

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 :

1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).

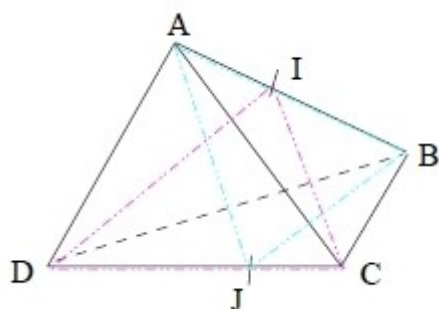
J appartient au plan (AJB) par définition, de plus J appartient à la droite (CD) qui elle appartient au plan (CID) par définition.

I appartient au plan (CID) par définition de ce plan, de plus I est un point de (AB) donc I est un point du plan (AJB)

Donc I et J appartiennent aux plans (AJB) et (CID).

2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.

L'intersection est une droite portée par le segment [IJ], soit la droite (IJ).

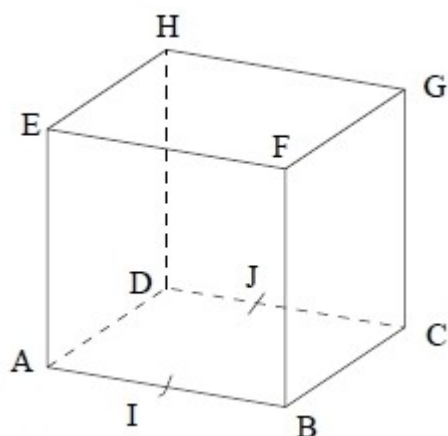


Exercice 2 :

1. Le plan (AIE) et le plan (BIG) : la droite (AB).

2. Le plan (ADI) et le plan (BJC) : le plan ADI .

3. Le plan (HEF) et le plan (BJC) : aucun , ces deux plans sont parallèles.



Exercice 3 :

1. On peut utiliser les propriétés des pyramides régulières pour montrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.

En effet, dans une pyramide régulière à base carrée, les arêtes latérales sont toutes de même longueur et sont perpendiculaires à la base.

De plus, les hauteurs de la pyramide (c'est-à-dire les hauteurs des triangles latéraux) sont concourantes en un point H appelé le sommet de la pyramide.

Dans notre cas, MN est une hauteur du triangle SNC, qui est l'un des triangles latéraux de la pyramide, et AC est une arête latérale qui est orthogonale à la base. Pour montrer que (MN) et (AC) sont sécantes, il suffit donc de montrer que le point H (sommet de la pyramide) est sur la droite (MN).

Pour cela, on peut utiliser le théorème de Thalès dans le triangle SNC :

$$\frac{MH}{NS} = \frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

car SABCD est une pyramide régulière à base carrée.

On sait que $SN = \frac{2}{3} SC$, donc $NS = \frac{1}{3} SC$. En substituant cette valeur, on a :

$$MH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} SC = \frac{\sqrt{2}}{6} SC$$

Or, on sait que SH est la médiane du triangle SAB, donc $SH = \frac{1}{2} SA = \frac{\sqrt{2}}{2} SA$. Puisque M est le milieu de [SA], on a $MS = \frac{1}{2} SA = \frac{\sqrt{2}}{2} SA$. Donc :

$$\frac{MH}{MS} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{6} SC}{\frac{\sqrt{2}}{2} SA} = \frac{SC}{3SA}$$

De plus, dans le triangle ASC, on a :

$$\frac{SC}{SA} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

En substituant cette valeur, on a :

$$\frac{MH}{MS} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Or, on sait que H est sur la hauteur (MN) du triangle SNC, donc il existe un réel k tel que :

$$MH = k \cdot MN$$

Puisque M est le milieu de [SA], on a $MS = \frac{1}{2} SA$. Donc :

$$MN = NS - MS = \frac{1}{3} SC - \frac{\sqrt{2}}{2} SA$$

En se rappelant que $NS = \frac{2}{3} SC$, on peut réécrire cette expression :

$$MN = \frac{2}{3} SC - \frac{\sqrt{2}}{2} SA$$

En remplaçant MH et MN dans la relation $\frac{MH}{MN} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, on a :

$$\frac{k}{\frac{2}{3} SC - \frac{\sqrt{2}}{2} SA} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

En isolant k, on obtient :

$$k = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}}{\frac{2}{3} SC - \frac{\sqrt{2}}{2} SA} = \frac{1}{\sqrt{2}(2SC - 3SA)}$$

Puisque k est un réel non nul, cela montre que le point H est sur la droite (MN), et donc que (MN) et (AC) sont sécantes en H.

2. Pour placer le point d'intersection de (MN) et (AC), il suffit de trouver les coordonnées de H.

Puisque la pyramide est régulière, on peut utiliser un repère orthonormal avec S comme origine.

Si l'arête de la pyramide a une longueur égale à 1, alors les coordonnées des quatre sommets de la base sont :

A(1, 0, 0)

B(0, 1, 0)

C(-1, 0, 0)

D(0, -1, 0)

Comme la pyramide est régulière, la hauteur H est située sur l'axe passant par la base et le sommet S (cet axe est la symétrique de SN par rapport au plan de la base ABCD).

Il reste donc à trouver la coordonnée S_z de S, qui est aussi la distance entre S et le plan de la base. Cette distance peut être trouvée en utilisant les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC, qui est aussi le pied de la hauteur issue de A (c'est-à-dire la hauteur passant par S).

On peut facilement calculer que cet orthocentre a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$.

Donc la distance entre le plan de la base et S est égale à la distance entre le plan de la base et cet orthocentre, soit :

$$S_z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi, les coordonnées de S sont (0, 0, 0) et les coordonnées de H sont $(0, 0, -HS_z)$ où HS est la hauteur de la pyramide.

Cette hauteur peut être calculée en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle SAD :

$$HS^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

En simplifiant, on trouve $HS = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc les coordonnées de H sont $(0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pour trouver le point d'intersection de (MN) et (AC), on peut utiliser la formule de l'intersection de deux droites.

Soit M_0 le point de (MN) d'ordonnée nulle, c'est-à-dire le point de la droite (MN) qui a les mêmes abscisses que M et l'ordonnée 0.

Les coordonnées de M_0 sont donc $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, car SM est une médiane du triangle SAD.

De même, soit A_0 le point de (AC) d'abscisse nulle, c'est-à-dire le point de la droite (AC) qui a les mêmes ordonnées que A et l'abscisse 0.

Les coordonnées de A_0 sont donc $(0, \frac{1}{2}, 0)$.

La direction de (MN) est donnée par le vecteur $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SC} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{SA}$.

On peut trouver les coordonnées de ce vecteur en utilisant les coordonnées des points S, N et C (car $\overrightarrow{SN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$) et les coordonnées de A (car SA est une diagonale du carré ABCD).

On trouve :

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

La direction de (AC) est donnée par le vecteur $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$.

Les coordonnées de ce vecteur sont évidentes en utilisant les coordonnées des points A et C.

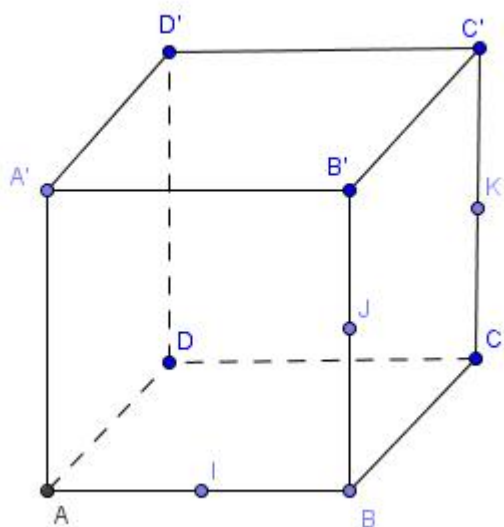
La droite (MN) passe par M_0 et a pour direction $\overrightarrow{MN}$, la droite (AC) passe par A_0 et a pour direction $\overrightarrow{AC}$.

Le point d'intersection de ces deux droites est donc donné par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} t \end{pmatrix}$$

où t est un réel quelconque.

Exercice 4 :



Les points I, J et K sont des milieux.

Dire si les affirmations sont vraies ou fausses et démontrer.

1) (IJ) et (A'D') sont parallèles .

La droite (A'D') est perpendiculaire au plan A'B'B donc à toute droite contenue dans ce plan.

Donc les droites (IJ) et (A'D') ne sont pas parallèles .

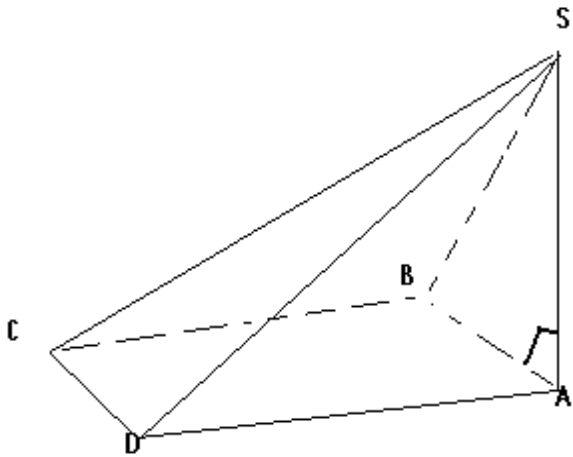
2) (AJ) et (DK) sont parallèles .

(AJ) et (DK) sont contenues dans deux plans parallèles

donc ces deux droites sont parallèles.

Exercice 5 :

La pyramide ci-dessous a pour base un rectangle ABCD de périmètre 24cm et pour hauteur le segment [SA] de longueur triple de celle du segment [AB]. On pose $AB=x$



1-Quelles valeurs peut prendre x ?

Le périmètre vaut 24.

Notons y la longueur du rectangle.

$x + y = 24 : 2 = 12$ donc **la longueur du rectangle vaut $y = 12 - x$.**

Or la longueur est plus grande que la largeur

donc **x est compris entre 0 et 6 cm.**

2-Démontrer que le volume de la pyramide SABCD est donné par la formule: $V = x^2(12 - x)$

$$V = \frac{1}{3} B \times \text{hauteur} =$$

$$V = \frac{1}{3} B \times \text{hauteur} =$$

3-Quelle est le volume de la pyramide lorsque ABCD est un carré ?

Si ABCD est un carré alors la longueur et la largeur du rectangle sont égales.

$$x = 6 \text{ cm}$$

donc

$$V = \frac{1}{3} B \times \text{hauteur} =$$

Exercice 6 :

1. Les droites (AD) et (EF) sont sécantes car elles appartiennent toutes deux au plan vertical qui contient les segments [AB] et [GF].

Ce plan coupe le plan horizontal qui contient les segments [AD] et [EF] selon une droite qui est commune aux plans.

Donc les droites (AD) et (EF) sont sécantes.

2. Les droites (AE) et (CG) sont sécantes car elles appartiennent toutes deux au plan vertical qui contient les segments [AB] et [GF], qui est différent du plan vertical qui contient les segments [AE] et [CG].

De plus, ces deux plans sont sécants selon la droite (AC). Donc les droites (AE) et (CG) ne peuvent pas être parallèles.

3. Les points A, E, C, G sont coplanaires car ils appartiennent tous les quatre au plan vertical qui contient les segments [AB] et [GF].

4. Les droites (AD) et le plan (EGH) sont sécants en un point X si et seulement si X appartient à la fois à la droite (AD) et au plan (EGH).

Or, le plan (EGH) est parallèle au plan horizontal qui contient les segments [AD] et [EF].

Donc les droites qui sont parallèles à (AD) dans ce plan sont également parallèles au plan (EGH), c'est-à-dire qu'elles n'ont aucun point commun avec ce plan.

En particulier, toutes les droites du plan horizontal qui contiennent un point de la droite (AD) ne sont pas sécantes avec le plan (EGH). Donc la droite (AD) et le plan (EGH) ne sont pas sécants.

5. Les plans (BCD) et (AEH) sont sécants le long de la droite (AC), qui est leur intersection.

En effet, la droite (AC) est contenue à la fois dans le plan (BCD) (car elle contient le segment [BC]) et dans le plan (AEH) (car elle contient le segment [AH]).

Donc les plans (BCD) et (AEH) ont une intersection non vide, qui est la droite (AC).

Exercice 7 :

Puisque les points S, A et B sont dans le plan P, la droite (AB) est parallèle à ce plan. De plus, la droite (SO) passe par le point O, qui est le milieu du segment [AB].

On peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{ST}$ en deux vecteurs, l'un parallèle à (AB) et l'autre perpendiculaire à (AB). Le vecteur parallèle à (AB) peut être obtenu en projetant $\overrightarrow{ST}$ sur la droite (AB) :

$$\overrightarrow{ST}_{||} = \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB^2} \overrightarrow{AB}$$

Le vecteur perpendiculaire à (AB) peut alors être obtenu en soustrayant $\overrightarrow{ST}_{||}$ de $\overrightarrow{ST}$:

$$\overrightarrow{ST}_{\perp} = \overrightarrow{ST} - \overrightarrow{ST}_{||}$$

Puisque RSUT est un losange de centre O, les vecteurs $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont perpendiculaires à (AB) et ont même norme.

De plus, RSUT étant un losange, le vecteur $\overrightarrow{ST}$ est égal à $\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{RS}$, donc :

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR}$$

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{ST}_{\perp} = \overrightarrow{ST} - \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB^2} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR} - \frac{(\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR}) \cdot \overrightarrow{AB}}{AB^2} \overrightarrow{AB}$$

Puisque $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont tous deux perpendiculaires à (AB), leur produit scalaire avec $\overrightarrow{AB}$ est nul. On peut donc simplifier l'expression de $\overrightarrow{ST}_{\perp}$:

$$\overrightarrow{ST}_{\perp} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OR} = 2 \overrightarrow{OS}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est donc orthogonal à la droite (AB) et son image par une symétrie axiale orthogonale à (AB) est lui-même.

Autrement dit, $\overrightarrow{OS}$ est un vecteur axial de l'orthogonal de P. Puisque le point S est situé en dehors de P mais que la droite (AB) est parallèle à P, on peut conclure que le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal à P.

Donc la droite (SO), qui contient le point O et le vecteur $\overrightarrow{OS}$, est également perpendiculaire au plan P.

Exercice 8 :

1. Le rayon du cercle de base correspond à la distance entre le point S et le segment HX, où X est le point de rencontre entre (SH) et le plan du rectangle HABC. On peut utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle SHX :

$$\tan(20^\circ) = HX / SH$$

$$HX = SH * \tan(20^\circ)$$

$$HX \approx 3,6 \text{ cm}$$

Le rayon du cercle de base est donc égal à HX, soit environ 3,6 cm.

2. La hauteur du cône correspond à la distance entre le point S et le point H. Encore une fois, on peut utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle SHX :

$$\cos(20^\circ) = HS / SH$$

$$HS = SH * \cos(20^\circ)$$

$$HS \approx 9,6 \text{ cm}$$

La hauteur du cône est donc égale à la distance SH moins la distance HS, soit environ 0,4 cm.

3. L'aire latérale du cône est donnée par la formule $A = \pi rL$, où L est la génératrice du cône. On peut trouver L en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle SHX :

$$L^2 = HS^2 + HX^2$$

$$L^2 \approx 39,2 \text{ cm}^2$$

$$L \approx 6,3 \text{ cm}$$

On a déjà trouvé que le rayon du cercle de base est d'environ 3,6 cm. Ainsi, l'aire latérale est :

$$A \approx \pi * 3,6 * 6,3$$

$$A \approx 71,4 \text{ cm}^2$$

L'aire latérale du cône est donc d'environ 71,4 cm².

Exercice 9 :

1. Les tétraèdres IFBG et IEAH ont la même forme, donc ils ont le même volume. En effet, ce sont des pyramides de même base (le triangle IFG) et de même hauteur (la droite (EA) est parallèle à la droite (GF), car les droites (AE) et (GF) sont perpendiculaires au plan (ABCD)).

Le volume d'un tétraèdre de base triangulaire ABC et de hauteur h est donné par la formule :

$$V = (1/3) * \text{aire}(ABC) * h$$

Le triangle IFG est isocèle en I, donc la hauteur du tétraèdre IFBG issue de I passe par le milieu de [FG], noté M. Comme FG a la longueur de 5 cm (arête du cube), alors le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle IFM donne $IF = GM = IM = (5/2) \text{ cm}$.

L'aire du triangle IFG est :

$$\text{aire}(IFG) = (1/2) * IF * FG$$

$$= (1/2) * (5/2) * 5$$

$$= (25/4) \text{ cm}^2$$

Le volume du tétraèdre IFBG est donc :

$$\begin{aligned}
 V(\text{IFBG}) &= (1/3) * \text{aire}(\text{IFG}) * \text{IG} \\
 &= (1/3) * (25/4) * (5/2) \\
 &= (125/48) \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

De même, le volume du tétraèdre IEAH est égal à $\frac{125}{48} \text{ cm}^3$.

Le prisme ADHBCG a une base rectangulaire de dimensions AB et AD, c'est-à-dire de longueurs 5 cm et 5 cm, soit une aire de 25 cm². Sa hauteur est égale à la hauteur du cube, soit 5 cm. Donc, son volume est :

$$\begin{aligned}
 V(\text{prisme ADHBCG}) &= \text{aire}(\text{base}) * \text{hauteur} \\
 &= 25 * 5 \\
 &= 125 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

2. Le volume de la pyramide IABGH est égal à la somme des volumes des deux tétraèdres IFBG et IEAH et du prisme ADHBCG :

$$\begin{aligned}
 V(\text{pyramide IABGH}) &= V(\text{IFBG}) + V(\text{IEAH}) + V(\text{prisme ADHBCG}) \\
 &= (125/48) + (125/48) + 125 \\
 &= (625/48) \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

3. Les sommets A, B, G et H sont situés sur une même face du cube, qui est un carré de diagonale EG. Cette diagonale a pour longueur $5\sqrt{2}$ cm, car EG octroie un triangle rectangle isocèle en E avec des catétés de longueur 5 cm.

Par conséquent, les côtés du carré ont une longueur de $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

L'aire du carré est donc $(5\sqrt{2})^2 = 50 \text{ cm}^2$.

Le quadrilatère ABGH est un trapèze rectangle, car les droites (AB) et (GH) sont parallèles et perpendiculaires à la droite (AE). Le segment [IS] est la hauteur de ce trapèze rectangle.

La hauteur [IS] divise le trapèze ABGH en deux triangles rectangles ISG et ISB.

La longueur SG est égale à la moitié de la diagonale GH du carré ABCD, donc SG a une longueur de $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

Dans le triangle rectangle ISG, on a :

$$\tan(\widehat{SIG}) = \frac{SG}{IS}$$

Or, [SIG] est l'angle formé par les droites (IS) et (GH). Comme les droites (AE) et (GF) sont perpendiculaires au plan (ABCD) et à la droite (GH), l'angle [SIG] est égal à 45°. Ainsi :

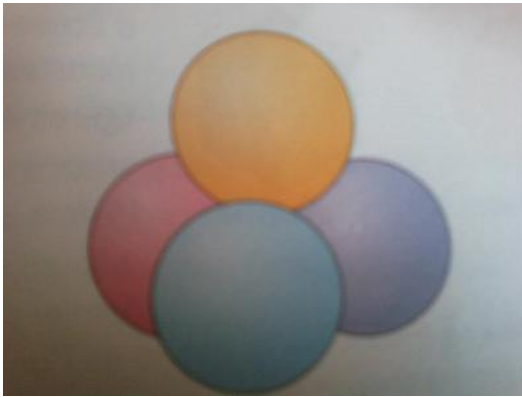
$$1 = SG/IS$$

$$\text{D'où } IS = SG = (5\sqrt{2})/2 \text{ cm.}$$

4. Pour tracer la hauteur [IS], on peut utiliser la figure ci-dessous. Le segment [SG] est tracé en rouge, pour illustrer la longueur qui a été calculée à la question précédente.

Exercice 10 :

Quatre ballons sphériques de diamètre 20 cm sont disposés de façon à former une pyramide. Quelle est la hauteur de la pyramide ?



Indication :

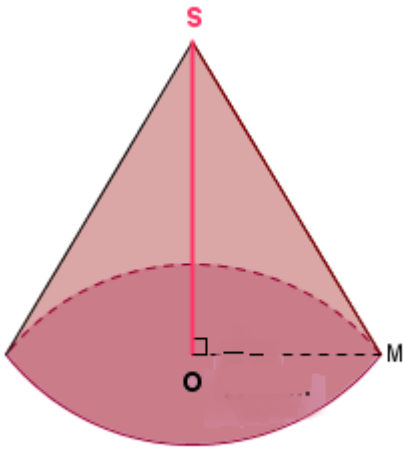
C'est une pyramide à base triangulaire.

Utiliser la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Exercice 12 :

un individu a un tour de tête de 59 cm. il souhaite se confectionner un chapeau pointu pour la nouvelle année dont la forme et celle d'un cône de révolution.



1) Déterminer le rayon R du disque de base du chapeau .

La base est un cercle son périmètre est :

$$2\pi \times R =$$

$$R = \frac{69}{2\pi}$$

L'individu souhaite que son chapeau ait une hauteur de 20 cm

2) Déterminer SM .

Dans le triangle rectangle SOM , d'après la partie directe

du théorème de Pythagore :

$$SM^2 = SO^2 + OM^2$$

$$SM^2 = 20^2 + \left(\frac{69}{2\pi}\right)^2$$

$$SM^2 = 400 + \frac{4761}{4\pi^2}$$

$$SM^2 = \frac{1600\pi^2}{4\pi^2} + \frac{4761}{4\pi^2}$$

$$SM^2 = \frac{1600\pi^2 + 4761}{4\pi^2}$$

$$SM = \sqrt{\frac{1600\pi^2 + 4761}{4\pi^2}}$$

$$SM = \frac{\sqrt{1600\pi^2 + 4761}}{2\pi}$$

$$SM \simeq 22,82 \text{ cm}$$

3) Calculer l'angle du secteur circulaire du patron du chapeau .

$$\tan(\widehat{OSM}) = \frac{OM}{OS}$$

$$\tan(\widehat{OSM}) = \frac{\frac{69}{2\pi}}{20}$$

$$\tan(\widehat{OSM}) = \frac{69}{40\pi}$$

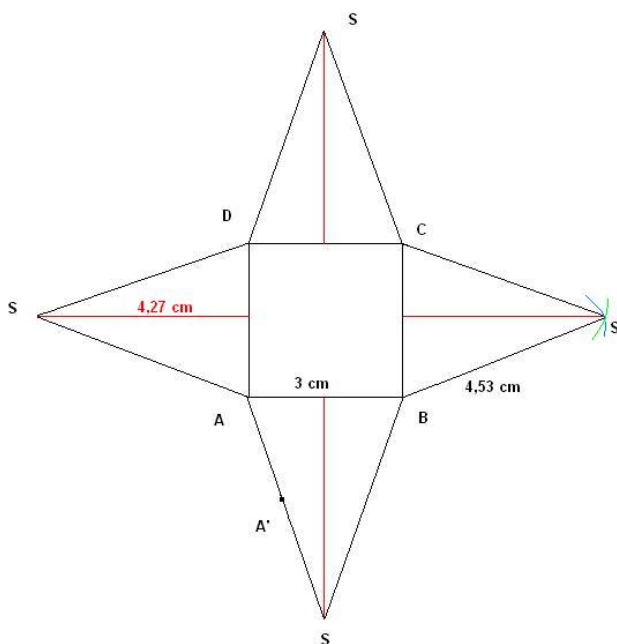
$$\widehat{OSM} \simeq 28,77^\circ$$

Or le triangle est isocèle donc [SO] est une hauteur mais aussi une bissectrice.

donc l'angle du secteur vaut $2\widehat{OSM} \simeq 58^\circ$

Exercice 13 :

Utiliser le théorème de Pythagore .



Exercice 14 :

PQRST est une pyramide de sommet P et de base QRST

Les droites (QS) et (RT) se coupent en I.

Déterminer la position relative :

a) des droites (PI) et (QS)

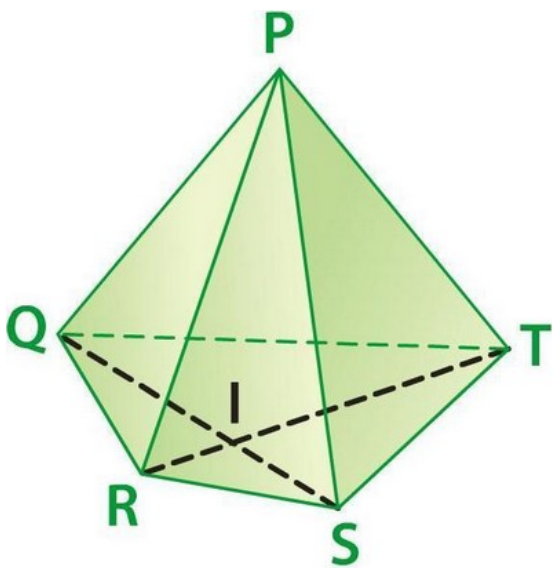
elles sont sécantes

b) des droites (PI) et (QT)

elles ne se croisent pas.

c) de la droite (RI) et du plan (QTP).

elle est sécante au plan.



Exercice 15 :

Un cône est dans un boule, le rayon de la boule est de 35cm .

1. Calculer le volume de la boule .

$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 35^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 42875$$

$$V \simeq 179594,38 \text{ cm}^3$$

2. Calculer le rayon du cône vert de hauteur 28 cm sachant que son sommet est en O et la génératrice du cône correspond au rayon de la boule .

Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore :

$$r^2 = R^2 - h^2$$

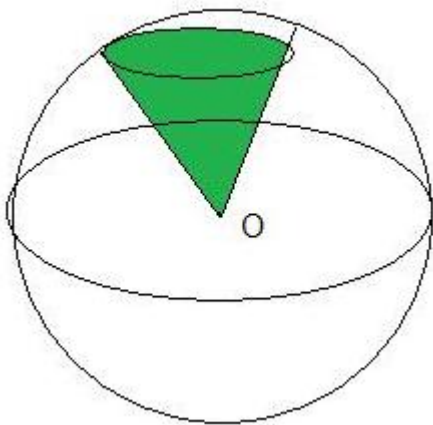
$$r^2 = 35^2 - 28^2$$

$$r^2 = 441$$

$$r = \sqrt{441}$$

$$r =$$

Le rayon du cône est donc de 21 centimètres .



Exercice 16 :

1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.

Un théorème dit que dans le triangle ASC si une droite relie le milieu du côté [AS] au milieu du côté [SC] alors cette droite "des milieux" c'est à dire qui relie les deux milieux est parallèle au troisième côté qui est [AC] porté par la droite (AC). Dans notre situation M est bien le milieu du côté [AS] tandis que N n'est pas le milieu de [SC] dans ce cas la droite (MN) ne peut pas être parallèle à (AC), elles sont donc sécantes.

Il faut aussi préciser que tous les points utilisés font partie d'un même plan géométrique (ASC).

2. Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).

Au vu de la construction $SN > \frac{1}{2} SC$ donc l'intersection entre (MN) et (AC) se fera sur (AC) du côté du point C.

