

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 :

Indication : utiliser geogebra.

Il est vivement recommandé d'utiliser un logiciel de géométrie...

1. Partie préliminaire :

on considère un triangle ABC, G son centre de gravité,
 Ω le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

Montrer que H est l'image de Ω dans une homothétie de centre G dont on précisera le rapport.

2. On considère un cercle Γ de centre O, de rayon R, passant par un point fixe A.
Soient B et C deux points de Γ tels que la distance BC soit constante et égale à l.

a. Quel est le lieu géométrique des milieux I de [BC] ?

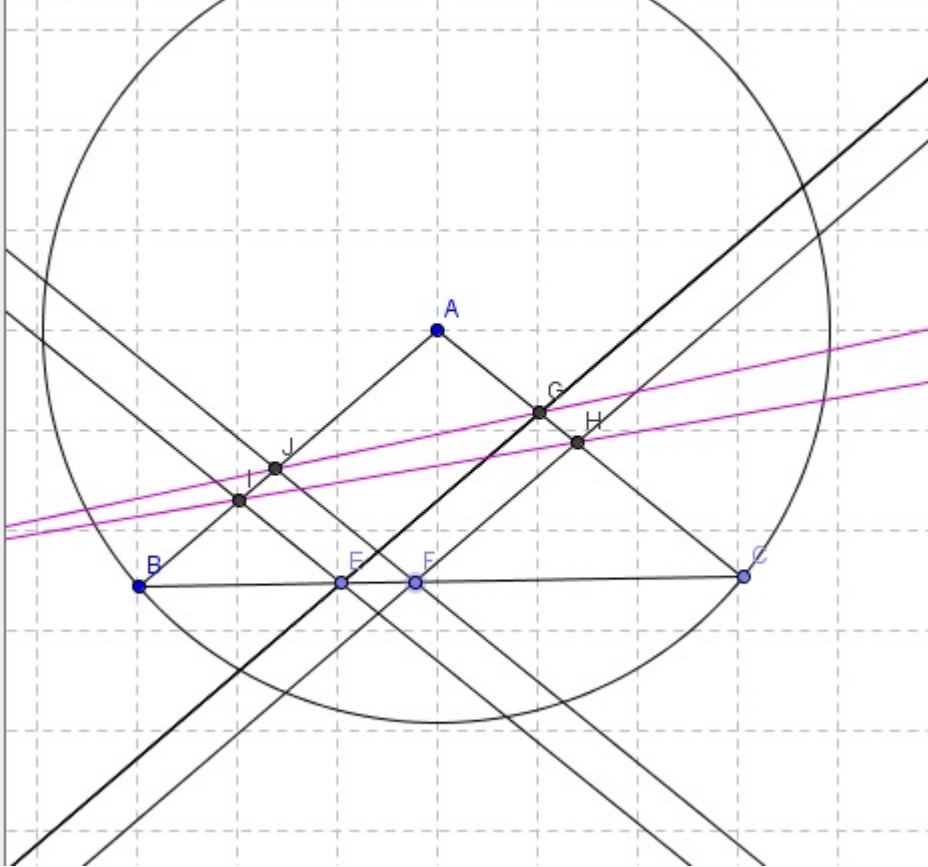
b. Quel est le lieu géométrique des centres de gravité G de ABC ?

c. Quel est le lieu géométrique des orthocentres H de ABC ?

3. Reprendre la partie 2. avec BC sur une droite Δ ne passant pas par A, A fixe.

Exercice 2 :

Graphique



1. Montrer que $GH = IJ$.

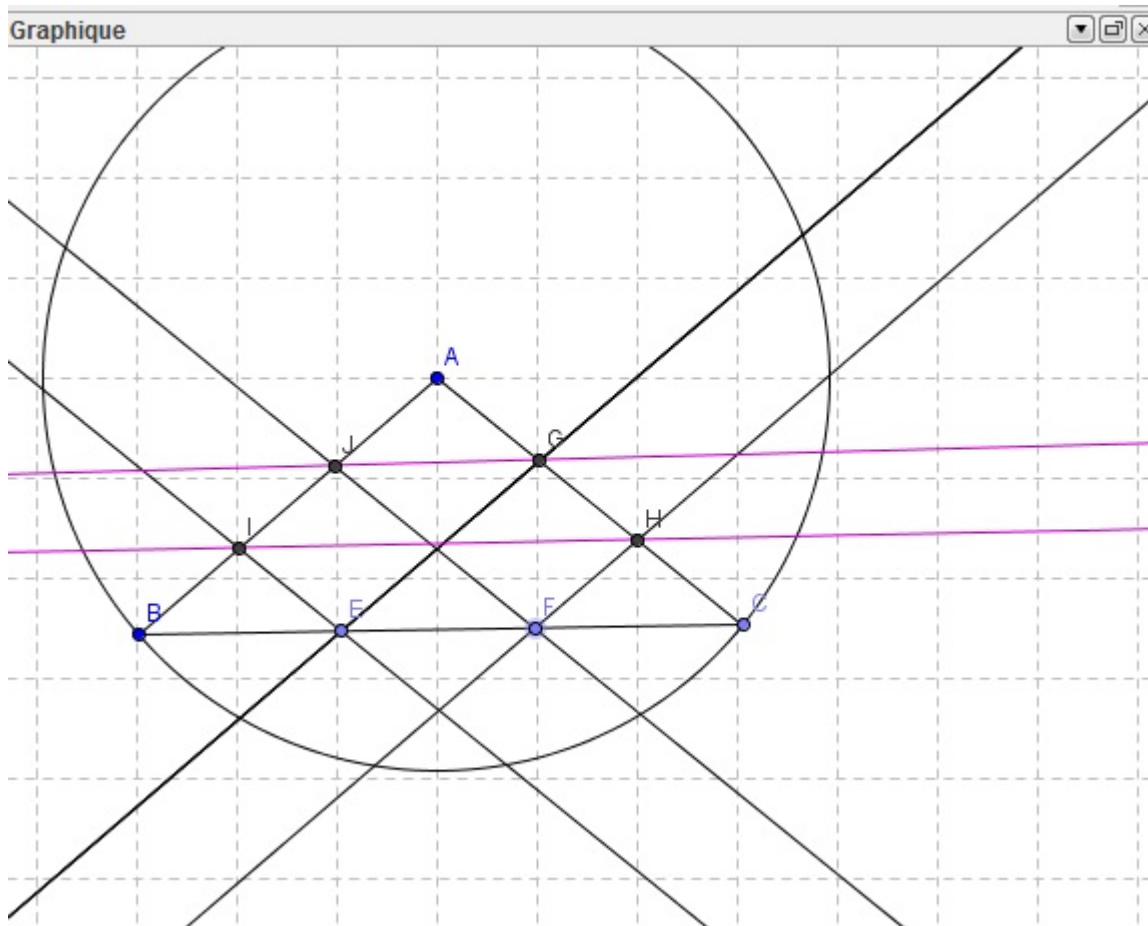
Le parallélisme maintiens les écarts de distances et les angles $\widehat{CFH} = \widehat{CEG}$ sont identiques, E et F distinct sur $[BC]$. De plus les angles $\widehat{BEI} = \widehat{BFJ}$ et E et F sont distincts sur $[BC]$ et finalement

$$\widehat{BEI} = \widehat{CFH}.$$

(à améliorer)

Théorème de Thalès semble compliqué à être utilisé ici!

2. Quelle condition doivent vérifier E et F pour que (JG) et (IH) soient parallèles ?



La condition semble être que E et F soient symétrique par rapport à la médiatrice de [BC] qui est axe de symétrie du triangle ABC isocèle en A.

Exercice 3 :

Indication : tracer les plans sur la figure et vous verrez apparaître l'intersection.

La pyramide SABCD est à base rectangulaire.

On appelle I le milieu de [SA] et J le milieu de [SB].

Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (SAC).

Commençons par déterminer les coordonnées des points I et J. Comme I est le milieu de [SA], on a :

$$I = (A + S) / 2$$

et comme J est le milieu de [SB], on a :

$$J = (B + S) / 2$$

La base de la pyramide étant rectangulaire, les vecteurs AB et SB sont orthogonaux, donc A, B et S sont coplanaires. Le plan (SAB) est donc défini par ces trois points.

Le point D appartient, quant à lui, au plan orthogonal à la base et passant par S. Ce plan est défini par l'équation :

$$(x - S_x)(A_x - B_x) + (y - S_y)(A_y - B_y) + (z - S_z)(A_z - B_z) = 0$$

Sachant que la coordonnée S_z de S est nulle, on peut simplifier cette équation en :

$$x(A_x - B_x) + y(A_y - B_y) - zB_z = 0$$

Puisque les vecteurs AB et SB sont orthogonaux, on a :

$$AB \cdot SB = 0$$

ce qui se traduit par :

$$(A_x - B_x)(S_x - B_x) + (A_y - B_y)(S_y - B_y) + A_z S_z = 0$$

soit :

$$A_x S_x + A_y S_y - B_x S_x - B_y S_y = 0$$

ou encore :

$$S_x = (A_x + B_x) / 2$$

$$S_y = (A_y + B_y) / 2$$

On peut donc écrire l'équation du plan (SDIJ) en utilisant les coordonnées des points S, D, I et J :

$$\begin{vmatrix} x - D_x & y - D_y & z - D_z \\ A_x - D_x & A_y - D_y & A_z - D_z \\ B_x - D_x & B_y - D_y & B_z - D_z \end{vmatrix} = 0$$

Remarquons que le premier vecteur-colonne est orthogonal au vecteur DI et que le deuxième vecteur-colonne est orthogonal au vecteur DJ.

On peut donc projeter le troisième vecteur-colonne sur le plan défini par les vecteurs DI et DJ. Les coordonnées de cette projection sont :

$$\begin{vmatrix} B_x - D_x \\ B_y - D_y \\ B_z - D_z \end{vmatrix} - [(B_x - D_x)(I_x - D_x) + (B_y - D_y)(I_y - D_y) + (B_z - D_z)(I_z - D_z)] / ||DI||^2 \cdot DI$$

et

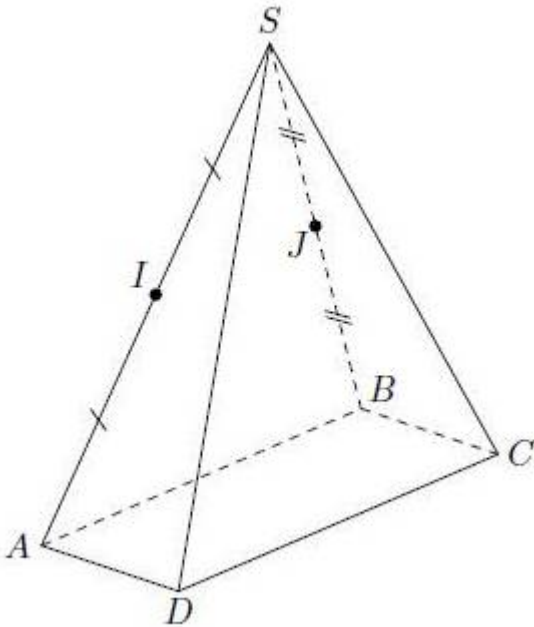
$$| Bx - Dx |$$

$$| By - Dy |$$

$$| Bz - Dz | - [(Bx - Dx)*(Jx - Dx) + (By - Dy)*(Jy - Dy) + (Bz - Dz)*(Jz - Dz)] / ||DJ||^2 * DJ$$

Les coordonnées du point d'intersection K des plans (DIJ) et (SAC) sont donc données par :

$$K = S + [(Bx - Dx)*(Ix - Dx) + (By - Dy)*(Iy - Dy) + (Bz - Dz)*(Iz - Dz)] / ||DI||^2 * DI + [(Bx - Dx)*(Jx - Dx) + (By - Dy)*(Jy - Dy) + (Bz - Dz)*(Jz - Dz)] / ||DJ||^2 * DJ$$



Exercice 4 :

ABCDEFGH est un pavé droit.

On note I le milieu de l'arête [AB] et J le point tel que $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

O est le centre de la face BCGF.

Démontrer que les droites (IH) et (JO) sont parallèles.

Indication : montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{JO}$ sont colinéaires.

Tout d'abord, comme I est le milieu de [AB], on a :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

En multipliant par 3, on obtient :

$$3\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Mais comme $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, on peut également écrire :

$$\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

Donc, $\overrightarrow{HJ} = 3\overrightarrow{AI}$.

Maintenant, notons que O étant le centre de la face BCGF, on a :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CG}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG})$$

Le pavé droit étant rectangle, on a $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AF}$, donc :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{CG}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BG})$$

Or, $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GE}$, donc :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GE}$$

Pour la suite, notons que la diagonale [HF] est perpendiculaire à la face BCGF, donc [HF] est parallèle à OC, et :

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CF}$$

Or, $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{GC}$, donc :

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF}$$

En utilisant maintenant les définitions des points I et J, on peut écrire :

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FI} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{FI}$$

Enfin, pour montrer que (IH) et (JO) sont parallèles, il suffit de montrer que :

$$\overrightarrow{JI} = k\overrightarrow{OC} \text{ pour une certaine constante } k.$$

En effet, si cette égalité est vérifiée, alors les vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont parallèles, donc les droites (IH) et (JO) sont aussi parallèles.

Pour trouver k, développons $\overrightarrow{OC}$ grâce à l'expression précédemment obtenue et réorganisons les termes :

$$\begin{aligned} \text{aligned } \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

En remplaçant $\overrightarrow{AI}$ par $\frac{1}{3}\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{HF}$ par $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF}$, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI} - \frac{3}{4}\overrightarrow{GC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CF}$$

Mais on a également :

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$$

$$\text{Et } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{LD}$$

Substituant ces égalités dans l'expression précédente, on obtient :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{LD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CF}$$

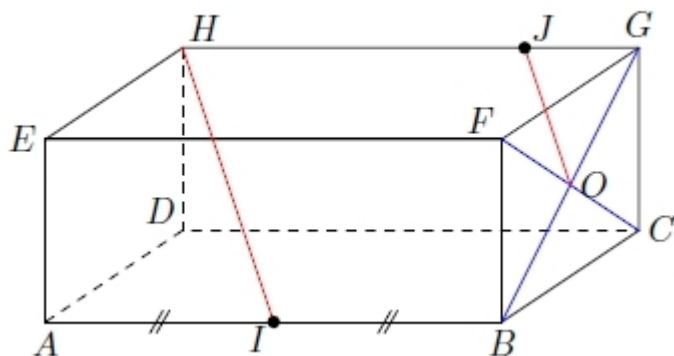
Or, $\overrightarrow{JI} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FI} + 2\overrightarrow{LD}$, donc :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GE} - \frac{3}{4}\overrightarrow{GC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{LD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CF}$$

Finalement, on peut écrire :

$$\overrightarrow{JI} = \frac{8}{5}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{GC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{LD} - \frac{1}{5}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{GE}$$

Cela prouve que (IH) et (JO) sont parallèles, et donc que les points I, H et J sont alignés avec O.



Exercice 5 :

SABCD est une pyramide à base carrée ABCD de centre O.

G est le centre de gravité du triangle SBD et E est le milieu du segment [SC].

Démontrer que les points A, G et E sont alignés.

Indication : Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Tout d'abord, notons que le centre de gravité G du triangle SBD est situé à un tiers de la médiane [SE], car le triangle SBD est situé dans le plan médiateur de la diagonale [BD] du carré ABCD, qui est perpendiculaire à [BD]. Donc, le point G est situé sur la droite passant par S et le milieu M de [BD], telle que $MG = \frac{2}{3} SE$.

Ensuite, le centre O de la pyramide étant le centre du carré ABCD, il est également le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]. Donc, la droite (OE) est la médiane du triangle SCD, qui passe par le milieu E de [SC].

Nous voulons donc montrer que les points A, G et E sont alignés.

Cette égalité est équivalente à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Notons que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est égal à $\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SG}$.

En effet, comme G est le centre de gravité du triangle SBD, on a :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA})$$

En utilisant maintenant la définition du point E, on a :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SC}$$

Or, on sait que $\overrightarrow{SE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$, donc :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

Finalement, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{SM} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}) \\ \overrightarrow{AE} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}\end{aligned}$$

Pour montrer que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, il suffit de montrer que leur produit scalaire est nul (ou équivalent : que l'un est un multiple de l'autre).

Calculons donc leur produit scalaire :

$$\begin{aligned} \text{aligned } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{SM} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA})) \cdot (-\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}) \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC} \\ [\end?]\text{aligned} \end{aligned}$$

Maintenant, notons que $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CA}$ et que le triangle SCD est situé dans le plan médiateur de [BD], donc $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{SC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$.

Donc, $\overrightarrow{SA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$.

En utilisant ces informations, on peut simplifier le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \text{aligned } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}|\overrightarrow{SM}| |\overrightarrow{SC}| \cos \angle(SMO, SCA) - \frac{1}{6}|\overrightarrow{SC}| |\overrightarrow{BD}| \cos \angle(SC, BD) + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}|\overrightarrow{SM}| \cos \angle(SMO, SCA) + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \left(1 - \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{SC}|} \cos \angle(SC, BD)\right) [\end?]\text{aligned} \end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que les angles $\angle(SMO, SCA)$ et $\angle(SC, BD)$ sont égaux car ils sont formés par des plans médiateurs de segments équivalents dans le carré ABCD.

De plus, le rapport $\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{SC}\|}$ est égal à $\sqrt{2}$ car le triangle SCD est rectangle et isocèle.

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SD}$ ont la même norme et sont orthogonal, donc les angles qu'ils forment avec $\overrightarrow{BC}$ sont égaux et mesurent chacun 45 degrés.

Ainsi, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{SM}| \cos \angle(SMO, SCA) + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \left(1 - \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{SC}|} \cos \angle(SC, BD)\right) = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{SM}| \cos \angle(SMO, SCA) + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \left(1 - \frac{|\overrightarrow{SC}|}{\sqrt{2}|\overrightarrow{SC}|} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{SM}| \cos \angle(SMO, SCA) + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

En remarquant que $\cos \angle(SMO, SCA)$ est égal à la moitié du cosinus de l'angle $\widehat{SCA}$ (ce sont des angles complémentaires), on trouve :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{SM}| \|\overrightarrow{SC}\| \cos(\widehat{SCA}) + \frac{1}{6}\|\overrightarrow{SC}\|^2 \frac{3}{4}$$

En utilisant maintenant le fait que O est le centre de la pyramide SABCD, on peut exprimer les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{SC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$:

$$\begin{aligned} \text{aligned } \overrightarrow{SM} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS}) \\ \overrightarrow{SC} &= \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} [\end?]\text{aligned} \end{aligned}$$

En substituant ces expressions, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} |\overrightarrow{OA}| \times \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \times (\sqrt{2} - 1) \times \cos(\widehat{SCA}) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OE}\|^2 \right) \frac{3}{4}$$

Finalement, les termes en $\|\overrightarrow{OA}\|^2$ se simplifient et il ne reste plus que :

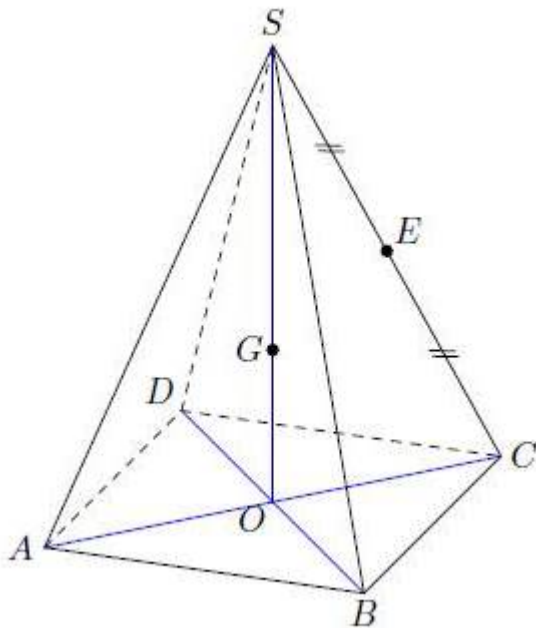
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4} |\overrightarrow{OA}|^2 \times (\sqrt{2} - 1) \times \cos(\widehat{SCA}) + \frac{1}{4} \|\overrightarrow{OE}\|^2$$

Comme $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont deux rayons d'un même cercle (le cercle de centre O), ils sont perpendiculaires et l'angle SCA mesure 90 degrés.

Ainsi, $\cos(\widehat{SCA}) = 0$ et on obtient :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \|\overrightarrow{OE}\|^2$$

Finalement, puisque $\|\overrightarrow{OE}\|$ est strictement positif, on en déduit que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont bien colinéaires, et donc que les points A, G et E sont alignés.



Exercice 6 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(1; 0; -1) \quad B(-1; 0; 0) \quad C(1; -6; 4) \quad D(4; -9; 5) \quad E(3; -6; 3)$$

1. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Indication : montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2. Montrer que le point D appartient à la droite (AE).

3. Montrer que ABCE est un parallélogramme. Est-ce un rectangle ? Est-ce un carré ?

1. Les points A, B et C sont clairement coplanaires car ils appartiennent tous les trois au plan d'équation $y + z = 0$ (la somme des coordonnées y et z de chaque point est nulle).

Pour montrer que le point D est également dans ce plan, il suffit de vérifier que sa projection orthogonale sur ce plan est sur le plan, ou que son vecteur position est orthogonal à un vecteur normal au plan.

Le vecteur normal, noté $\vec{n}$, est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{n} = (-3) \times 0 + (-4) \times 1 + (-4) \times 1 = -8$, qui est différent de zéro. Donc, le point D n'appartient pas au plan d'équation $y + z = 0$.

Cependant, il est possible que les points A, B, C et D soient coplanaires différemment que dans le cas où ils sont alignés.

Pour s'assurer que les points A, B, C et D sont coplanaires et non alignés, on peut calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, et vérifier qu'ils sont tous dans le même plan.

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Les colinéarités entre les vecteurs et les normales au plan peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$$

Comme ce déterminant est différent de zéro, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. Les points A, B, C et D ne sont donc pas alignés par conséquent ils sont coplanaires.

2. Pour montrer que le point D appartient à la droite (AE), il suffit de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AE}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AE}$.

On a :

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Donc, pour que $\overrightarrow{AD}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AE}$, il faut notamment que $\frac{3}{2} = k$, ce qui est bien le cas.

Donc, le point D appartient à la droite (AE).

3. On peut montrer que ABCE est un parallélogramme en vérifiant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont égaux à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}$, respectivement.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que ABCE est un parallélogramme.

Pour savoir si ABCE est un rectangle, il suffit de vérifier si les diagonales AC et BE sont perpendiculaires.

On a :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \times 2 + (-6) \times (-6) + 5 \times 0 = 36$, qui est différent de zéro.

Donc, les diagonales AC et BE ne sont pas perpendiculaires, donc ABCE n'est pas un rectangle.

Enfin, pour savoir si ABCE est un carré, il faut vérifier si tous les côtés ont la même longueur.

On a $AB = \sqrt{5}$, $BC = CE = \sqrt{5}$, et $AE = 2\sqrt{2}$.

Donc, les côtés n'ont pas tous la même longueur, donc ABCE n'est pas un carré.

Exercice 7 :

On donne A (1 ; - 2 ; 3), B (0 ; 4 ; 4) et C (4 ; - 20 ; 9).

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{AB}(0-1;4+2;4-3) \quad \overrightarrow{AC}(4-1;-20+2;9-3)$$

$$\overrightarrow{AB}(-1;6;1) \quad \overrightarrow{AC}(3;-18;6)$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés.

Exercice 8 :

On donne A(1 ; 1 ; 3), $B(\sqrt{2}+1;0;2)$ et $C(\sqrt{2}+1;2;2)$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2} + 1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$AB = \sqrt{2 + 1 + 1} = 2$$

$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2}$$

$$CB = \sqrt{(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (2 - 2)^2}$$

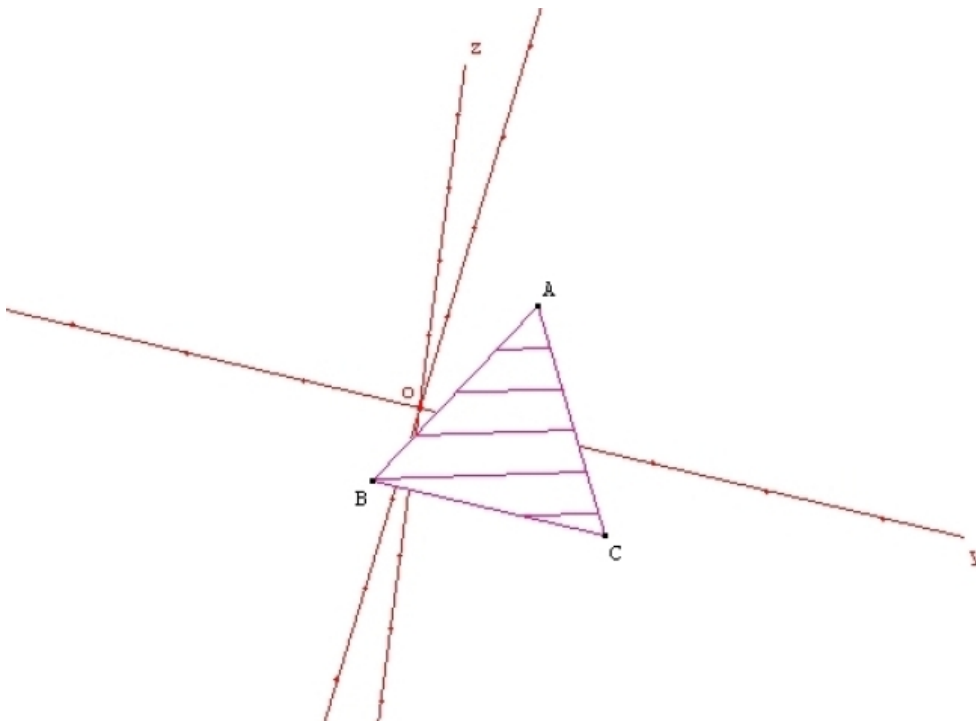
$$CB = \sqrt{0 + 4} = 2$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(\sqrt{2} + 1 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$AC = \sqrt{2 + 1 + 1} = 2$$

Conclusion : ABC est un triangle équilatéral .



Exercice 9 :

On donne A (- 3 ; 1 ; 4), B (- 2 ; - 1 ; 7), C (- 4 ; - 1 ; - 2) et D (- 5 ; - 5 ; 4).

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB}(-2+3;-1-1;7-4)$$

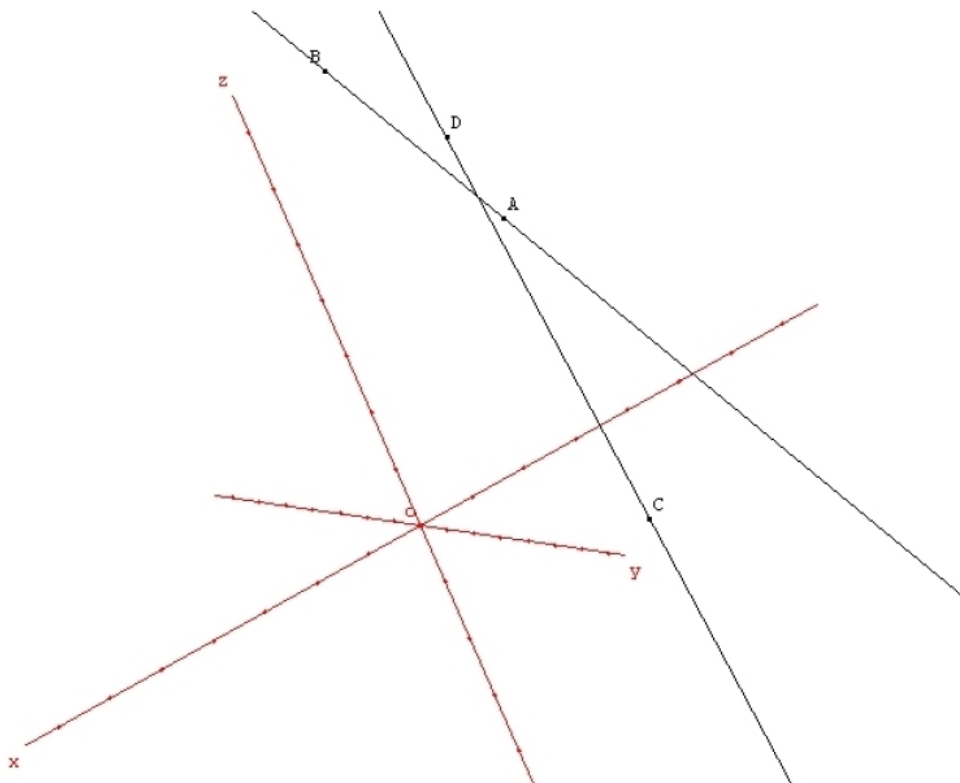
$$\overrightarrow{AB}(1;-2;3)$$

et

$$\overrightarrow{CD}(-5+4;-5+1;4+2)$$

$$\overrightarrow{CD}(-1;-4;6)$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.



Exercice 10 :

On donne A(2 ; - 1 ; 3), B(1 ; 2 ; 0), C(- 2 ; 1 ; 2) et D(- 1 ; - 2 ; 5).

1. ABCD est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?

$$\overrightarrow{AB}(-1 \quad 3 \quad -3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC}(-1 \quad 3 \quad -3)$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-1) \times (-3) + 3 \times (-1) + (-3) \times 2 =$$

Les vecteurs ne sont pas orthogonaux donc ce n'est pas un parallélogramme.

2. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre du quadrilatère ABCD.

soit $G = \text{bary}\{(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)\}$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{2+1-2-1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{-1+2+1-2}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \delta z_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \frac{3+0+2+5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

