\frac{7}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{1}{3})$.** Contrôles : $\frac{26-1+38}{3} = 21$ et $\frac{-14-11-2}{3} = -9$.
4. On a $(4-1)^2 + (2+2)^2 + 0^2 = 25$, donc $A \in \mathcal{S}$. Le plan tangent en A admet $\vec{OA} = (3, 4, 0)$ pour vecteur normal. Il s'écrit $3(x-4)+4(y-2)=0$. **Le plan tangent en A a pour équation $3x+4y-20=0$.**

La figure ci-dessous montre la sphère, le plan $\mathcal{P}$ et le cercle de section de centre H et de rayon 4.

— cercle de centre H , rayon 4



Point de méthode : tout problème sphère-plan se ramène au triangle rectangle formé par le centre, son projeté et un point du cercle.

Corrigé de l'exercice 17 : Ensembles de points définis par des distances

- On décompose $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, avec $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. Par bilinéarité, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.

2. La condition équivaut à $MI = IA$. Or $I = (1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{IA} = (1, -2, 1)$, donc $IA = \sqrt{6}$.
L'ensemble $\mathcal{E}_1$ est la sphère de diamètre $[AB]$, de centre $I(1, 2, 0)$ et de rayon $\sqrt{6}$.
3. On écrit $MA^2 - MB^2 = 0$. On calcule séparément $(x-2)^2 - x^2 = -4x + 4$, puis $y^2 - (y-4)^2 = 8y - 16$, puis $(z-1)^2 - (z+1)^2 = -4z$. La somme vaut $-4x + 8y - 4z - 12$.
L'ensemble $\mathcal{E}_2$ est le plan $x - 2y + z + 3 = 0$: c'est le plan médiateur de $[AB]$. Il passe bien par I ($1 - 4 + 0 + 3 = 0$) et admet $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, -2)$ comme vecteur normal.
4. La condition $MA = 2MB$ équivaut à $MA^2 = 4MB^2$, car les distances sont positives. On développe :

$$\begin{aligned} MA^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + 5, \\ 4MB^2 &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 32y + 8z + 68. \end{aligned}$$

La différence donne $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4x - 32y + 10z + 63 = 0$. On divise par 3, puis on complète les carrés. Le centre est $O\left(-\frac{2}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. Le carré du rayon vaut

$$\frac{4 + 256 + 25}{9} - 21 = \frac{285 - 189}{9} = \frac{32}{3}. \text{ L'ensemble } \mathcal{E}_3 \text{ est la sphère de centre } \left(-\frac{2}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{5}{3}\right) \text{ et de rayon } \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 18 : Système linéaire et positions de trois plans

1. On développe selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = (2m - 9) - (m - 6) + (3 - 4) = m - 4.$$

Le déterminant vaut $m - 4$.

2. Si $m \neq 4$, le système est de Cramer. On résout par combinaisons. La différence $L_2 - L_1$ donne $y + 2z = 1$, donc $y = 1 - 2z$. Alors L_1 donne $x = 1 - y - z = z$. Enfin, L_3 devient $2z + 3 - 6z + mz = a$, soit $(m - 4)z = a - 3$. **L'unique solution est**
 $x = z = \frac{a - 3}{m - 4}$ **et** $y = 1 - \frac{2(a - 3)}{m - 4}$: **les trois plans se coupent en un seul point.**

3. Si $m = 4$ et $a = 3$, la troisième équation est la somme des deux premières. Le système se

réduit à L_1 et L_2 , et le calcul précédent donne $x = z$, $y = 1 - 2z$. **Les solutions forment la droite passant par $(0, 1, 0)$ et dirigée par $(1, -2, 1)$: les trois plans ont cette droite en commun.** On contrôle que $(1, 1, 1) \wedge (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$.

4. Si $m = 4$ et $a \neq 3$, l'équation $(m-4)z = a-3$ s'écrit $0 = a-3$, ce qui est faux. **Le système n'a pas de solution.** Pourtant, les vecteurs normaux $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$ sont deux à deux non colinéaires : aucun couple de plans n'est parallèle. Les plans se coupent donc deux à deux selon trois droites. Ces droites sont toutes dirigées par $(1, -2, 1)$, qui est orthogonal aux trois normales (par exemple $2 - 6 + 4 = 0$). **La configuration est celle d'un prisme : trois droites parallèles, sans point commun aux trois plans.**

Point de méthode : le déterminant décide seulement du cas « point unique » ; lorsqu'il est nul, il faut encore tester la compatibilité.

Corrigé de l'exercice 19 : Perpendiculaire commune à deux droites

1. On a $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 0)$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1 \times 1 - 0 \times 1, 0 \times 0 - 1 \times 1, 1 \times 1 - 1 \times 0) = (1, -1, 1)$. Le produit mixte vaut $(1, -1, 1) \cdot (1, -2, 0) = 3$. **Il est non nul, donc les droites ne sont pas coplanaires.**
2. On a $P = (1+t, 2+t, 0)$ et $Q = (2, s, s)$, donc $\overrightarrow{PQ} = (1-t, s-2-t, s)$. Les deux conditions d'orthogonalité s'écrivent :

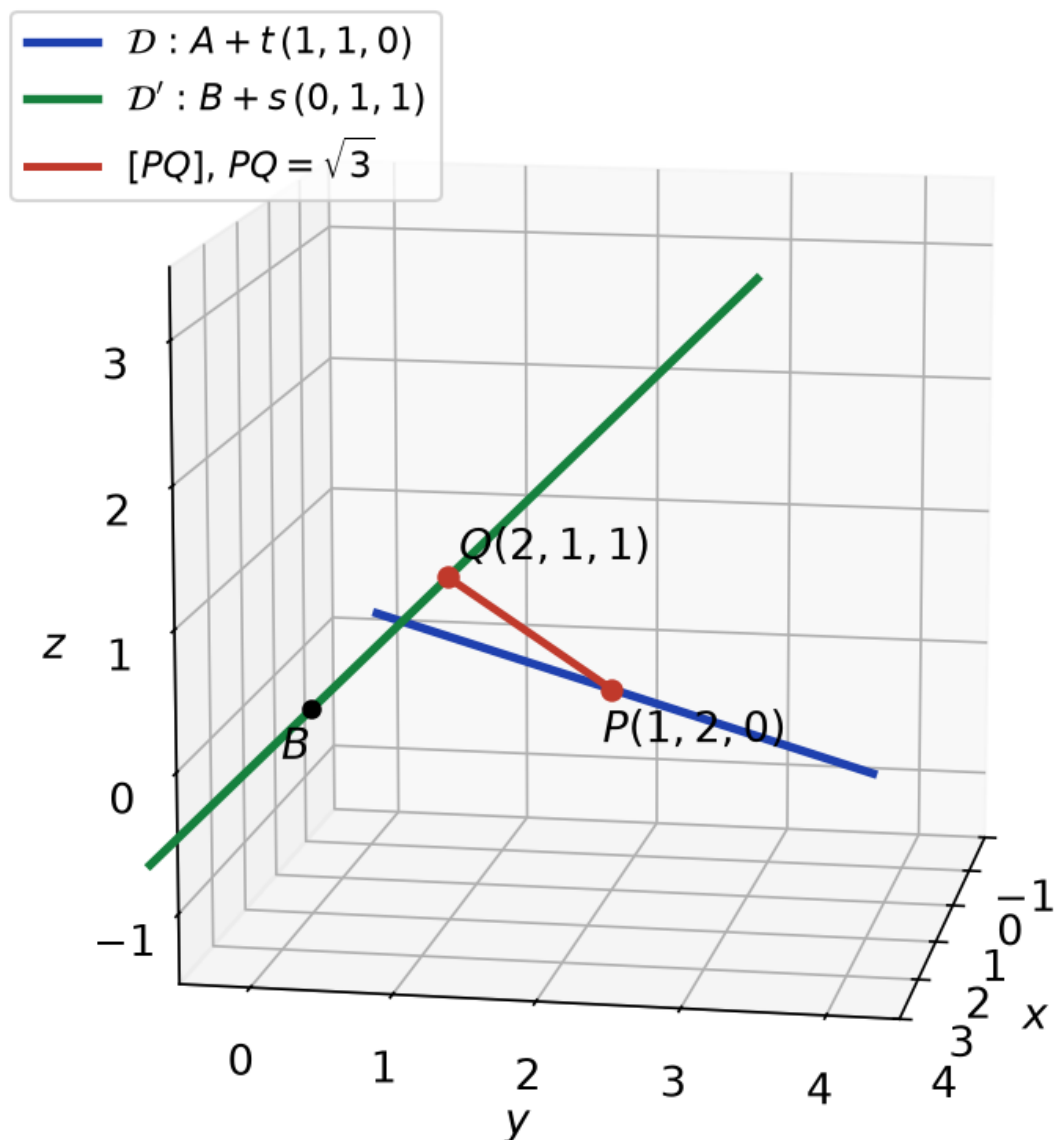
$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = s - 2t - 1 = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 2s - t - 2 = 0 \end{cases}$$

La première donne $s = 2t + 1$. On reporte : $4t + 2 - t - 2 = 0$, donc $t = 0$ et $s = 1$. **On obtient $P(1, 2, 0)$, $Q(2, 1, 1)$, $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1)$ et $PQ = \sqrt{3}$.**

3. Soit $M = P + \alpha \vec{u}$ sur $\mathcal{D}$ et $N = Q + \beta \vec{v}$ sur $\mathcal{D}'$. Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + (\beta \vec{v} - \alpha \vec{u})$. Le second vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{PQ}$, par construction. D'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = PQ^2 + |\beta \vec{v} - \alpha \vec{u}|^2 \geq PQ^2$. **Donc $PQ = \sqrt{3}$ est la distance minimale entre les deux droites.**

4. Le plan Π contient A et il est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il admet donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -1, 1)$ comme vecteur normal. Son équation est $x - y + z = 1 - 2 + 0$, soit $\Pi: x - y + z + 1 = 0$. La distance de B à Π vaut $\frac{|2 - 0 + 0 + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. De même, la formule donne $\frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. **Les trois méthodes donnent la même distance $\sqrt{3}$.**

Comme le montre la figure ci-dessous, le segment $[PQ]$ est orthogonal aux deux droites, qui ne se rencontrent pas.



Corrigé de l'exercice 20 : Faisceau de plans contenant une droite

1. L'équation s'écrit $(\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z-\lambda-5\mu=0$. Son vecteur de coefficients est $\lambda\vec{n}_1+\mu\vec{n}_2$. Comme $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont linéairement indépendants et $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, ce vecteur est non nul. C'est donc l'équation d'un plan. Par ailleurs, un point de $\mathcal{D}$ annule les deux expressions, donc il annule aussi leur combinaison. **Ainsi, $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$ est un plan contenant $\mathcal{D}$.**
2. Soit $\mathcal{Q}$ un plan contenant $\mathcal{D}$, de vecteur normal $\vec{n}$. Alors $\vec{n}$ est orthogonal à la direction $\vec{w}=(0,1,1)$ de $\mathcal{D}$. L'orthogonal de $\vec{w}$ est un plan vectoriel, qui contient les vecteurs indépendants $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. Par suite, $\vec{n}=\lambda\vec{n}_1+\mu\vec{n}_2$ pour un couple $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. Les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$ ont alors le même vecteur normal et contiennent tous deux le point $(2,-1,0)$ de $\mathcal{D}$. **Ils sont donc égaux.**
3. L'origine appartient à $\mathcal{Q}_{\lambda,\mu}$ si et seulement si $-\lambda-5\mu=0$. On prend $\mu=-1$ et $\lambda=5$. L'équation devient $3x+6y-6z=0$. **Le plan cherché est $x+2y-2z=0$.** Contrôle avec le point $(2,-1+t,t)$: $2-2+2t-2t=0$.
4. Le plan est parallèle à (Ox) si et seulement si son vecteur normal est orthogonal à $(1,0,0)$, c'est-à-dire $\lambda+2\mu=0$. On prend $\lambda=2$ et $\mu=-1$: on obtient $3y-3z+3=0$. **Le plan cherché est $y-z+1=0$.**
5. Le plan $x-y+2z=0$ a pour vecteur normal $(1,-1,2)$. La perpendicularité s'écrit $(\lambda+2\mu)-(\lambda-\mu)+2(\mu-\lambda)=0$, soit $-2\lambda+5\mu=0$. On prend $\lambda=5$ et $\mu=2$: on obtient $9x+3y-3z-15=0$. **Le plan cherché est $3x+y-z-5=0$.** Contrôle : $(3,1,-1)\cdot(1,-1,2)=3-1-2=0$.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème, étude d'un tétraèdre régulier

1. On calcule les six vecteurs arêtes : $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$, $\overrightarrow{BC}=(0,-2,2)$, $\overrightarrow{BD}=(2,0,2)$ et $\overrightarrow{CD}=(2,2,0)$. Chacun a deux coordonnées égales à ± 2 et une nulle. **Les six arêtes mesurent $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$: le tétraèdre est régulier.**
2. Les points A , B , C vérifient $x+y+z=2$. **Le plan (ABC) a pour équation**

$x+y+z-2=0$. La distance de D vaut $\frac{|2+2+2-2|}{\sqrt{3}}$. Elle est égale à $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

3. On calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2 \times 2 - 0 \times 0, 0 \times (-2) - (-2) \times 2, (-2) \times 0 - 2 \times (-2)) = (4, 4, 4)$.
L'aire vaut donc $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Le volume vaut ensuite $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$. Par ailleurs, le produit mixte vaut $(4, 4, 4) \cdot (0, 2, 2) = 16$, et $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$. **L'aire de ABC vaut $2\sqrt{3}$ et le volume vaut $\frac{8}{3}$.**

4. On calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = (2 \times 2 - 0 \times 2, 0 \times 0 - (-2) \times 2, (-2) \times 2 - 2 \times 0) = (4, 4, -4)$. Un vecteur normal est $(1, 1, -1)$, et A donne l'équation $x+y-z=2$. On contrôle avec B et D : $0+2-0=2$ et $2+2-2=2$. **Donc $(ABD): x+y-z-2=0$.** Le système $x+y+z=2$, $x+y-z=2$ donne $z=0$ par différence, puis $x+y=2$. **L'intersection est la droite (AB) , arête commune aux deux faces.**

5. L'angle entre les plans est celui de leurs vecteurs normaux, ramené à $[0, \frac{\pi}{2}]$. **On obtient**
 $\cos \theta = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

6. Les quatre points donnent un système linéaire en (a, b, c, d) :

$$\begin{cases} 4+2a+d=0 \\ 4+2b+d=0 \\ 4+2c+d=0 \\ 12+2a+2b+2c+d=0 \end{cases}$$

Les trois premières équations donnent $a=b=c=\frac{-4-d}{2}$. La dernière devient

$12-12-3d+d=0$, donc $d=0$, puis $a=b=c=-2$. **La sphère circonscrite a pour équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$: son centre est $(1,1,1)$ et son rayon vaut $\sqrt{3}$.**

7. L'isobarycentre est $G\left(\frac{2+0+0+2}{4}, \frac{0+2+0+2}{4}, \frac{0+0+2+2}{4}\right) = (1, 1, 1)$. Les faces (ACD) et (BCD) ont pour équations $x-y+z=2$ et $-x+y+z=2$, comme on le vérifie sur leurs sommets. Pour chacune des quatre faces, la valeur absolue du membre de gauche moins 2 vaut 1 en G , et le vecteur normal a pour norme $\sqrt{3}$. **Le point G est donc à la distance $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ des quatre faces.**

Point de méthode : dans un problème de géométrie, contrôlez chaque équation de plan sur les points qui la définissent ; cela coûte peu et évite les erreurs en chaîne.

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [géométrie du plan et de l'espace, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur géométrie du plan et de l'espace](#)
- À maîtriser avant : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#), [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre précédent : [Déterminants](#)
- Chapitre suivant : [Probabilités sur un univers fini](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)