

Géométrie affine

Corrigé de l'exercice 1 : Un sous-espace affine défini par des équations

1. Le système est compatible si l'on trouve une solution. Pour $x = 0$, la seconde équation donne $y = -3$, puis la première donne $z = x + y - 1 = -4$. Ainsi, $A(0, -3, -4) \in \mathcal{D}$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible est un sous-espace affine. Sa direction est l'ensemble des solutions du système homogène $x + y - z = 0$, $2x - y = 0$. On obtient $y = 2x$ puis $z = x + y = 3x$. Donc la direction est $\text{Vect}((1, 2, 3))$. **$\mathcal{D}$ est une droite affine de direction $\text{Vect}((1, 2, 3))$.**
2. Un point est $A(0, -3, -4)$. Par conséquent, une représentation paramétrique est
$$(x, y, z) = (t, -3 + 2t, -4 + 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
3. On vérifie les deux équations : $1 + (-1) - (-1) = 1$ et $2 + 1 = 3$. **Donc $M \in \mathcal{D}$** ; il correspond au paramètre $t = 1$.
4. Le point de paramètre t est dans le plan $z = 0$ si et seulement si $-4 + 3t = 0$, soit $t = \frac{4}{3}$. On trouve $y = -3 + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$. **L'intersection est le point $(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$.** On contrôle : $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 0 = 1$ et $\frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$.

Corrigé de l'exercice 2 : Plan passant par trois points

1. On a $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$. S'ils étaient colinéaires, les premières

coordonnées imposeraient $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$. Or les deuxièmes coordonnées valent 1 et 1, et non 1 et -1. **Les points ne sont donc pas alignés.**

2. Le point $M(x, y, z)$ est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. En développant selon la première colonne $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z-2)$, les cofacteurs forment le vecteur

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1, \\ &(-2)(-1) - 1 \cdot (-1), \\ &1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = (1, 3, 2). \end{aligned}$$

L'équation s'écrit donc $(x-1) + 3y + 2(z-2) = 0$. **Une équation de $\mathcal{P}$ est $x + 3y + 2z = 5$.** On contrôle avec B : $2 + 3 + 0 = 5$, et avec C : $0 + 3 + 2 = 5$.

3. Pour D , on trouve $4 - 3 + 4 = 5$: $D \in \mathcal{P}$. Pour E , on trouve $1 + 3 + 2 = 6 \neq 5$: $E \notin \mathcal{P}$.
4. Les points de la droite sont (t, t, t) . Ils sont dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $6t = 5$. **L'intersection est le point $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$.**
5. Un plan parallèle à $\mathcal{P}$ a la même direction, donc une équation $x + 3y + 2z = b$. L'origine impose $b = 0$. **Le plan cherché a pour équation $x + 3y + 2z = 0$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Un hyperplan affine en dimension 4

1. Supposons $a u_1 + b u_2 + c u_3 = 0$. Ce vecteur vaut $(a, a+b, b+c, c)$. Donc $a = 0$, puis $b = 0$, puis $c = 0$. La famille est libre, et sa direction est de dimension $3 = 4 - 1$. **$\mathcal{H}$ est un hyperplan affine.**
2. On cherche (a, b, c, d) non nul tel que $ax + by + cz + dw = 0$ s'annule sur u_1, u_2, u_3 . Cela donne $a + b = 0$, $b + c = 0$ et $c + d = 0$. Ainsi, $(a, b, c, d) = (1, -1, 1, -1)$ convient. Ensuite, le point A donne le second membre 1. **Une équation de $\mathcal{H}$ est $x - y + z - w = 1$.**

3. On calcule $2 - 1 + 1 - 1 = 1$. **Le point $(2, 1, 1)$ appartient à $\mathcal{H}$.**
4. Le vecteur e_1 n'est pas dans $\vec{\mathcal{H}}$, car $1 - 0 + 0 - 0 = 1 \neq 0$. Par conséquent, $\vec{\mathcal{H}} \oplus \text{Vect}(e_1) = \mathbb{R}^4$ et le critère d'intersection assure un point commun unique. Les points de Δ sont $(\lambda, 1, 0, 0)$. L'équation donne $\lambda - 1 = 1$, soit $\lambda = 2$.
 $\Delta \cap \mathcal{H} = \{(2, 1, 0, 0)\}$.

Corrigé de l'exercice 4 : Positions relatives de trois droites de l'espace

1. Un point commun à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ vérifie $1 + t = 3$, $2t = 4 + s$ et $1 - t = -1 + s$. La première équation donne $t = 2$, la deuxième $s = 0$. La troisième est alors vérifiée : $-1 = -1$. **Les droites sont sécantes en $(3, 4, -1)$.** Le plan qui les contient est dirigé par $(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1, (1, 2, -1) \text{ et } (0, 1, 1) \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (3, -1, 1)$. Avec le point $(1, 0, 1)$, on obtient **le plan** $3x - y + z = 4$. On contrôle : $9 - 4 - 1 = 4$.
2. La direction de $\mathcal{D}_3$ est $(2, 4, -2) = 2(1, 2, -1)$. Les deux droites sont donc parallèles. De plus, le point $(0, 1, 0)$ de $\mathcal{D}_3$ n'est pas sur $\mathcal{D}_1$: $1 + t = 0$ impose $t = -1$, puis $y = -2 \neq 1$. **Les droites sont strictement parallèles.** Le plan qui les contient est dirigé par $(1, 2, -1)$ et par $(0, 1, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 1, -1)$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs vaut $(-1, 2, 3)$. Avec le point $(0, 1, 0)$, on obtient **le plan** $-x + 2y + 3z = 2$. On contrôle avec $(1, 0, 1)$: $-1 + 0 + 3 = 2$.
3. Les directions $(0, 1, 1)$ et $(1, 2, -1)$ ne sont pas colinéaires. Si $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ étaient coplanaires, elles seraient donc sécantes. Or un point commun vérifierait $3 = 2u$, $4 + s = 1 + 4u$ et $-1 + s = -2u$. On trouve $u = \frac{3}{2}$ puis $s = 3$. La troisième équation devient $2 = -3$, ce qui est faux. **Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ ne sont pas coplanaires.**

Point de méthode : dans l'espace, deux droites de directions non colinéaires sont soit sécantes, soit non coplanaires ; un seul système suffit à trancher.

Corrigé de l'exercice 5 : Critère d'intersection en dimension 4

1. Si C est commun, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ avec $\overrightarrow{AC} \in F$ et $\overrightarrow{CB} \in G$.
Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F$, $v \in G$, alors $C = A + u = B - v$ est commun. **Le critère est établi.**
2. Posons $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_1 + e_4)$. La somme $F + G$ contient e_1, e_2, e_3 et $e_4 = (e_1 + e_4) - e_1$: c'est $\mathbb{R}^4$. Les plans se coupent donc. De plus, $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 4 = 0$, donc l'intersection est un point. On résout $a e_1 + b e_2 = B + c e_3 + d(e_1 + e_4)$, soit $(a, b, 0, 0) = (1 + d, 1, 1 + c, 1 + d)$. On obtient $d = -1$, $c = -1$, $b = 1$ et $a = 0$. $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \{(0, 1, 0, 0)\}$.
3. Ici, $F + \text{Vect}(e_1, e_2 + e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Or $\overrightarrow{OB} = (1, 1, 1, 1)$ a une quatrième coordonnée non nulle : il n'est pas dans cette somme. Les plans sont donc disjoints. En revanche, $e_2 + e_3 \notin F$, donc les directions sont différentes. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ **sont disjoints sans être parallèles**. Ce phénomène n'existe pas pour deux plans de $\mathbb{R}^3$.
4. Soient deux plans de $\mathbb{R}^3$ de directions $F \neq G$, de dimension 2. Alors $F + G$ contient strictement F , donc $\dim(F + G) = 3$ et $F + G = \mathbb{R}^3$. D'après le critère, les plans se coupent. Enfin, $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 3 = 1$. **L'intersection est une droite de direction $F \cap G$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Barycentre et coordonnées barycentriques

1. On a $\overrightarrow{AB} = (2, -3)$ et $\overrightarrow{AC} = (-3, 2)$, de déterminant $2 \cdot 2 - (-3)(-3) = -5 \neq 0$. Ces vecteurs forment une base. (A, B, C) **est un repère affine**.
2. La somme des poids vaut $2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$. On a $\frac{2A - B + 3C}{4 + 1 + 12} = \frac{(2 - 3 - 6, -4 + 1 + 12)}{17} = \frac{(-7, 17)}{17}$. **Donc**
 $G = \left(-\frac{7}{4}, \frac{17}{4}\right)$.
3. On cherche $a + b + c = 1$ avec $aA + bB + cC = M$. En remplaçant $a = 1 - b - c$, on obtient

$$\begin{cases} 1 + 2b - 3c = 0 \\ 2 - 3b + 2c = 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2b - 3c = -1 \\ -3b + 2c = 1 \end{cases}$$

La première ligne donne $b = \frac{3c-1}{2}$. En reportant, $-\frac{9c-3}{2} + 2c = 1$, donc $-5c = -1$ et $c = \frac{1}{5}$. Ensuite $b = -\frac{1}{5}$ et $a = 1$. **Les coordonnées barycentriques de M sont**

$$\left(1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right). \text{ On contrôle : } A - \frac{1}{5}B + \frac{1}{5}C = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \\ 2 + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = (0, 3).$$

4. Le triangle plein est l'ensemble des barycentres à poids positifs. Or la coordonnée relative à B est négative. **Le point M est hors du triangle**, et même de l'autre côté de (AC) par rapport à B , comme sur la figure de l'énoncé.

Corrigé de l'exercice 7 : Médianes d'un triangle et d'un tétraèdre

- On a $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$. Par associativité, on remplace $(B, 1), (C, 1)$ par $(A', 2)$. Donc $G = \text{bar}\{(A, 1), (A', 2)\}$, ce qui donne $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Ainsi G est sur la médiane (AA') . Le même argument vaut pour B et C . **Les trois médianes concourent en G , situé aux deux tiers de chacune à partir du sommet.**
- Soient I et J les milieux des arêtes opposées $[AB]$ et $[CD]$. Par associativité, $G = \text{bar}\{(I, 2), (J, 2)\}$: c'est le milieu de $[IJ]$. On procède de même avec les couples $([AC], [BD])$ et $([AD], [BC])$. **Les trois segments ont le même milieu G .**
- On a $G_A = \text{bar}\{(B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$. Par associativité, $G = \text{bar}\{(A, 1), (G_A, 3)\}$, d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$. En particulier, $G \in (AG_A)$. Le raisonnement s'applique à chaque sommet. **Les quatre droites concourent en l'isobarycentre G .**

Corrigé de l'exercice 8 : Un alignement démontré par les barycentres

1. Les sommes de poids valent $1 - 2 = -1$, $2 - 3 = -1$ et $3 - 1 = 2$. Elles sont non nulles, donc les trois barycentres existent. De plus, un barycentre de deux points est sur la droite qui les joint. **Ainsi** $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$ et $R \in (AB)$.

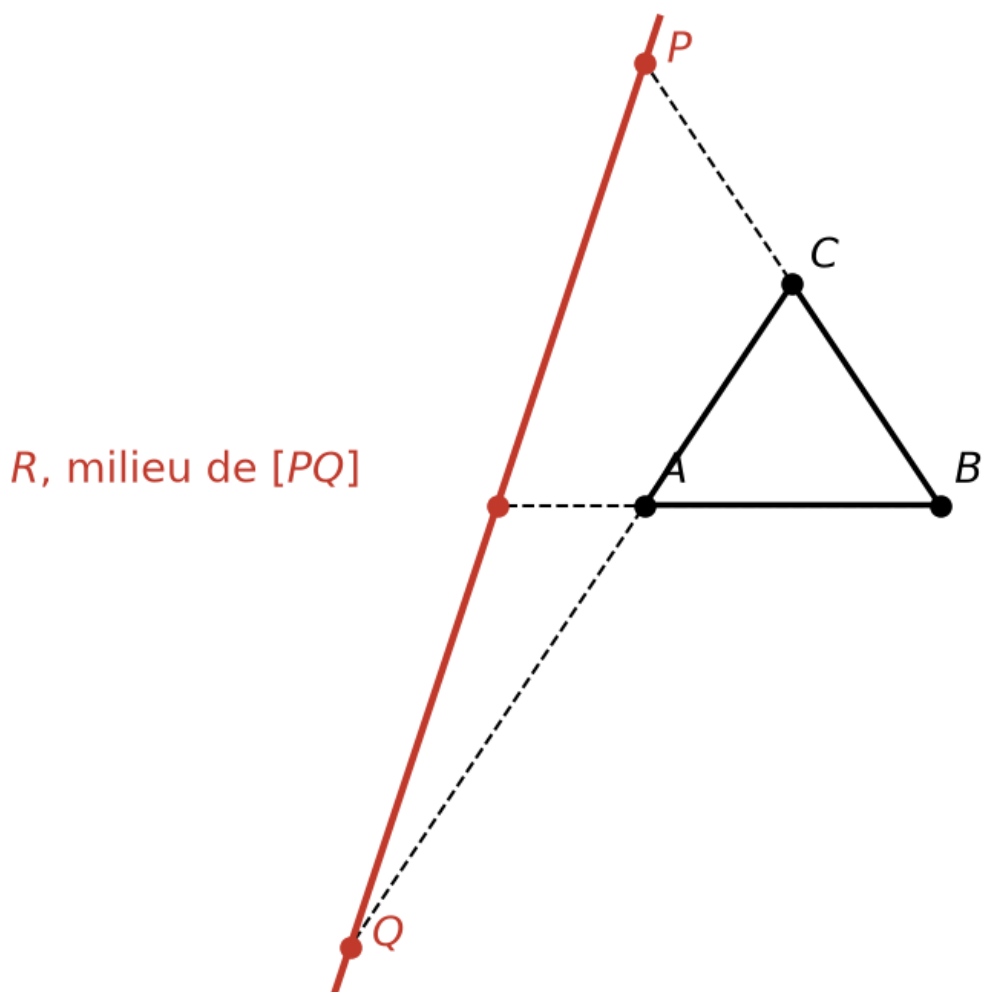
2. Par définition, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{-1}(\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})$. On obtient de même les deux autres :

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Ce sont les expressions demandées.

3. En ajoutant les deux premières, les termes en $\overrightarrow{OC}$ s'éliminent :

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OR}$. Donc R est l'isobarycentre de P et Q . **Ainsi, R est le milieu de $[PQ]$, et P, Q, R sont alignés.** La figure ci-dessous illustre la configuration avec $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1,5)$.



Point de méthode : on cherche une combinaison des relations qui élimine un sommet ; la relation restante donne directement l'alignement.

Corrigé de l'exercice 9 : Reconnaître une application affine

1. D'abord, $f_1(x, y) = (2x - y, x) + (1, 3)$: c'est une application linéaire suivie d'une translation. f_1 **est affine, de matrice linéaire** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, f_2 ne conserve pas les milieux. En effet, le milieu de $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ est $(0, 0)$, d'image $(0, 0)$. Or les images valent toutes deux $(1, 0)$, de milieu $(1, 0)$. f_2 **n'est pas affine**. Puis

$f_3(x, y, z) = (x + y, y - z, 0) + (1, 0, 3)$. f_3 est affine, de matrice linéaire $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin, pour f_4 , le milieu de $(0, 0)$ et $(2, 2)$ est $(1, 1)$, d'image $(1, 1)$. Pourtant les images $(0, 0)$ et $(4, 2)$ ont pour milieu $(2, 1)$. f_4 n'est pas affine.

- Le déterminant de la partie linéaire vaut $2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0$, donc f_1 est bijective. On résout $u = 2x - y + 1$ et $v = x + 3$. On obtient $x = v - 3$ puis $y = 2x + 1 - u = 2v - u - 5$. Donc $f_1^{-1}(u, v) = (v - 3, -u + 2v - 5)$. Un point fixe vérifierait $x - y = -1$ et $x + 3 = y$, soit $x - y = -3$. C'est contradictoire. f_1 n'a aucun point fixe. Ceci est cohérent : le polynôme caractéristique $(\lambda - 1)^2$ montre que 1 est valeur propre.
- La dernière ligne de la matrice est nulle, donc la partie linéaire n'est pas bijective. f_3 n'est pas bijective. L'image de la partie linéaire est engendrée par les colonnes $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$: c'est le plan $z = 0$. L'image de f_3 est donc le plan affine $(1, 0, 3) + \text{Vect}(e_1, e_2)$, d'équation $z = 3$.

Corrigé de l'exercice 10 : Application affine définie par trois points

- Une application affine est déterminée par l'image de A et par sa partie linéaire φ . Or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base. Il existe donc une unique φ linéaire telle que $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$. L'application $f(M) = A' + \varphi(\overrightarrow{AM})$ est l'unique solution.
- On a $\overrightarrow{A'B'} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{A'C'} = (-1, 1)$. Ainsi $\varphi(x, y) = x(2, 1) + y(-1, 1) = (2x - y, x + y)$. Donc $f(x, y) = (1 + 2x - y, 1 + x + y)$.
- On a $\det(\varphi - \text{id}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Ainsi, 1 n'est pas valeur propre de φ et f a un unique point fixe. On résout $1 + 2x - y = x$ et $1 + x + y = y$. La seconde donne $x = -1$, puis la première $y = 0$. Le point fixe est $O(-1, 0)$.
- Le point (t, t) a pour image $(1 + t, 1 + 2t)$. En posant $X = 1 + t$, on a $Y = 1 + 2(X - 1) = 2X - 1$. L'image est la droite d'équation $y = 2x - 1$.

5. Les aires sont multipliées par $|\det \varphi| = |2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1|$. **Le facteur vaut 3.**

Corrigé de l'exercice 11 : Composées d'homothéties et de translations

1. On vectorialise à l'origine. On a $h_{B,3}(M) = B + 3(M - B)$, puis

$$h_{A,2}(h_{B,3}(M)) = A + 2(B + 3M - 3B - A) = 6M - A - 4B.$$

La partie linéaire est 6 id . C'est donc une homothétie de rapport 6. Son centre vérifie

$$6O - A - 4B = O, \text{ soit } O = \frac{A + 4B}{5}. \text{ C'est l'homothétie de rapport 6 et de centre } O\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

2. D'une part, $h_{A,2}(h_{B,1/2}(M)) = A + 2\left(B + \frac{1}{2}(M - B) - A\right) = M + B - A$.

D'autre part, $h_{B,1/2}(h_{A,2}(M)) = B + \frac{1}{2}(A + 2(M - A) - B) = M + \frac{1}{2}(B - A)$.

Ce sont les translations de vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: elles sont différentes.

La composition n'est donc pas commutative.

3. On a $t_u \circ h_{A,\lambda}(M) = A + \lambda(M - A) + u$. La partie linéaire vaut $\lambda \text{ id}$ avec $\lambda \neq 1$: c'est une homothétie de rapport λ . Son centre vérifie $O = A + \lambda(O - A) + u$, soit $(1 - \lambda)(O - A) = u$. **Le centre est $O = A + \frac{1}{1 - \lambda}u$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Projection, symétrie et affinité sur une droite

1. La direction de $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle $x + y = 0$, engendrée par $(1, -1)$. Or $\det((1, -1), (2, 1)) = 1 + 2 = 3 \neq 0$. **Les deux droites vectorielles sont supplémentaires.**

2. Le projeté de $M(x, y)$ s'écrit $M + t u = (x + 2t, y + t)$, avec t tel que ce point soit sur $\mathcal{D}$. On obtient $x + y + 3t = 2$, soit $t = \frac{2 - x - y}{3}$. Par conséquent,

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x - 2y + 4}{3}, \\ \frac{-x + 2y + 2}{3} \end{pmatrix}.$$

Voilà l'expression de la projection. On contrôle que $p(2, 0) = (2, 0)$, comme attendu pour un point de $\mathcal{D}$.

3. Le point $p(M)$ est le milieu de $[M \ s(M)]$, donc $s(M) = 2p(M) - M$. Ainsi,

$$s(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-x - 4y + 8}{3}, \\ \frac{-2x + y + 4}{3} \end{pmatrix}.$$

Sa partie linéaire a pour matrice $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $S^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = I_2$.

De plus, $s(0, 0) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ et $s\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{-8 - 16 + 24}{9}, \frac{-16 + 4 + 12}{9}\right) = (0, 0)$.

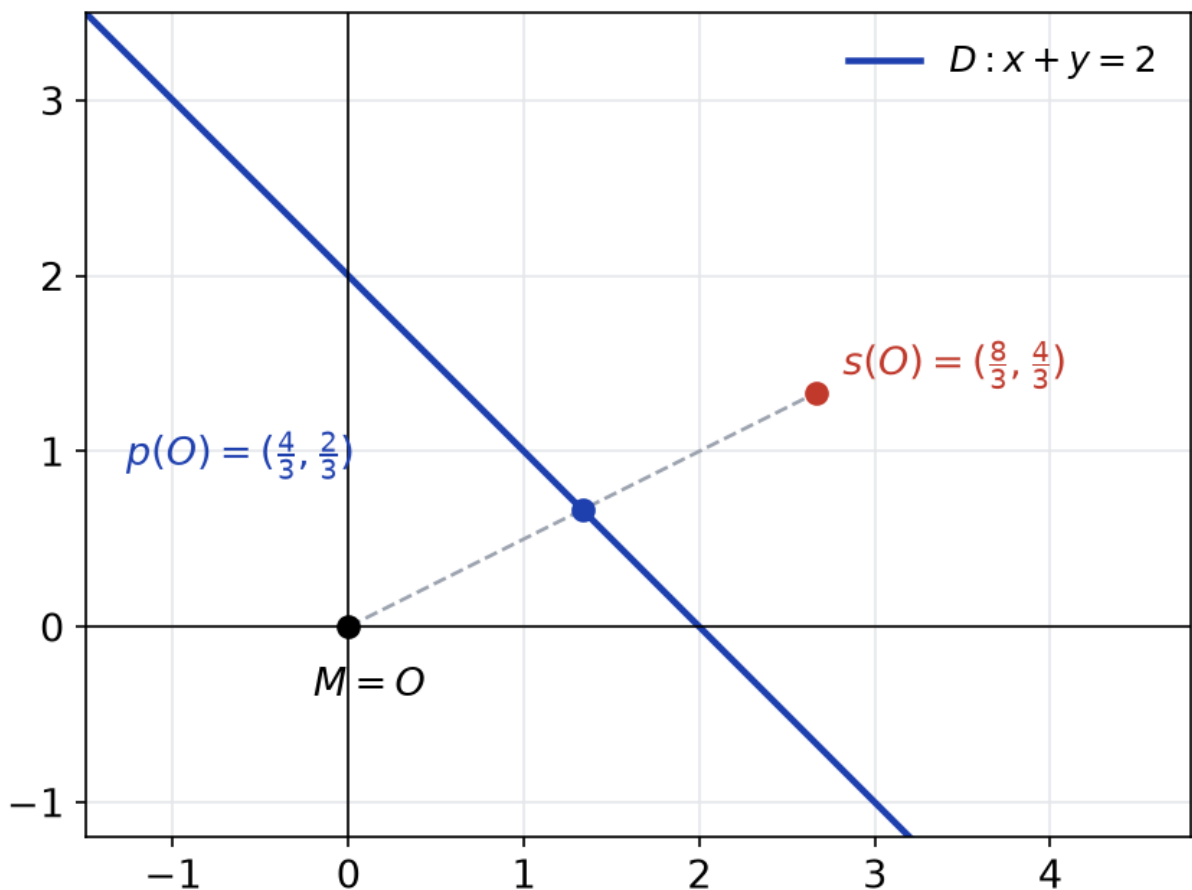
L'application affine $s \circ s$ a pour partie linéaire I_2 et fixe l'origine. **Donc** $s \circ s = \text{id}$.

4. On a $a(M) = p(M) + 3(M - p(M)) = 3M - 2p(M)$. Le calcul donne

$$a(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{7x + 4y - 8}{3}, \\ \frac{2x + 5y - 4}{3} \end{pmatrix}.$$

C'est l'expression de l'affinité de rapport 3. On vérifie que $a(2, 0) = (2, 0)$.

5. Les formules donnent $p(O) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $s(O) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ et $a(O) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Ces trois points sont sur la droite $O + \text{Vect}(u)$, comme le montre la figure ci-dessous pour $p(O)$ et $s(O)$.



Corrigé de l'exercice 13 : Reconnaître une projection et une symétrie

- On calcule $f(f(x, y)) = f(x - y + 1, 1) = ((x - y + 1) - 1 + 1, 1) = (x - y + 1, 1)$. Donc $f \circ f = \text{id}$, et f est une projection. Sa base est l'ensemble des points fixes : $x - y + 1 = x$ et $1 = y$, soit la droite $y = 1$. Sa direction est le noyau de la partie linéaire $(x, y) \rightarrow (x - y, 0)$, c'est-à-dire $\text{Vect}((1, 1))$. **f est la projection sur la droite $y = 1$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.**
- On calcule $g(g(x, y)) = g(x - 2y + 2, 2 - y) = (x - 2y + 2 - 2(2 - y) + 2, 2 - (2 - y)) = (x, y)$. Donc g est une symétrie. Ses points fixes vérifient $-2y + 2 = 0$ et $2 - y = y$: c'est la droite $y = 1$. Sa direction est $\ker(\vec{g} + \text{id})$, où $\vec{g} + \text{id}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **g est la symétrie par rapport à la droite $y = 1$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.**

3. Le milieu de $[M \ g(M)]$ vaut $\left(\frac{2x-2y+2}{2}, \frac{y+2-y}{2}\right) = (x-y+1, 1) = f(M)$.
Ainsi $g = 2f - \text{id}$: g est la symétrie associée à la projection f , avec les mêmes base et direction.

Corrigé de l'exercice 14 : Composées de symétries centrales

- On vectorialise en un point O et on identifie les points à leurs vecteurs. Alors
 $s_A(M) = 2A - M$. Par conséquent,
 $s_A(s_B(M)) = 2A - (2B - M) = M + 2(A - B)$. **C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{2BA}$.**
- On calcule $s_A \circ s_B \circ s_C(M) = M_1 + 2(A - B)$ avec $M_1 = 2C - M$. On obtient
 $2(A - B + C) - M$. **C'est la symétrie centrale de centre $D = A - B + C$.** Or
 $D - A = C - B$ signifie $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.
- On a $s_A(t_u(M)) = 2A - (M + u) = 2\left(A - \frac{u}{2}\right) - M$. **C'est la symétrie centrale de centre $A - \frac{1}{2}u$.**
- Les conditions s'écrivent $B = s_I(A)$, $C = s_J(B)$ et $A = s_K(C)$. Elles équivalent à
 $B = s_I(A)$, $C = s_J(B)$ et $s_K \circ s_J \circ s_I(A) = A$. Or, d'après la question 2,
 $s_K \circ s_J \circ s_I$ est la symétrie de centre $K - J + I$. Son unique point fixe est ce centre.
Donc $A = I - J + K$, puis $B = 2I - A = I + J - K$ et
 $C = 2J - B = J + K - I$. On vérifie que $2K - C = I - J + K = A$. **Le triangle existe et est unique, avec $A = I - J + K$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Théorème de Thalès et trapèze

- Soit k le réel tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$; il est non nul car $A' \neq O$. L'homothétie
 $h = h_{O, k}$ envoie A sur A' . Elle transforme la droite (AB) en la droite parallèle
passant par A' , c'est-à-dire $(A'B')$. Elle conserve aussi la droite (OB) , qui passe par son

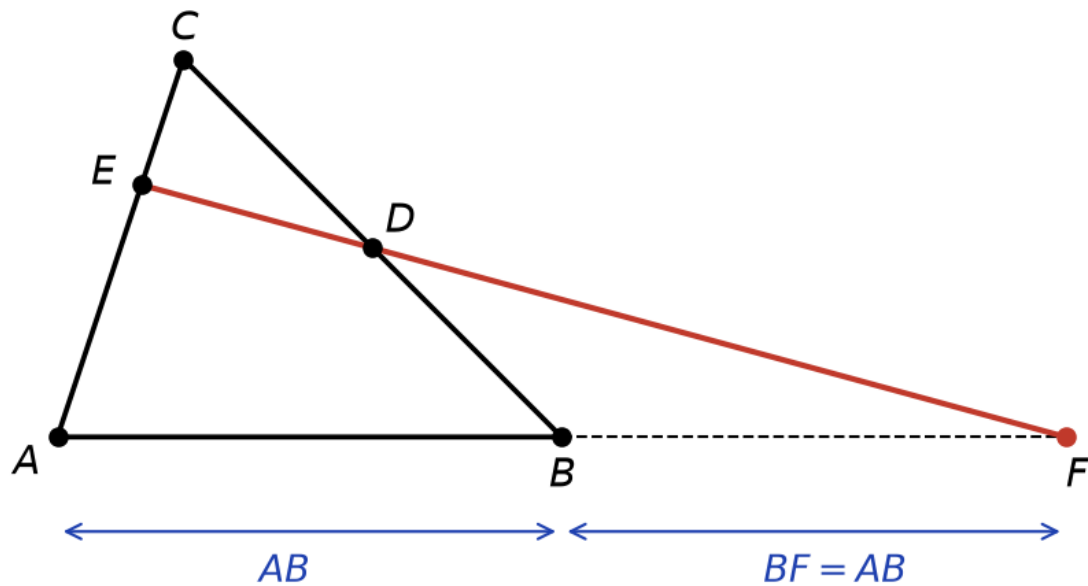
centre. Donc $h(B) \in (OB) \cap (A'B')$. Ces deux droites ne sont pas parallèles, sinon (OB) serait parallèle à (AB) et le triangle serait aplati. Leur unique point commun est B' . Donc $h(B) = B'$, d'où $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

2. Si les deux rapports valent k , alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$.
Les droites $(A'B')$ et (AB) sont donc parallèles.

3. Les points I, C, A sont alignés et $I \neq C$. Soit h l'homothétie de centre I telle que $h(C) = A$, de rapport k . Elle envoie (CD) sur la parallèle à (CD) passant par A , qui est (AB) . Elle conserve la droite $(ID) = (BD)$. Donc $h(D) \in (AB) \cap (BD) = \{B\}$. Par suite, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} = -k\overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$, donc $k = -3$. Ainsi $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IC}$, soit $4\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OC}$. **On conclut que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Ménélaüs dans un triangle

1. Comme D est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$, donc $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -1$. Ensuite, $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Donc $\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EA}} = -\frac{1}{2}$.
2. Les points D, E, F sont alignés et distincts des sommets. Le théorème de Ménélaüs donne $(-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}} = 1$. Donc $\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}} = 2$. Ainsi $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FB}$, c'est-à-dire $A - F = 2B - 2F$, soit $F = 2B - A$. **Le point B est donc le milieu de $[AF]$.**
3. On trouve $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et $E\left(\frac{2}{3}, 2\right)$. Le point $F = 2B - A$ vaut $(8, 0)$. On a $\overrightarrow{ED} = \left(\frac{11}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{22}{3}, -2\right) = 4\overrightarrow{ED}$. **Les points E, D, F sont alignés et F est bien sur (AB) , comme le confirme la figure.**



Corrigé de l'exercice 17 : Céva et point de concours

- On a $P = \frac{2B + C}{3} = \left(\frac{12}{3}, \frac{6}{3}\right)$ et $Q = \frac{C + 3A}{4}$. Donc $P(4, 2)$ et $Q\left(0, \frac{3}{2}\right)$.
- La définition de P donne $2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$, d'où $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -\frac{1}{2}$. De même, $\overrightarrow{QC} + 3\overrightarrow{QA} = 0$, d'où $\frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} = -3$.
- Les droites (AP) et (BQ) ne sont pas parallèles, donc les trois droites ne peuvent qu'être concourantes. D'après le théorème de Céva, il faut $\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)\frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, soit $\frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = -\frac{2}{3}$. Ainsi $3\overrightarrow{RA} + 2\overrightarrow{RB} = 0$, et $R = \text{bar}\{(A, 3), (B, 2)\}$. Donc $R\left(\frac{12}{5}, 0\right)$.
- Le point de concours est $G = \text{bar}\{(A, 3), (B, 2), (C, 1)\}$. En effet, l'associativité place G sur (AP) , (BQ) et (CR) . On calcule $G = \frac{3A + 2B + C}{6} = \left(\frac{12}{6}, \frac{6}{6}\right)$. Donc $G(2, 1)$. Vérifions : (AP) a pour équation $y = \frac{x}{2}$, qui contient $(2, 1)$. Ensuite, (BQ) a pour équation $x + 4y = 6$, et $2 + 4 = 6$. Enfin, (CR) a pour équation $5x + 2y = 12$, et $10 + 2 = 12$.

Corrigé de l'exercice 18 : Une isométrie affine du plan

1. L'application est affine, de partie linéaire de matrice $S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Ses colonnes sont de norme $\frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$ et orthogonales, car $\frac{12-12}{25} = 0$. Donc S est orthogonale, de déterminant $\frac{-9-16}{25} = -1$. **f est une isométrie affine.**
2. Les points fixes vérifient $3x + 4y + 5 = 5x$ et $4x - 3y - 10 = 5y$. Autrement dit, $-2x + 4y = -5$ et $4x - 8y = 10$. Ces deux équations sont proportionnelles. **L'ensemble des points fixes est la droite Δ d'équation $2x - 4y = 5$.**
3. On a $S^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = I_2$. De plus, $f(0, 0) = (1, -2)$ et $f(1, -2) = \left(\frac{3-8}{5} + 1, \frac{4+6}{5} - 2\right) = (0, 0)$. Ainsi, $f \circ f$ a pour partie linéaire I_2 et fixe l'origine : $f \circ f = \text{id}$. Donc f est une symétrie de base Δ . Sa direction est $\ker(S + I_2)$, donnée par $8x + 4y = 0$, soit $\text{Vect}((1, -2))$. Or $(1, -2)$ est orthogonal au vecteur directeur $(2, 1)$ de Δ . **f est la réflexion d'axe $\Delta : 2x - 4y = 5$.**
4. On a $g(x, y) = f(x + 2, y + 1) = \left(\frac{3x+4y}{5} + 3, \frac{4x-3y}{5} - 1\right)$. Un point fixe vérifierait $-2x + 4y = -15$ et $4x - 8y = 5$, soit $-2x + 4y = -\frac{5}{2}$. C'est contradictoire. **g n'a aucun point fixe.** De plus, $Sv = \left(\frac{6+4}{5}, \frac{8-3}{5}\right) = v$, donc $g = t_v \circ f$ avec v directeur de Δ . **g est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $v = (2, 1)$.**

Corrigé de l'exercice 19 : Toute isométrie est affine

1. D'abord, $g(0) = f(0) - f(0) = 0$. Ensuite, $g(x) - g(y) = f(x) - f(y)$, donc $|g(x) - g(y)| = |x - y|$. Enfin, avec $y = 0$, on obtient $|g(x)| = |x|$.
2. On développe $|g(x) - g(y)|^2 = |g(x)|^2 - 2\langle g(x), g(y) \rangle + |g(y)|^2$. De même, $|x - y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2$. Les normes étant égales terme à terme, $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

3. Posons $z = \lambda x + y$. On développe :

$$|g(z) - \lambda g(x) - g(y)|^2 = |g(z)|^2 + \lambda^2 |g(x)|^2 + |g(y)|^2 - 2\lambda \langle g(z), g(x) \rangle - 2\langle g(z), g(y) \rangle + 2\lambda \langle g(x), g(y) \rangle.$$

D'après la question 2, chaque terme reste le même si l'on enlève g . Le résultat vaut donc

$$|z - \lambda x - y|^2 = 0. \text{ Ainsi } g(\lambda x + y) = \lambda g(x) + g(y) : g \text{ est linéaire.}$$

4. L'application g est linéaire et conserve la norme : elle est orthogonale, donc injective. En dimension finie, elle est bijective. Enfin, $f(x) = f(0) + g(x)$. **f est affine bijective, de partie linéaire orthogonale g .**

5. Pour s, t réels, l'inégalité des accroissements finis donne $|\sin t - \sin s| \leq |t - s|$. Donc $\max(|t - s|, |\sin t - \sin s|) = |t - s|$: les distances sont conservées. Cependant, l'image d'une application affine définie sur $\mathbb{R}$ est une droite ou un point. Or $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ et $(\pi, 0)$ ne sont pas alignés. **L'application n'est pas affine.** L'étape qui échoue est la question 2 : la polarisation exige une norme issue d'un produit scalaire.

Corrigé de l'exercice 20 : Théorème de Desargues affine

- Les points O, A, A' sont alignés et $O \neq A$. Il existe donc une homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$. Elle envoie (AB) sur la parallèle à (AB) passant par A' , c'est-à-dire $(A'B')$. Elle conserve la droite $(OB) = (BB')$. Ainsi $h(B) \in (BB') \cap (A'B')$. Ces droites ne sont pas parallèles : sinon (OB) serait parallèle à (AB) et, passant par B , lui serait égale, ce qui mettrait O sur (AB) . Leur point commun est B' , donc $h(B) = B'$. En remplaçant A par B et B par C , le même raisonnement donne $h(C) = C'$. Par conséquent, h envoie (AC) sur $(A'C')$. **Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, donc $(AC) \parallel (A'C')$.**
- Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Elle envoie (AB) sur $(A'B')$. Ensuite, $t(B)$ est sur la parallèle à (AA') passant par B , c'est-à-dire (BB') . Or (BB') n'est pas parallèle à $(A'B')$. Sinon, elle serait égale à (AB) , et (AA') et (BB') seraient deux parallèles passant par A , donc confondues. Ainsi $t(B) = B'$, et de même $t(C) = C'$. **Donc $(A'C') = t((AC))$ est parallèle à (AC) .**

Point de méthode : pour montrer un parallélisme dans une configuration à deux triangles, on cherche une homothétie ou une translation qui envoie l'un sur l'autre.

Corrigé de l'exercice 21 : Théorème de Pappus affine

1. Les points O, A, B sont sur $\mathcal{D}$ et $A \neq O$. Soit h_1 l'homothétie de centre O telle que $h_1(A) = B$; son rapport est non nul car $B \neq O$. Elle envoie (AB') sur la parallèle passant par B , qui est (BA') par hypothèse. Elle conserve $\mathcal{D}'$, qui passe par O . Donc $h_1(B') \in \mathcal{D}' \cap (BA')$. Or $B \notin \mathcal{D}'$, donc cette intersection est réduite à $\{A'\}$. Ainsi $h_1(B') = A'$.
2. De même, l'homothétie h_2 de centre O telle que $h_2(B) = C$ envoie (BC') sur la parallèle passant par C , qui est (CB') . Elle conserve $\mathcal{D}'$. Donc $h_2(C') = B'$.
3. Si $h_1 = h_{O,k}$ et $h_2 = h_{O,m}$, alors
 $h_1 \circ h_2(M) = O + km \overrightarrow{OM} = h_2 \circ h_1(M)$. **Deux homothéties de même centre commutent.**
4. Posons $h = h_1 \circ h_2$. D'une part, $h(C') = h_1(B') = A'$. D'autre part, $h(A) = h_2(h_1(A)) = h_2(B) = C$. L'homothétie h envoie donc la droite (AC') sur la droite (CA') , qui lui est parallèle. **On conclut que $(AC') \parallel (CA')$.**

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : étude complète d'une affinité du plan

1. On a $f(x, y) = (-2x - 3y, y) + (3, 0)$. f est affine, de partie linéaire de matrice $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $-2 \neq 0$. Elle est donc bijective.
2. Les points fixes vérifient $-2x - 3y + 3 = x$, soit $3x + 3y = 3$. La seconde coordonnée donne $y = 1 - x$. **L'ensemble des points fixes est la droite $\mathcal{D} : x + y = 1$.**
3. La matrice de $\varphi + 2 \text{id}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Son noyau est défini par $y = 0$. **Donc $\ker(\varphi + 2 \text{id}) = \text{Vect}(u)$.** La direction de $\mathcal{D}$ est $\text{Vect}((1, -1))$, et $\det((1, -1), (1, 0)) = 1 \neq 0$. **Ainsi $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D} \oplus \text{Vect}(u)$.**
4. Le projeté de $M(x, y)$ est $(x + t, y)$ avec $x + t + y = 1$. **Donc**

$p(x, y) = (1 - y, y)$. On calcule alors

$$\begin{aligned} p(M) - 2(M - p(M)) &= (1 - y - 2(x - 1 + y), \\ , y) &= (-2x - 3y + 3, \\ , y) &= f(M). \end{aligned}$$

Ainsi, f est l'affinité de base $\mathcal{D}$, de direction $\text{Vect}(u)$ et de rapport -2 .

5. On a $s(M) = 2p(M) - M = (2 - x - 2y, y)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(s(x, y)) &= (-2(2 - x - 2y) - 3y + 3, \\ , y) &= (2x + y - 1, \\ , y). \end{aligned}$$

Or l'affinité de rapport 2 vaut

$$p(M) + 2(M - p(M)) = (1 - y + 2(x - 1 + y), y) = (2x + y - 1, y). \text{ Donc } f \circ s \text{ est l'affinité de base } \mathcal{D}, \text{ de direction } \text{Vect}(u) \text{ et de rapport } 2.$$

6. Le point $a_m(M)$ est sur $p(M) + \text{Vect}(u)$, qui coupe $\mathcal{D}$ en $p(M)$. Donc

$$p(a_m(M)) = p(M). \text{ Il vient}$$

$$a_k(a_m(M)) = p(M) + k(a_m(M) - p(M)) = p(M) + km(M - p(M)). \text{ Ainsi}$$

$$a_k \circ a_m = a_{km}. \text{ Par récurrence, } f^n = a_{(-2)^n}. \text{ De plus,}$$

$$a_k(x, y) = (kx + (k - 1)y + 1 - k, \text{ . Donc } , y)$$

$$f^n(x, y) = ((-2)^n x + ((-2)^n - 1)y + 1 - (-2)^n, \text{ . Pour } n = 1, \text{ on retrouve bien } f. , y)$$

7. Les images des sommets sont $f(O) = (3, 0)$, $f(I) = (1, 0)$, $f(L) = (-2, 1)$ et

$$f(J) = (0, 1). \text{ Les points } I \text{ et } J \text{ sont sur } \mathcal{D}, \text{ donc fixes. Une application affine envoie un}$$

parallélogramme sur un parallélogramme. **Donc $f(K)$ est le parallélogramme de sommets**

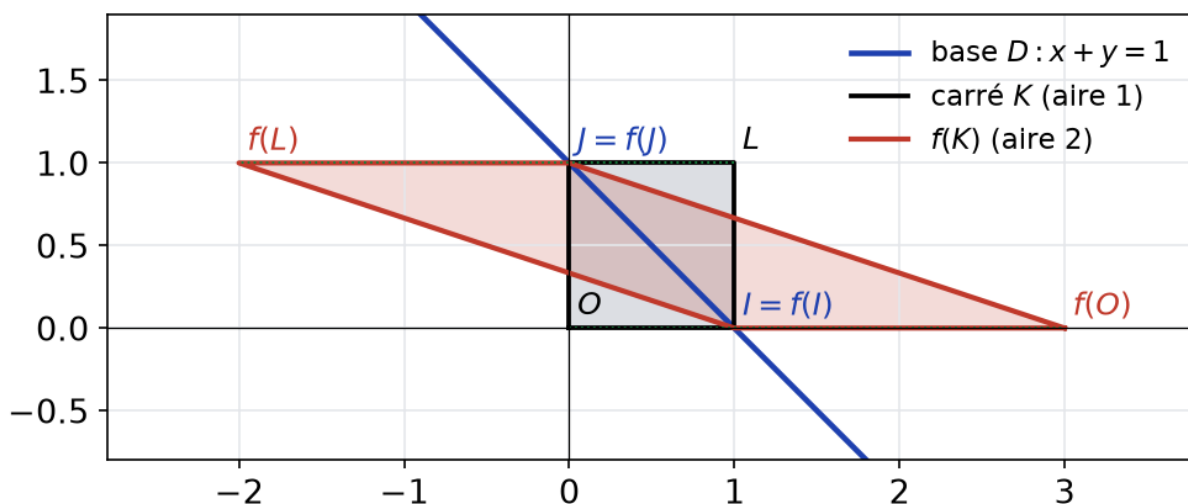
$$(3, 0), (1, 0), (-2, 1), (0, 1), \text{ d'aire } |-2| \times 1 = 2. \text{ La figure ci-dessous représente}$$

K et son image.

8. Le point $(t, 2t)$ a pour image $(3 - 8t, 2t)$. En posant $X = 3 - 8t$ et $Y = 2t$, on obtient $X + 4Y = 3$. **L'image de Δ est la droite d'équation $x + 4y = 3$.** Ensuite,

$$\Delta \cap \mathcal{D} \text{ est donné par } 3t = 1, \text{ soit le point } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \text{ On vérifie que } \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3. \text{ Ce point,}$$

fixe par f , appartient bien à $f(\Delta)$.



Point de méthode : pour identifier une affinité, on cherche sa base (les points fixes), puis sa direction (un sous-espace propre de la partie linéaire), et enfin son rapport (la valeur propre associée).

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [géométrie affine, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur géométrie affine](#)
- À maîtriser avant : [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Chapitre précédent : [Variables aléatoires à densité](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)