

Géométrie affine

Dans toute la fiche, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure affine canonique et de son repère canonique. Sauf mention contraire, les points sont repérés par leurs coordonnées dans ce repère. Pour trois points alignés, $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$ désigne le réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Exercice 1 : Un sous-espace affine défini par des équations

On considère la partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ définie par le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine dont on précisera la direction et la dimension.
2. En donner un point et une représentation paramétrique.
3. Le point $M(1, -1, -1)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?
4. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan d'équation $z = 0$.

Exercice 2 : Plan passant par trois points

On donne les points $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que A , B , C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = (ABC)$.
3. Les points $D(4, -1, 2)$ et $E(1, 1, 1)$ appartiennent-ils à $\mathcal{P}$?
4. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par l'origine et dirigée par $(1, 1, 1)$.
5. Donner une équation du plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par l'origine.

Exercice 3 : Un hyperplan affine en dimension 4

Dans $\mathbb{R}^4$, on note $A = (1, 0, 0, 0)$, $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $\mathcal{H} = A + \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Justifier que $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{H}$.
3. Le point $(2, 1, 1, 1)$ appartient-il à $\mathcal{H}$?
4. Soit Δ la droite passant par $B = (0, 1, 0, 0)$ et dirigée par $e_1 = (1, 0, 0, 0)$. Montrer que Δ coupe $\mathcal{H}$ en un unique point, que l'on déterminera.

Exercice 4 : Positions relatives de trois droites de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les droites

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 + s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad \mathcal{D}_3 : \begin{cases} x = 2u \\ y = 1 + 4u \\ z = -2u \end{cases}$$

avec $t, s, u \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et donner leur point commun. Déterminer une équation du plan qui les contient.
2. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont strictement parallèles. Déterminer une équation du plan qui les contient.
3. Montrer que $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 5 : Critère d'intersection en dimension 4

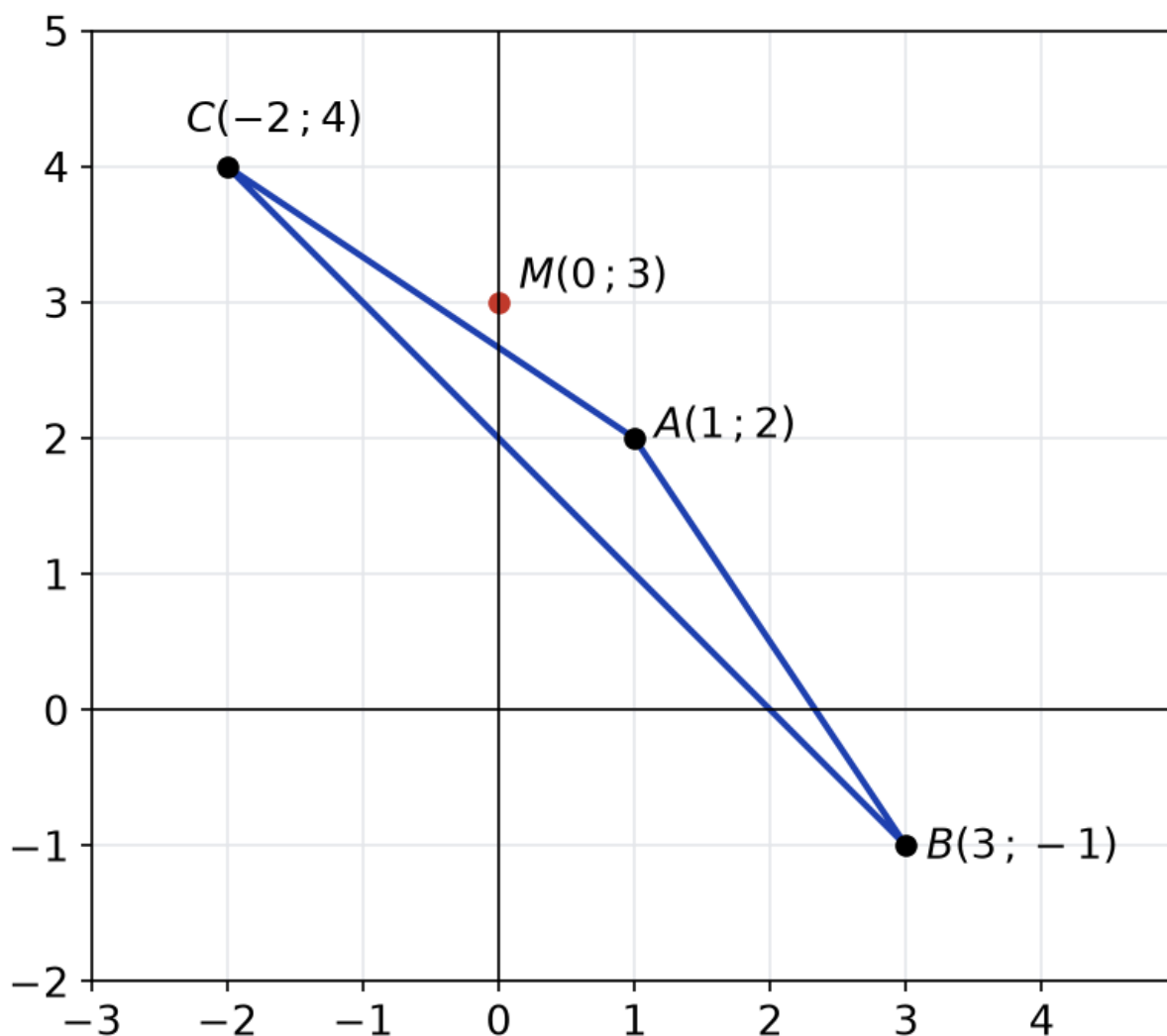
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, O l'origine et $B = (1, 1, 1, 1)$. On pose

$$\mathcal{P}_1 = O + \text{Vect}(e_1, e_2), \quad \mathcal{P}_2 = B + \text{Vect}(e_3, e_1 + e_4), \quad \mathcal{P}_3 = B + \text{Vect}(e_1, e_2 + e_3).$$

1. Rappeler le critère : $A + F$ et $B + G$ se coupent si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in F + G$.
2. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent en un unique point, que l'on déterminera.
3. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont disjoints, sans être parallèles.
4. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, deux plans affines non parallèles se coupent toujours selon une droite.

Exercice 6 : Barycentre et coordonnées barycentriques

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-2, 4)$ et $M(0, 3)$, représentés ci-dessous.



1. Justifier que (A, B, C) est un repère affine du plan.
2. Calculer les coordonnées du barycentre G de $((A, 2), (B, -1), (C, 3))$.
3. Déterminer les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) .
4. Le point M est-il à l'intérieur du triangle ABC ? Justifier à l'aide de la question précédente.

Exercice 7 : Médianes d'un triangle et d'un tétraèdre

1. Soit ABC un triangle et G son isobarycentre. On note A' , B' , C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer que les trois médianes passent par G et que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$.
2. Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace et G l'isobarycentre de ses sommets. Montrer que les trois segments qui joignent les milieux de deux arêtes opposées ont tous pour milieu G .
3. Soit G_A le centre de gravité de la face BCD . Montrer que $G \in (AG_A)$ et que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG_A}$. En déduire que les quatre droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourantes.

Exercice 8 : Un alignement démontré par les barycentres

Soit ABC un triangle non aplati. On définit les points

$$P = \text{bar}\{(B, 1), (C, -2)\}, Q = \text{bar}\{(C, 2), (A, -3)\}, R = \text{bar}\{(A, 3), (B, -1)\}.$$

1. Justifier l'existence de ces trois points et préciser sur quelle droite se trouve chacun d'eux.
2. En vectorialisant en un point O , exprimer $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.
3. Montrer que R est le milieu de $[PQ]$. En déduire que P , Q , R sont alignés.

Exercice 9 : Reconnaître une application affine

Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est affine. Si oui, donner la matrice de sa partie linéaire.

$$f_1(x, y) = (2x - y + 1, x + 3), \quad f_2(x, y) = (x^2, y), \quad f_3(x, y, z) = (x + y + 1, y - z, 3), \quad f_4(x, y) = (xy, x).$$

1. Étudier le caractère affine de f_1, f_2, f_3, f_4 .
2. Montrer que f_1 est bijective et déterminer f_1^{-1} . L'application f_1 a-t-elle des points fixes ?
3. L'application f_3 est-elle bijective ? Déterminer son image.

Exercice 10 : Application affine définie par trois points

Dans le plan, on pose $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $A'(1, 1)$, $B'(3, 2)$, $C'(0, 2)$.

1. Justifier qu'il existe une unique application affine f du plan telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
2. Donner l'expression de $f(x, y)$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe Ω et le calculer.
4. Déterminer l'image par f de la droite d'équation $y = x$.
5. Par quel facteur f multiplie-t-elle l'aire d'un triangle ?

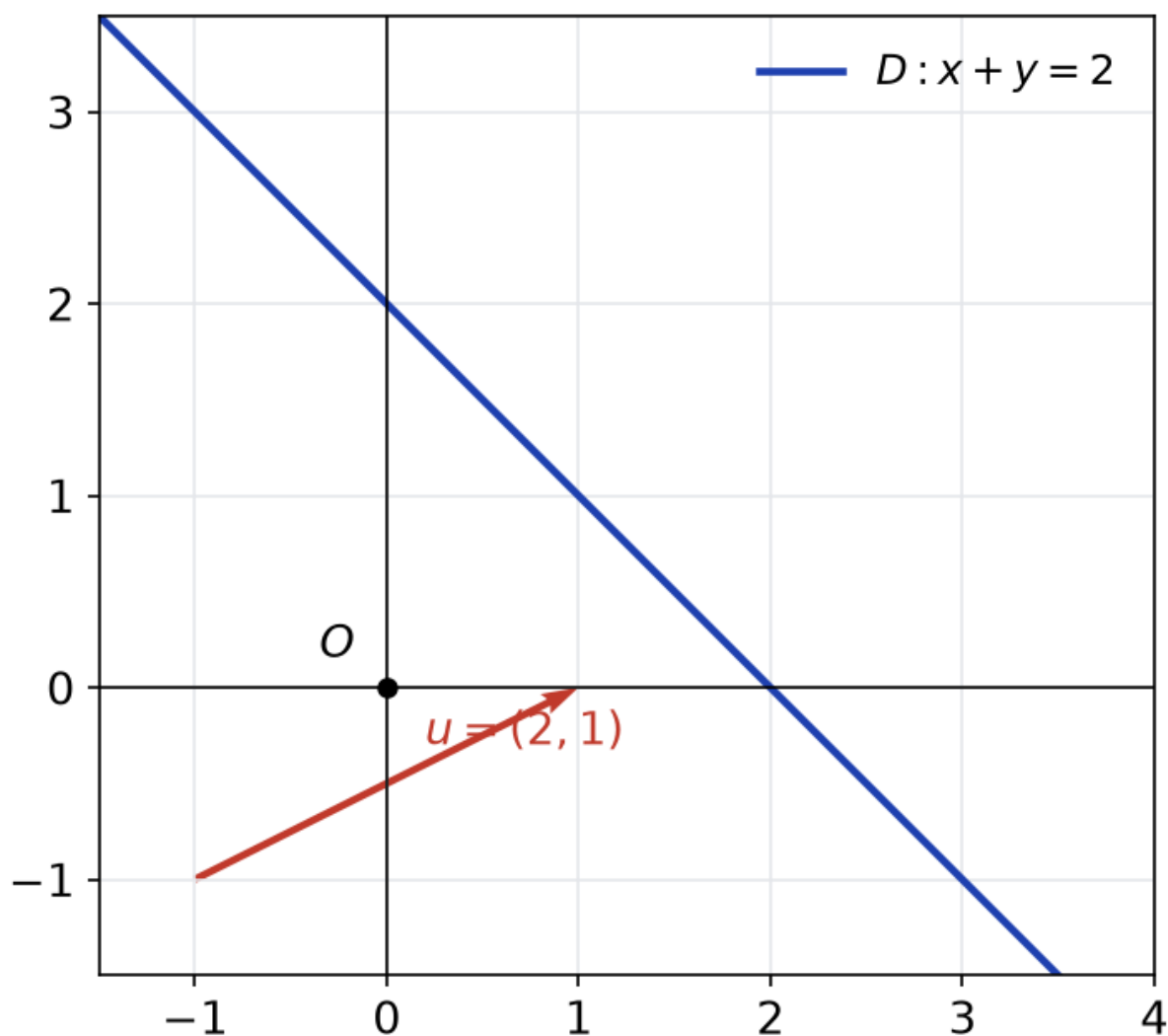
Exercice 11 : Composées d'homothéties et de translations

Dans le plan, on pose $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$. On note $h_{P, \lambda}$ l'homothétie de centre P et de rapport λ .

1. Montrer que $h_{A, 2} \circ h_{B, 3}$ est une homothétie ; préciser son rapport et son centre.
2. Déterminer $h_{A, 2} \circ h_{B, 1/2}$ puis $h_{B, 1/2} \circ h_{A, 2}$. Ces deux applications sont-elles égales ?
3. Soient u un vecteur et $\lambda \neq 1$. Montrer que $t_u \circ h_{A, \lambda}$ est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre.

Exercice 12 : Projection, symétrie et affinité sur une droite

Dans le plan, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + y = 2$ et le vecteur $u = (2, 1)$, comme sur la figure.



1. Vérifier que $\text{Vect}(u)$ est un supplémentaire de la direction de $\mathcal{D}$.
2. Déterminer l'expression de la projection p sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\text{Vect}(u)$.
3. En déduire l'expression de la symétrie s par rapport à $\mathcal{D}$ parallèlement à $\text{Vect}(u)$, et vérifier que $s \circ s = \text{id}$.
4. Déterminer l'expression de l'affinité a de base $\mathcal{D}$, de direction $\text{Vect}(u)$ et de rapport 3.
5. Calculer $p(O)$, $s(O)$ et $a(O)$, où O est l'origine.

Exercice 13 : Reconnaître une projection et une symétrie

On considère les applications du plan $f(x, y) = (x - y + 1, 1)$ et $g(x, y) = (x - 2y + 2, 2 - y)$.

1. Montrer que $f \circ f = \text{id}$. En déduire la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer que $g \circ g = \text{id}$. En déduire la nature de g et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Vérifier que, pour tout point M , $f(M)$ est le milieu de $[M g(M)]$, et interpréter.

Exercice 14 : Composées de symétries centrales

Pour un point A , on note s_A la symétrie centrale de centre A , c'est-à-dire $h_A, -1$.

1. Montrer que $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.
2. Montrer que $s_A \circ s_B \circ s_C$ est une symétrie centrale de centre D , où $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
3. Soit u un vecteur. Montrer que $s_A \circ t_u$ est une symétrie centrale et préciser son centre.
4. Soient I, J, K trois points du plan. Montrer qu'il existe un unique triangle ABC , éventuellement aplati, tel que I, J, K soient les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CA]$. Exprimer A en fonction de I, J, K .

Exercice 15 : Théorème de Thalès et trapèze

1. Soit OAB un triangle non aplati. Soient $A' \in (OA)$ et $B' \in (OB)$ distincts de O , tels

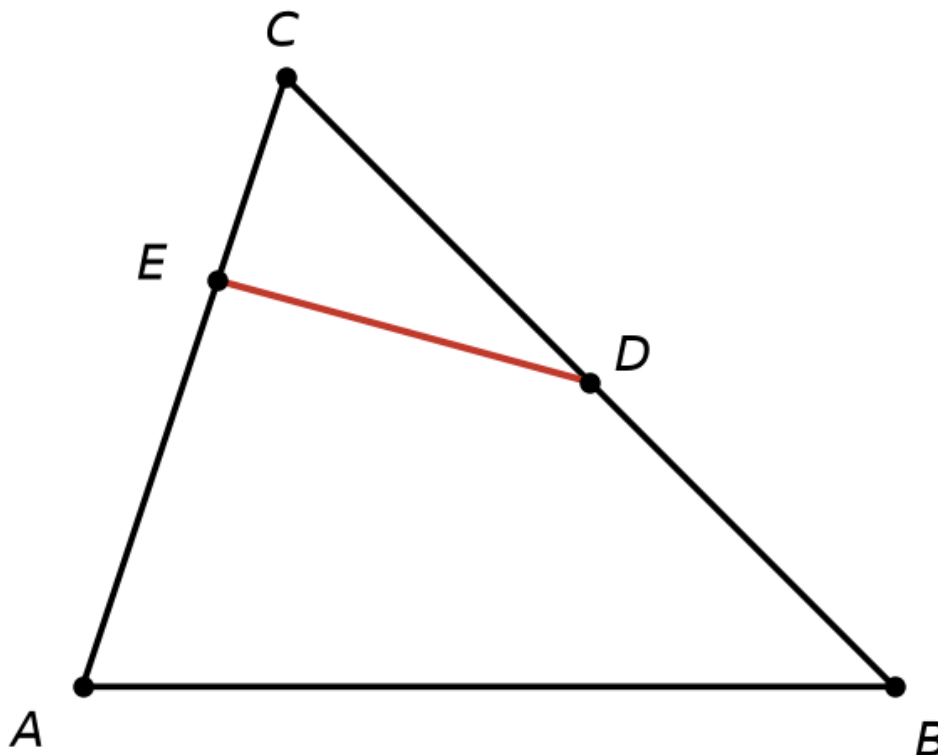
que $(A'B')$ soit parallèle à (AB) . À l'aide de l'homothétie h de centre O qui envoie A sur A' , montrer que $h(B) = B'$, puis que $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} \overrightarrow{AB}$.

2. Réciproquement, montrer que si $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$, alors $(A'B')$ est parallèle à (AB) .

3. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{AB} = 3 \overrightarrow{DC}$. Ses diagonales (AC) et (BD) se coupent en I . Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$.

Exercice 16 : Ménélâüs dans un triangle

Soit ABC un triangle non aplati. On note D le milieu de $[BC]$ et E le point de $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$. La droite (DE) coupe (AB) en un point F .



1. Calculer $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ et $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$.
2. À l'aide du théorème de Ménélaüs, calculer $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$. En déduire que B est le milieu de $[AF]$.
3. Vérifier ce résultat en coordonnées avec $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 3)$.

Exercice 17 : Céva et point de concours

Dans le plan, on pose $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 6)$, $P = \text{bar}\{(B, 2), (C, 1)\}$ et $Q = \text{bar}\{(C, 1), (A, 3)\}$.

1. Calculer les coordonnées de P et de Q .
2. Calculer $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ et $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$.
3. Déterminer le point R de (AB) tel que les droites (AP) , (BQ) , (CR) soient concourantes.
4. Déterminer leur point de concours G et vérifier le résultat par le calcul.

Exercice 18 : Une isométrie affine du plan

Le plan est muni de sa structure euclidienne usuelle. On considère

$$f(x, y) = \left(\frac{3x + 4y}{5} + 1, \frac{4x - 3y}{5} - 2 \right).$$

1. Montrer que f est une isométrie affine.
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de f .
3. Montrer que $f \circ f = \text{id}$, puis identifier f précisément.
4. Soit $v = (2, 1)$. Montrer que $g = f \circ t_v$ n'a aucun point fixe. De quelle isométrie s'agit-il ?

Exercice 19 : Toute isométrie est affine

Soit E un espace vectoriel euclidien, vu comme espace affine, et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous $x, y \in E$. On pose $g(x) = f(x) - f(0)$.

1. Montrer que $g(0) = 0$, que $|g(x) - g(y)| = |x - y|$ et que $|g(x)| = |x|$.
2. Montrer que $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous x, y .
3. En développant $|g(\lambda x + y) - \lambda g(x) - g(y)|^2$, montrer que g est linéaire.
4. En déduire que f est une application affine bijective à partie linéaire orthogonale.
5. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $|(x, y)|_\infty = \max(|x|, |y|)$. Montrer que l'application $t \rightarrow (t, \sin t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ conserve les distances sans être affine. Quelle étape de la démonstration utilise le caractère euclidien de la norme ?

Exercice 20 : Théorème de Desargues affine

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis du plan, à sommets deux à deux distincts, tels que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(BC) \parallel (B'C')$.

1. On suppose que les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en un point O situé hors des droites (AB) , (BC) , (CA) et distinct des six sommets. Montrer que $(AC) \parallel (A'C')$.
2. On suppose maintenant que (AA') , (BB') , (CC') sont parallèles et distinctes. Montrer encore que $(AC) \parallel (A'C')$.

Exercice 21 : Théorème de Pappus affine

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan sécantes en O . Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$, tous distincts de O . On suppose $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$.

1. Montrer qu'il existe une homothétie h_1 de centre O telle que $h_1(A) = B$ et $h_1(B') = A'$.
2. Montrer de même qu'il existe une homothétie h_2 de centre O telle que $h_2(B) = C$ et $h_2(C') = B'$.
3. Montrer que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.
4. En déduire que $(AC') \parallel (CA')$.

Exercice 22 : Problème : étude complète d'une affinité du plan

On considère l'application f du plan définie par $f(x, y) = (-2x - 3y + 3, y)$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + y = 1$ et le vecteur $u = (1, 0)$.

1. Montrer que f est affine et bijective. Donner la matrice de sa partie linéaire φ .
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de f .
3. Déterminer $\ker(\varphi + 2 \text{id})$ et vérifier que $\mathbb{R}^2 = \vec{\mathcal{D}} \oplus \text{Vect}(u)$.
4. Déterminer la projection p sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\text{Vect}(u)$. Montrer que f est l'affinité de base $\mathcal{D}$, de direction $\text{Vect}(u)$ et de rapport -2 .
5. Soit s la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ parallèlement à $\text{Vect}(u)$. Calculer $f \circ s$ et reconnaître cette application.
6. Plus généralement, soit a_k l'affinité de base $\mathcal{D}$, de direction $\text{Vect}(u)$ et de rapport k . Montrer que $a_k \circ a_m = a_{km}$. En déduire l'expression de f^n pour $n \in \mathbb{N}$.
7. Déterminer l'image par f du carré K de sommets $O(0, 0)$, $I(1, 0)$, $L(1, 1)$, $J(0, 1)$, ainsi que son aire.
8. Déterminer l'image par f de la droite Δ d'équation $y = 2x$, et vérifier qu'elle passe par le point $\Delta \cap \mathcal{D}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [géométrie affine, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Chapitre précédent : [Variables aléatoires à densité](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)